Sommaire

- 1.1 Un peu d'algèbre linéaire
- 1.2 Applications différentiables
- 1.3 Différentielles d'ordre supérieur
- 1.4 Aide au calcul
- 1.5 Différentielles et dérivées partielles
- 1.6 Accroissements finis
- 1.7 Formules de Taylor
- 1.8 Théorèmes d'inversion
- 1.9 Fonction implicite
- 1.10 Théorème du rang constant
- 1.11 Démonstration du théorème d'inversion locale

Calcul différentiel

Notations: dans tout le cours $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces vectoriels normés (evn), U est un ouvert de E , V est un ouvert de F et $f : U \rightarrow F$ une application.

Dans ce premier chapitre, on rappelle rapidement les outils de calcul différentiel des fonctions définies sur un evn qui seront utilisés dans la suite. Comme il s'agit essentiellement de rappels de Licence, seuls les théorèmes d'inversion, des fonctions implicites et du rang constant seront démontrés dans ce chapitre. On renvoie, par exemple, au livre [1] pour les preuves des autres résultats.

1.1 Un peu d'algèbre linéaire

On note $\mathcal{L}^c(E; F)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F . Rappelons qu'une application linéaire $L : E \rightarrow F$ est continue si et seulement si $\|L\| = \sup\{\|L(x)\|_F / x \in E, \|x\|_E = 1\}$ est fini. En particulier, si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

Proposition 1.1.1 $\|\cdot\|$ défini une norme sur l'espace $\mathcal{L}^c(E; F)$ qui vérifie

1. $\|L(x)\|_F \leq \|L\| \|x\|_E$ pour tout $x \in E$,
2. $\|L' \circ L\| \leq \|L'\| \|L\|$ pour tout $(L, L') \in \mathcal{L}^c(E; F) \times \mathcal{L}^c(F; G)$,
3. $(\mathcal{L}^c(E; F), \|\cdot\|)$ est complet si et seulement si $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet.

Ces propriétés se généralisent facilement aux applications multilinéaires. On rappelle que si $(E_1, \dots, E_p)$ est une famille finie d'evn, alors le produit $E_1 \times \dots \times E_p$ peut-être muni d'une structure d'evn en posant $\|(x_1, \dots, x_p)\| = \max\{\|x_1\|_{E_1}, \dots, \|x_p\|_{E_p}\}$. Cela muni l'espace $E_1 \times \dots \times E_p$ de la topologie produit des topologies des espaces $E_1, \dots, E_p$.

DÉFINITION. Soit $(E_1, \dots, E_p)$ et F des evn. On note $\mathcal{L}_p^c(E_1, \dots, E_p; F)$ l'ensemble des applications p -linéaires (i.e. telle que $L(x_1, \dots, x_p)$ soit linéaire par rapport à chacune de ses variables, les autres étant fixées) continues de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F .

On a là aussi, on a une caractérisation simple de la continuité.

Proposition 1.1.2 Une application p -linéaire $L : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ est continue si et seulement si $\|L\| = \sup\{\|L(x_1, \dots, x_p)\|_F / (x_1 \dots x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \|x_i\|_{E_i} = 1\}$ est fini. $\|\cdot\|$ défini alors une norme sur $\mathcal{L}_p^c(E_1, \dots, E_p; F)$ qui vérifie

1. $\|L(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq \|L\| \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_p\|_{E_p}$ pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$,
2. $\mathcal{L}_p^c(E_1, \dots, E_p; F)$ est complet si et seulement si F est complet.

En particulier, si tous les E_i sont de dimension finie, alors toutes les applications p -linéaires de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F sont continues.

1.2 Applications différentiables

DÉFINITION. Une application $f : U \rightarrow F$ est différentiable en $x_0 \in U$ si et seulement si il existe une application linéaire et continue $L : E \rightarrow F$ telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0 \quad (1.1)$$

REMARQUE.

1. L'égalité (1.1) est équivalente à l'égalité

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 (sauf éventuellement en 0) et vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Dans la pratique, on calcule souvent la différentielle d'une application en montrant qu'un tel développement existe.

2. L'application linéaire L est unique (quand elle existe), puisqu'on a $L(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$.

La définition suivante est donc bien posée.

DÉFINITION. Si f est différentiable en x_0 , l'application linéaire L est appelée la différentielle de f en x_0 et on la note $d_{x_0}f$.

La continuité de L dans la définition de la différentiabilité d'une application est une hypothèse nécessaire et suffisante pour avoir la propriété naturelle suivante.

Proposition 1.2.1 *Si $f : U \rightarrow F$ est différentiable en x_0 alors f est continue en x_0 .*

Bien entendu, il ne suffit pas d'être continue en x_0 pour être différentiable en x_0 . Enfin, rappelons que si E est de dimension finie alors toute application linéaire de E dans F est continue (ce qui évite d'avoir à utiliser les critères de continuité des applications linéaires rappelés en section 1.1).

Notez que la différentiabilité et la différentielle de f en x_0 dépend du choix des normes sur E et F . En revanche, si $\|\cdot\|_E$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_E$

et $\|\cdot\|'_F$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_F$, alors f est différentiable en x_0 pour les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ si et seulement si f est différentiable en x_0 pour les normes $\|\cdot\|'_E$ et $\|\cdot\|'_F$ et les différentielles sont alors égales. En particulier, si E et F sont de dimension finie, alors la différentiabilité de f et sa différentielle ne dépendent pas du choix des normes. Cette remarque est souvent utilisée dans la pratique pour simplifier les calculs (en choisissant bien les normes avec lesquelles on travaille, voir l'exemple 4. ci-dessous).

DÉFINITION. $f : U \rightarrow F$ est dite différentiable sur U si et seulement si f est différentiable en tout point de U . On appelle alors application différentielle de f la fonction $Df : U \rightarrow \mathcal{L}^c(E; F)$ définie par $Df(x) = d_x f$.

f est dite C^1 sur U si et seulement si f est différentiable sur U et Df est continue sur U .

EXEMPLES.

1. Si $E = \mathbb{R}$ et $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow F$, alors f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0 (i.e. $f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}$ existe) et dans ce cas, $d_{x_0} f : \mathbb{R} \rightarrow F$ est l'application linéaire définie par $d_{x_0} f(h) = h \cdot f'(x_0)$.
2. Si $f : U \rightarrow F$ est constante alors f est C^1 et $Df \equiv 0$.
3. Si $L \in \mathcal{L}^c(E; F)$, alors L est C^1 sur E et on a $DL \equiv L$ (i.e. DL est constante égale à L sur E).
4. L'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$ est C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, on a

$$f(M + H) - f(M) = MH + HM + H^2 = L(H) + H\varepsilon(H)$$

où $L(H) = HM + MH$ est linéaire (et donc continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie) et $\varepsilon(H) = \frac{1}{\|H\|} H^2$ est définie partout (sauf en 0) et vérifie $\|\varepsilon(H)\| = \frac{\|H^2\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\|^2}{\|H\|} = \|H\|$ (ici on a utilisé une norme d'opérateur sur les matrices, mais comme on est en dimension finie on sait qu'on peut travailler avec n'importe quelle norme) et donc $\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0$.

On en déduit que f est différentiable en M de différentielle égale à $d_M f(H) = MH + HM$. Comme $M \mapsto Df(M)$ est linéaire et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on a Df continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc f est C^1 .

Le dernier exemple se généralise et est souvent utilisé.

Proposition 1.2.2 *Si $E_1, \dots, E_p$ sont des evn et $A \in \mathcal{L}_p^c(E_1, \dots, E_p; F)$, alors A est C^1 sur $E_1 \times \dots \times E_p$ et on a*

$$d_{(x_1, \dots, x_p)} A(h_1, \dots, h_p) = \sum_{i=1}^p A(x_1, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_p).$$

EXERCICE. Soit $f : U \rightarrow F$ une application différentiable en $x \in U$. Montrer que f est continue en x .

EXERCICE. Soit $f : U \rightarrow F$ continue en $x_0 \in U$. On suppose qu'il existe $L : E \rightarrow F$ linéaire telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

Montrer que f est différentiable en x_0 .

EXERCICE. Montrer que l'application linéaire $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(P) = P(0)$ est (resp. n'est pas) différentiable sur $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\|_1 = \sup_{[0,1]} |P|$ (resp. de la norme $\|P\|_2 = \sup_{[1,2]} |P|$).

EXERCICE. Soit $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $c(t) = 0$ si $t \leq \frac{1}{3}$, $c(t) = 3t - 1$ si $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et $c(t) = 1$ si $t \geq \frac{2}{3}$. Comme c est continue sur $[0, 1]$, il existe (d'après le théorème de Stone-Weierstrass) une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers c sur $[0, 1]$. On note $a_k(n)$ les coefficients de P_n , on a donc $P_n = \sum_{k \geq 0} a_k(n) X^k$. On étend la fonction $t \mapsto P_t$ à $\mathbb{R}^+$, en posant

$$P_t = (1 - t + E(t))P_{E(t)} + (t - E(t))P_{E(t)+1}$$

On obtient une fonction de $\mathbb{R}^+$ à valeur dans $\mathbb{R}[X]$ et qui tend uniformément vers c sur $[0, 1]$ quand t tend vers ∞ . On considère enfin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(x) = xP_{\frac{1}{|x|}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

On définit trois normes sur $\mathbb{R}[X]$ en posant $\|P\|_1 = \sup_{[0,1]} |P|$, $\|P\|_2 = \sup_{[0,1/3]} |P|$ et $\|P\|_3 = \sup_{[2/3,1]} |P|$. Montrer que f est continue en 0 lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni d'une des trois normes précédentes, qu'elle est différentiable en 0 et $d_0 f(1) = 0$ lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$, qu'elle est différentiable en 0 et $d_0 f(1) = 1$ lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|_3$ et qu'elle n'est pas différentiable en 0 lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

1.3 Différentielles d'ordre supérieur

DÉFINITION. $f : U \subset E \rightarrow F$ est deux fois différentiable en x_0 si et seulement si il existe un voisinage ouvert de U' de x_0 dans U tel que f soit différentiable sur U' et Df soit différentiable en x_0 .

Dans ce cas, on appelle différentielle seconde de f en x_0 l'élément $d_{x_0}^2 f$ de $\mathcal{L}_2^c(E, E; F)$ défini par $d_{x_0}^2 f(h_1, h_2) = [d_{x_0}(Df)(h_1)](h_2)$.

Comme f va de $U \subset E$ dans F , Df va de $U' \subset E$ dans $\mathcal{L}^c(E; F)$ et donc $d_{x_0}(Df)$ est un élément de $\mathcal{L}^c(E; \mathcal{L}^c(E; F))$. On a donc $d_{x_0}(Df)(h_1) \in \mathcal{L}^c(E; F)$ et donc $d_{x_0}^2 f(h_1, h_2) \in F$. De plus, $d_{x_0}^2 f$ est bilinéaire et on a $\|d_{x_0}^2 f(h_1, h_2)\|_F \leq \|d_{x_0}(Df)(h_1)\| \|h_2\|_E \leq \|d_{x_0}(Df)\| \|h_1\|_E \|h_2\|_E$. Donc $d_{x_0}^2 f$ est continue.

Si f est deux fois différentiable sur U , on appelle différentielle seconde l'application $D^2 f : U \rightarrow \mathcal{L}_2^c(E, E; F)$ définie par $D^2 f(x) = d_x^2 f$. On dit que f est C^2 sur U si $D^2 f$ est continue sur U .

EXEMPLE. Dans l'exemple vu plus haut $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a calculé $Df(M)(H) = MH + HM$ et donc $M \mapsto Df(M)$ est linéaire. On en déduit que $d_M(Df) = Df$ et donc f est deux fois différentiable et $d_M^2 f(H_1, H_2) = [d_M(Df)(H_1)](H_2) = Df(H_1)(H_2) = H_1 H_2 + H_2 H_1$.

En itérant la définition précédente, on définit la notion de fonction k -fois différentiable ou C^k .

DÉFINITION. On dit que $f : U \rightarrow F$ est k fois différentiable en x_0 si et seulement si il existe un voisinage U' de x_0 dans U tel que f soit $(k-1)$ -différentiable sur U' et D^{k-1} est différentiable en x_0 .

On appelle alors différentielle k -ième (ou d'ordre k) de f en x_0 l'élément $d_{x_0}^k f \in \mathcal{L}_k^c(E, \dots, E; F)$ défini par

$$d_{x_0}^k f(h_1, \dots, h_k) = [d_{x_0}(D^{k-1}f)(h_1)](h_2, \dots, h_k)$$

et si f est k -fois différentiable sur U , alors on note $D^k f : U \rightarrow \mathcal{L}_k^c(E, \dots, E; F)$ l'application différentielle k -ième définie par $D^k f(x) = d_x^k f$ pour tout $x \in U$.

REMARQUE. Comme l'application D^{k-1} va de $V \subset E$ dans $\mathcal{L}_{k-1}^c(E, \dots, E; F)$, $d_{x_0}(D^{k-1}f)$ est une application linéaire de U dans $\mathcal{L}_{k-1}^c(E, \dots, E; F)$. Donc

$d_{x_0}(D^{k-1}f)(h_1) \in \mathcal{L}_{k-1}^c(E, \dots, E; F)$ et $d_{x_0}^k f$ est bien k -linéaire de E^k dans F .

DÉFINITION. $f : U \rightarrow F$ est k -fois différentiable sur U si et seulement si f est k -fois différentiable en tout point de U .

$f : U \rightarrow F$ est C^k sur U si et seulement si f est k -fois différentiable sur U et $D^k f : U \rightarrow \mathcal{L}_k^c(E, \dots, E; F)$ est continue sur U .

$f : U \rightarrow F$ est C^k en x_0 si et seulement si il existe un voisinage U' de x_0 dans U tel que f soit C^k sur U' .

f est C^∞ si et seulement si f est C^k pour tout k .

Proposition 1.3.1 *Si f est k différentiable (resp. C^k) en x_0 alors f est l -fois différentiable (resp. C^l) en x_0 pour tout $l \leq k$.*

De plus, on a $d_{x_0}^k f = d_{x_0}^{k-1}(D^1 f)$ (et donc $D^k f = D^{k-1}(D^1 f)$) si f est k -fois différentiable sur U .

Théorème 1.3.2 (Schwarz) *Si f est k -fois différentiable en x_0 , alors $d_{x_0}^p f$ est symétrique pour tout $p \leq k$, i.e. pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, on a $d_{x_0}^p f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = d_{x_0}^p f(x_1, \dots, x_p)$.*

EXERCICE. Montrer que toute application linéaire continue est C^∞ et calculer sa différentielle k -ième.

EXERCICE. Soit E et F des evn et $A : E \times E \times E \rightarrow F$ une application 3-linéaire continue. Montrer que A est C^∞ et calculer sa différentielle k -ième.

1.4 Aide au calcul

Proposition 1.4.1 *Si, $f, g : U \rightarrow F$ sont p -fois différentiables (resp. C^p) en x_0 alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est p -fois différentiable (resp. C^p) en x_0 , et on a*

$$d_{x_0}^k (\lambda f + \mu g) = \lambda d_{x_0}^k f + \mu d_{x_0}^k g$$

pour tout $k \leq p$.

Théorème 1.4.2 (Loi de composition) *Soit E, F, G des evn, U un ouvert de E , V un ouvert de F , $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow G$ des applications. Si f est*

k -fois différentiable (resp C^k) en x_0 et g est k -fois différentiable (resp. C^k) en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est k -fois différentiable (resp. C^k) en x_0 et on a

$$d_{x_0}(g \circ f) = d_{f(x_0)}g \circ d_{x_0}f$$

REMARQUE. Il existe des formules (assez compliquées) pour la différentielles k -ième d'une composée, voir [1]).

Proposition 1.4.3 Soit E et $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ des evn, U un ouvert de E et $f_i : U \rightarrow F_i$ des applications. On pose $\Phi : U \rightarrow F_1 \times \cdots \times F_n$ définie par $\Phi(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$. Alors l'application Φ est k -fois différentiable (resp. C^k) en x_0 si et seulement si toutes les applications composantes f_i sont k -fois différentiables (resp. C^k) en x_0 . On a de plus

$$d_{x_0}^p \Phi(h_1, \cdots, h_p) = (d_{x_0}^p f_1(h_1, \cdots, h_p), \cdots, d_{x_0}^p f_n(h_1, \cdots, h_p))$$

pour tout $p \leq k$.

Corollaire 1.4.4 (Formule de Leibniz) Soit $E, (F_i)_{1 \leq i \leq n}, G$ des evn, U un ouvert de E , $f_i : U \rightarrow F_i$ des applications, $A : F_1 \times \cdots \times F_n \rightarrow G$ une application n -linéaire et continue, et $\Phi : U \rightarrow G$ définie par $\Phi(x) = A(f_1(x), \cdots, f_n(x))$. Si tous les f_i sont k -fois différentiables (resp. C^k) en x_0 , alors Φ est k -fois différentiable en x_0 (resp. C^k) et on a

$$d_{x_0} \Phi(h) = \sum_{i=1}^n A(f_1(x_0), \cdots, f_{i-1}(x_0), d_{x_0} f_i(h), f_{i+1}(x_0), \cdots, f_n(x_0))$$

En appliquant ce qui précède au cas particulier $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $A(x, y) = xy$, on obtient la version bien connue de la formule de Leibniz.

EXEMPLE. Si $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^k en x_0 , alors $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x)g(x)$ est C^k en x_0 et vérifie

$$d_{x_0}(fg)(v) = d_{x_0}f(v)g(x_0) + f(x_0)d_{x_0}g(v).$$

L'exemple suivant sera utilisé dans la preuve du théorème d'inversion locale.

EXEMPLE. (l'inversion) Soit E et F deux espaces de Banach (evn complets). On note $\text{Iso}(E; F)$ l'ensemble des applications linéaires, continues et bijectives

de E dans F . On rappelle que, d'après le théorème de l'isomorphisme de Banach, pour tout $f \in \text{Iso}(E; F)$, on a $f^{-1} \in \text{Iso}(F; E)$.

Alors $\text{Iso}(E; F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}^c(E; F)$, $\text{Iso}(F; E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}^c(F; E)$ et l'application $\text{inv} : \text{Iso}(E; F) \rightarrow \text{Iso}(F; E)$ définie par $\text{inv}(f) = f^{-1}$ est C^∞ et vérifie $d_f \text{inv}(h) = -f^{-1} \circ h \circ f^{-1}$ pour tout $f \in \text{Iso}(E; F)$ et tout $h \in \mathcal{L}^c(E; F)$.

PREUVE. — Si $\text{Iso}(E; F)$ est vide alors il n'y a rien à démontrer.

Soit donc $f_0 \in \text{Iso}(E; F)$. On a $f = f_0 + f - f_0 = f_0 \circ (Id_E - h)$, où $h = f_0^{-1} \circ (f_0 - f)$. Si $f \in B(f_0, \frac{1}{\|f_0^{-1}\|})$, alors $\|h\| < \|f_0^{-1}\| \frac{1}{\|f_0^{-1}\|} = 1$, et donc la série $\sum_{i=0}^{\infty} h^i$ converge absolument. Comme $\mathcal{L}^c(E; F)$ est complet, cette série définit un élément $S \in \mathcal{L}^c(E; F)$.

L'application $L_f : \mathcal{L}^c(E; E) \rightarrow \mathcal{L}^c(E; E)$ définie par $L_f(g) = f \circ g$ est linéaire et continue (car $\|L_f(g)\| \leq \|f\| \|g\|$). On a donc

$$L_{Id_E - h}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_{Id_E - h} \left(\sum_{i=0}^n h^i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Id_E - h^{n+1} = Id_E$$

(car $\|h^k\| \leq \|h\|^k \rightarrow 0$). On a donc $(Id_E - h)S = Id_E$, et de même $S(Id_E - h) = Id_E$. On en déduit que $Id_E - h$ est inversible d'inverse S et f est inversible d'inverse Sf_0^{-1} pour tout $f \in B(f_0, \frac{1}{\|f_0^{-1}\|})$. Donc $\text{Iso}(E; F)$ est bien un ouvert de $\mathcal{L}^c(E; F)$ et on a

$$\text{inv}(f_0 + w) = \sum_{i=0}^{\infty} (-f_0^{-1} \circ w)^i f_0^{-1} = f_0^{-1} - f_0^{-1} w f_0^{-1} + \sum_{i=2}^{\infty} (-f_0^{-1} w)^i f_0^{-1}.$$

Or $L : \mathcal{L}^c(E; F) \rightarrow \mathcal{L}^c(F; E)$ définie par $L(h) = -f_0^{-1} h f_0^{-1}$ est linéaire et continue (car $\|L(h)\| \leq \|f_0^{-1}\|^2 \|h\|$), et $\varepsilon(h) = \frac{1}{\|h\|} \sum_{i=2}^{\infty} (-f_0^{-1} h)^i f_0^{-1}$ est définie sur $B(0, \frac{1}{\|f_0^{-1}\|}) \setminus \{0\}$ et vérifie

$$\|\varepsilon(h)\| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \|h\| \|f_0^{-1}\|^3 \|h\|^i \|f_0^{-1}\|^i = \frac{\|h\| \|f_0^{-1}\|^3}{1 - \|h\| \|f_0^{-1}\|}$$

et donc tend vers 0 quand h tend vers 0. Comme $\text{inv}(f_0 + h) = \text{inv}(f_0) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h)$, on en déduit que inv est différentiable en f_0 et $d_{f_0} \text{inv}(h) = L(h)$. $\square$

EXERCICE. Soit $f : U \subset E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une application différentiable en

$(x_0, y_0) \in U$. Montrer que $h(x) = f(x, y_0)$ est différentiable en x_0 et calculer sa différentielle.

EXERCICE. Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, et $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Calculer la différentielle de la fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad V(x) = \langle Mx, x \rangle + \|x - k(x)\|^2.$$

en fonction de dk .

EXERCICE. Soit $f : U \rightarrow F$ une application $\mathcal{C}^k$. Soit $x_0 \in U$. On pose $g(t) = f(x_0 + th)$. Montrer que g est $\mathcal{C}^k$ et calculer $g^{(k)}(0)$.

EXERCICE. Soit $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ et $h : W \rightarrow Z$ des applications différentiables en x , $f(x)$ et $g \circ f(x)$ respectivement. Montrer que $h \circ g \circ f$ est différentiable en x et calculer $d_x(h \circ g \circ f)$. Calculer $d_x^2(g \circ f)$ quand toutes les applications sont 2 fois différentiables.

1.5 Différentielles et dérivées partielles

1.5.1 Différentielles partielles d'ordre 1

Soit $(E_i, \|\cdot\|_i)$ une famille d'evn. On munit $E = E_1 \times \cdots \times E_r$ de la norme $\|(x_1, \dots, x_r)\| = \sum_{i=1}^r \|x_i\|_i$. Pour tout $a = (a_1, \dots, a_r) \in E$ et tout $1 \leq i \leq r$, on pose $I_i^a : E_i \rightarrow E$ l'application affine définie par

$$I_i^a(x_i) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_r).$$

Alors I_i^a est $\mathcal{C}^\infty$. A toute application $f : U \subset E \rightarrow F$ on associe $f_i^a = f \circ I_i^a$, qui est une application définie sur l'ouvert $U_i^a = (I_i^a)^{-1}(U)$ de E_i à valeurs dans F .

DÉFINITION. Si f_i^a est différentiable en a_i , alors la différentielle $d_{a_i} f_i^a$ est appelée la différentielle partielle de f par rapport à la i -ème variable (ou par rapport à la variable x_i) au point a . Dans la suite, cette différentielle partielle est notée $\frac{df}{dx_i} \Big|_a$ et c'est un élément de $\mathcal{L}^c(E_i; F)$

EXEMPLE. Si $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par $f(M, N) =$

MN et $a = (M_0, N_0)$, alors $f_1^a(M) = MN_0$ et donc $\frac{df}{dM}\big|_{(M_0, N_0)}(H) = HN_0$. De même, on trouve $\frac{df}{dN}\big|_{(M_0, N_0)}(H) = M_0H$.

DÉFINITION. Si $E_i = \mathbb{R}$, alors f_i^a est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$, et donc elle est différentiable en a_i si et seulement si elle est dérivable en a_i . On note alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la dérivée $(f_i^a)'(a_i)$ et on l'appelle la dérivée partielle de f en a par rapport à la i -ème variable (ou la variable x_i).

EXEMPLE. Si $f(x, y) = x \sin y$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos y$.

Les liens entre le calcul de la différentielle usuelle et celui des différentielles partielles sont donnés par la proposition suivante (qui sera complétée par le théorème 1.5.4 plus loin).

Proposition 1.5.1 *Si $f : U \subset E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$ est différentiable en a , alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{df}{dx_i}\big|_a$ existe et vérifie les relations*

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx_i}\big|_a(h_i) &= d_a f(0, \dots, 0, \underbrace{h_i}_{i\text{-ème position}}, 0, \dots, 0) \\ d_a f(h_1, \dots, h_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i}\big|_a(h_i) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $E_i = \mathbb{R}$ pour tout i , on a

$$\begin{aligned} d_a f(h_1, \dots, h_n) &= \sum_{i=1}^n h_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= d_a f(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ème position}}, 0, \dots, 0) = d_a f(e_i) \end{aligned}$$

où (e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1.5.2 Différentielles d'ordre supérieur

Soit $f : U \subset E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$. Si $\frac{df}{dx_j}\big|_x$ existe en tout point $x \in U$ et $(\frac{df}{dx_j})_j^a$ est différentiable en x_i , alors on appelle différentielle

partielle seconde de f en a par rapport aux variables (x_i, x_j) l'élément $\frac{d^2 f}{dx_i dx_j} \Big|_a$ de $\mathcal{L}_2^c(E_i, E_j; F)$ définie par

$$\frac{d^2 f}{dx_i dx_j} \Big|_a (h_i, h_j) = \left[d_{a_i} \left(\frac{df}{dx_j} \right)_i^a (h_i) \right] (h_j)$$

Comme $\left(\frac{df}{dx_j} \right)_i^a$ est une application d'un voisinage de a_i dans E_i à valeur dans $\mathcal{L}^c(E_j; F)$, alors $d_{a_i} \left(\frac{df}{dx_j} \right)_i^a \in \mathcal{L}^c(E_i; \mathcal{L}^c(E_j; F))$ et donc $\frac{d^2 f}{dx_i dx_j} \Big|_a$ est bien un élément de $\mathcal{L}_2^c(E_i, E_j; F)$.

En itérant, on définit les différentielles partielles d'ordre quelconque en posant

$$\frac{d^k f}{dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}} \Big|_a (h_{i_1}, \dots, h_{i_k}) = \left[d_{a_{i_1}} \left(\frac{d^{k-1} f}{dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}} \right)_{i_1}^a (h_{i_1}) \right] (h_{i_2}, \dots, h_{i_k})$$

On a $\frac{d^k f}{dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}} \Big|_a \in \mathcal{L}_k^c(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}; F)$.

Donnons maintenant les relations entre différentielles et différentielles partielles.

Théorème 1.5.2 *Si $f : U \subset E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$ est p -fois différentiable en a , alors pour tout $k \leq p$ et tout $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$, la différentielle partielle*

$\frac{d^k f}{dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}} \Big|_a$ existe. De plus, on a les relations

$$\begin{aligned} & \frac{d^k f}{dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}} \Big|_a (h_{i_1}, \dots, h_{i_k}) = \\ & d_a^k f((0_1, \dots, 0_{i_1-1}, h_{i_1}, 0_{i_1+1}, \dots, 0_n), \dots, (0_1, \dots, 0_{i_k-1}, h_{i_k}, 0_{i_k+1}, \dots, 0_n)) \\ & d_a^k f(h_1, \dots, h_k) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \frac{d^k f}{dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}} \Big|_a (h_{1, i_1}, \dots, h_{k, i_k}) \end{aligned}$$

où $h_i = (h_{i,1}, \dots, h_{i,n})$.

EXEMPLE. Reprenons l'exemple précédent $f(M, N) = MN$ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a vu plus haut que $\frac{df}{dM} \Big|_{(M_0, N_0)}(H) = HN_0$ et donc $\left(\frac{df}{dM} \right)_1^{(M_0, N_0)}(M_0) = (H \mapsto HN_0)$ et $\left(\frac{df}{dM} \right)_2^{(M_0, N_0)}(N_0) = (H \mapsto HN_0)$. On

a donc $\frac{d^2 f}{dM^2} \Big|_{(M_0, N_0)} = 0$ (car $(\frac{df}{dM})^{(M_0, N_0)}$ est constante) et $\frac{d^2 f}{dNdM} \Big|_{(H_1, H_2)} = H_2 H_1$. De même, on a $\frac{d^2 f}{dNdM} \Big|_{(H_1, H_2)} = H_1 H_2$ et $\frac{d^2 f}{dN^2} \Big|_{(H_1, H_2)} = 0$.

Dans l'exemple précédent, on a $\frac{d^2 f}{dNdM} \Big|_{(H_1, H_2)} = \frac{d^2 f}{dNdM} \Big|_{(H_2, H_1)}$. Ce fait se généralise.

Théorème 1.5.3 (Schwarz) *Si f est k -fois différentiable en a alors pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a*

$$\frac{d^k f}{dx_{i_{\sigma(1)}} \cdots dx_{i_{\sigma(k)}}} \Big|_a (h_{i_{\sigma(1)}}, \dots, h_{i_{\sigma(k)}}) = \frac{d^k f}{dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}} \Big|_a (h_{i_1}, \dots, h_{i_k})$$

Si $E_i = \mathbb{R}$ pour tout i , alors on appelle dérivées partielles d'ordre supérieur en a par

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \right) \cdots \right) \right) (a)$$

De plus, les formules précédentes et le théorème de Schwarz prennent la forme suivante

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a) = d_a^k f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

où (e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$d_a^k f(h_1, \dots, h_k) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k} h_{1, i_1} \cdots h_{k, i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}, \dots, \partial x_{i_k}}(a)$$

où $h_i = (h_{i,1}, \dots, h_{i,n})$.

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a)$$

On a vu que les différentielles partielles permettent de calculer la différentielle, quand elle existe. Sous certaines conditions, l'existence des dérivées partielles implique même l'existence de la différentielle (ce qui donne une réciproque partielle de la proposition 1.5.1).

Théorème 1.5.4 Soit $f : U \subset E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$ une application et $a \in U$. Si pour tout entier $k \leq p$ et tout k -uplet $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$, la différentielle partielle $\frac{d^k f}{dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}} \Big|_x$ existe en tout point x d'un voisinage de a et est continue en a , alors f est p -fois différentiable en a .

Dans le cas particulier où $E_i = \mathbb{R}$ pour tout i et si toutes les dérivées partielles de f d'ordre plus petit que p existent au voisinage de a et sont continues en a , alors f est p -fois différentiable en a .

EXEMPLE. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x \sin y, xy, e^x)$. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (\sin y, y, e^x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x \cos y, x, 0)$ qui existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. En itérant, on obtient que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE. Montrer que la fonction $f : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ définie par,

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M^{-1},$$

est C^∞ sur $GL_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle (plutôt que d'utiliser le cas général des espaces de Banach vu plus haut, l'idée plus simple en dimension finie consiste à montrer que f est C^∞ en regardant quel type de fonction des coefficients de M est f , puis à calculer la différentielle de f en différentiant l'égalité $M \times f(M) = I_n$).

EXERCICE. Calculer la différentielle en tout point de la fonction déterminant $M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M) \in \mathbb{R}$ (on pourra montrer que $\det$ est C^∞ en procédant comme au dessus, puis calculer ses dérivées partielles en I_n par rapports à tous les coefficients, puis déduire la différentielle en tout point en utilisant le caractère multiplicatif de $\det$).

EXERCICE. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ fixée une fonction.

1. On suppose que f est différentiable en $\bar{x} \in \Omega$. Montrer que toutes les dérivées partielles de f existent en $\bar{x}$ et que

$$d_{\bar{x}} f(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) h_i, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

2. Montrer que si f est deux fois différentiable en $x \in \Omega$ alors toutes ses dérivées partielles secondes existent en x et que

$$d_x^2 f(h, k) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i k_j \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

EXERCICE. Trouver les points de $\mathbb{R}^2$ où la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{x^2(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}{x^4+(x^2+y^2)^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, est différentiable.

EXERCICE. Étudier les propriétés de dérivabilité et de différentiabilité d'ordre deux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, $f(x, y) = xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1.5.3 Matrice Jacobienne, vecteur gradient et matrice Hessienne

DÉFINITION. Soit $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de plusieurs variables de fonctions composantes $f = (f_1, \dots, f_m)$. On note

$$J_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

la matrice Jacobienne de f en a . C'est un élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Proposition 1.5.5 *Si f est différentiable en a , alors $J_a f$ est la matrice de $d_a f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.*

DÉFINITION. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a , on appelle gradient de f en a le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$.

Proposition 1.5.6 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a , alors on a*

$$d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

REMARQUE. Par définition, on a $f(a + th) = f(a) + d_a f(th) + \|th\| \varepsilon(th) = f(a) + t \langle \nabla f(a), h \rangle + |t| \varepsilon_h(t)$, où $\varepsilon_h(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. En particulier, l'accroissement de f au premier ordre, lorsqu'on part de a dans la direction h est optimal pour $h = \nabla f(a)$. On dit souvent que $\nabla f(a)$ est la direction de plus grande pente de f en a . Inversement, l'hyperplan orthogonal à $\nabla f(a)$ est l'ensemble des directions pour lesquelles l'accroissement de f est nul au premier ordre (ou verra plus loin que cet hyperplan est tangent en a à l'ensemble $\{x / f(x) = f(a)\}$).

On obtient en corollaire.

Théorème 1.5.7 *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si x_0 est un extremum local de f sur U et si f est différentiable en x_0 , alors on a $d_{x_0} f = 0$ (i.e. $\nabla f(x_0) = 0$ si E est de dimension finie).*

DÉFINITION. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable en a , on appelle matrice Hessienne de f en a la matrice

$$\text{Hess}_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition 1.5.8 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable en a , alors $\text{Hess}_a f$ est une matrice symétrique et on a*

$$d_a^2 f(h, h') = {}^t h \times \text{Hess}_a f \times h'$$

pour tout $(h, h') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

EXERCICE. Calculer la matrice Jacobienne et le Jacobien de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\sin(x^2 + y^2), xy)$. Calculer le rang de $d_{(x,y)} f$ en fonction de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICE. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ c'est à dire tel que pour tout

$x, y \in \Omega$, le segment $[x, y]$ est inclus dans Ω . On rappelle qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si elle vérifie la propriété suivante.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, 1], \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Supposer que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable sur Ω et montrer qu'elle est convexe si et seulement si sa matrice Hessienne est positive en tout point de Ω .

1.6 Accroissements finis

Théorème 1.6.1 *Soit $f : U \rightarrow F$ une application et $(x, y) \in U$ un couple de points tel que $[x, y] \subset U$ (où $[x, y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\}$). Si f est différentiable en tout point du segment $[x, y]$, alors on a*

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \|x - y\|_E \sup_{z \in [x, y]} \|d_z f\|$$

Corollaire 1.6.2 *Si $f : U \rightarrow F$ est différentiable et $Df = 0$ sur U , alors f est localement constante sur U (i.e. f est constante sur chaque composante connexe de U). En particulier, si U est connexe (par exemple convexe) alors f est constante sur U .*

DÉFINITION. Soit X, Y deux espaces métriques. $f : X \rightarrow Y$ est dite localement Lipschitzienne si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x de x dans X et $M_x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(z, z') \in V_x^2$, on a

$$d_Y(f(z), f(z')) \leq M_x d_X(z, z')$$

Corollaire 1.6.3 *Si $f : U \rightarrow F$ est C^1 alors f est localement Lipschitzienne sur U .*

Proposition 1.6.4 *Soit $f_n : U \rightarrow F$ une suite d'applications différentiables sur U , $f : U \rightarrow F$ et $g : U \rightarrow \mathcal{L}^c(E; F)$. On suppose que*

1. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur U ,
2. $(Df_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur U ,

Alors f est différentiable en tout point de U et $Df = g$. De plus, pour tout convexe borné $C \subset U$, f_n converge uniformément vers g sur C . Enfin, si tous les f_n sont C^1 , alors f est C^1 sur U .

Proposition 1.6.5 Soit U un ouvert convexe de E , $f_n : U \rightarrow F$ une suite d'applications différentiables sur U . On suppose que

1. il existe $x_0 \in U$ tel que $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F ,
2. pour tout $x \in U$, il existe un voisinage V_x de x dans U tel que $(Df_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit uniformément de Cauchy sur V_x (i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, n' \geq N$, $\sup_{z \in V_x} \|d_z f_n - d_z f_{n'}\| \leq \varepsilon$),
3. F est un espace de Banach

alors il existe $f : U \rightarrow F$ différentiable sur U tel que $f_n \rightarrow f$ simplement sur U et pour tout $x \in U$, il existe un voisinage V_x de x dans U tel que $f_n|_{V_x} \rightarrow f|_{V_x}$ et $Df_n|_{V_x} \rightarrow Df|_{V_x}$ uniformément. De plus, si les f_n sont C^1 , alors f est C^1 .

1.7 Formules de Taylor

Les applications différentiable en un point sont celles qui sont bien approximées en x_0 par une application linéaire continue. Plus généralement, les applications p -fois différentiables sont bien approximées par un polynôme de degré p .

Théorème 1.7.1 (Taylor-Young) Si $f : U \rightarrow F$ est p -fois différentiable en $x_0 \in U$, alors on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - [f(x_0) + d_{x_0} f(h) + \dots + \frac{d_{x_0}^p f(h, \dots, h)}{p!}]\|_F}{\|h\|_E^p} = 0$$

Cette approximation de f par son polynôme de Taylor peut-être améliorée pour les fonctions $p + 1$ fois différentiables.

Théorème 1.7.2 (Taylor-Lagrange) Si $f : U \rightarrow F$ est $(p + 1)$ -fois différentiable sur U et si $[x_0, x_0 + h] \subset U$ alors on a

$$\|f(x_0 + h) - [f(x_0) + d_{x_0} f(h) + \dots + \frac{d_{x_0}^p f(h, \dots, h)}{p!}]\|_F \leq \sup_{x \in U} \|d_x f^{p+1} f\| \frac{\|h\|_E^{p+1}}{(p+1)!}$$

On déduit de ces formules les critères d'ordre 2 sur les extrema locaux des fonctions de plusieurs variables.

Théorème 1.7.3 *Soit $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un minimum (resp. maximum) local de f sur U . Si f est deux fois différentiable en x_0 , alors $d_{x_0}f = 0$ et $d_{x_0}^2 f(v, v) \geq 0$ pour tout $v \in E$. En particulier, si E est de dimension finie, alors $\text{Hess}_{x_0} f$ a toutes ses valeurs propres positives (resp. négative).*

Réciproquement, si E est de dimension finie et x_0 est un point de U où $d_{x_0}f = 0$ et $\text{Hess}_{x_0} f$ a toutes ses valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives), alors x_0 est un minimum (resp. maximum) local strict de f .

EXERCICE. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$. Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

1.8 Théorèmes d'inversion

DÉFINITION. Soit $f : U \rightarrow V$ une application, où U est un ouvert de E et V un ouvert de F et $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que f est un C^p difféomorphisme de U sur V si et seulement si f est bijective, C^p sur U et f^{-1} est C^p sur V . On dit alors que U et V sont difféomorphes.

Proposition 1.8.1 *Si $f : U \rightarrow V$ est un C^p -difféomorphisme, alors l'image de tout ouvert de U est un ouvert de V , et l'image réciproque de tout ouvert de V est un ouvert de U .*

PREUVE. — L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert. Comme f^{-1} est continue, l'image directe par f d'un ouvert est un ouvert. $\square$

EXEMPLE. Si $L \in \text{Iso}(E; F)$, où E et F sont des espaces de Banach, alors L est un C^∞ -difféomorphisme.

DÉFINITION. Soit $f : U \rightarrow F$ et $x_0 \in U$. f est un C^p -difféomorphisme local en x_0 si et seulement si il existe un voisinage U_{x_0} de x_0 dans U , un

voisinage $V_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$ dans F tel que $f|_{U_{x_0}} : U_{x_0} \rightarrow V_{f(x_0)}$ soit un C^p -difféomorphisme.

DÉFINITION. $f : U \rightarrow F$ est un C^p -difféomorphisme local sur U si et seulement si c'est un C^p -difféomorphisme local en tout point de U .

REMARQUE. Si $f : U \rightarrow V$ est un C^p -difféomorphisme, alors c'est un C^p -difféomorphisme local sur U . La réciproque est fautive en général. Toutefois, le résultat suivant montre que seule la bijectivité différencie les deux notions.

Proposition 1.8.2 *Si $f : U \rightarrow F$ est un C^p -difféomorphisme local sur U , alors pour tout ouvert $\Omega \subset U$, $f(\Omega)$ est un ouvert de F . En particulier, $V = f(U)$ est un ouvert de F .*

De plus, si f est injective sur U , alors $f : U \rightarrow V$ est un C^p -difféomorphisme.

PREUVE. — Soit $y \in f(\Omega)$ et $x \in \Omega$ tel que $y = f(x)$. Par hypothèse sur f , il existe un voisinage ouvert $U_x \subset U$ de x et un voisinage V_y de y dans F tel que $f|_{U_x} : U_x \rightarrow V_y$ soit un C^p -difféomorphisme. Donc $U_x \cap \Omega$ est un voisinage de x dans U et $f(U_x \cap \Omega)$ est un voisinage ouvert de y dans V_y et donc dans F car V_y est un ouvert de F . Comme $f(U_x \cap \Omega) \subset f(\Omega)$, on en déduit que $f(\Omega)$ est un voisinage de y dans F .

Si f est injective, alors $f : U \rightarrow V$ est une bijection. On note $g = f^{-1}$ et soit $y \in V$. f est un C^p -difféomorphisme en $x = g(y)$ donc il existe un voisinage U_x de x dans E et un voisinage V_y de y dans F tel que $(f|_{U_x})^{-1} = g|_{V_y}$ soit C^p sur V_y et donc g est C^p en tout point y de V . $\square$

Proposition 1.8.3 *Si f est un C^p -difféomorphisme en x_0 , alors $d_{x_0}f \in \text{Iso}(E; F)$ et on a $(d_{x_0}f)^{-1} = d_{f(x_0)}(f^{-1})$.*

PREUVE. — Soit U_{x_0} un voisinage de x_0 dans E et $V_{f(x_0)}$ un voisinage de $f(x_0)$ dans F tels que $g = f|_{U_{x_0}}$ soit un difféomorphisme de U_{x_0} sur $V_{f(x_0)}$. On a alors $g \circ g^{-1} = \text{Id}_{V_{f(x_0)}}$ et $g^{-1} \circ g = \text{Id}_{U_{x_0}}$. Ce qui donne $\text{Id}_F = d_{f(x_0)}(\text{Id}_{V_{f(x_0)}}) = d_{f(x_0)}(g \circ g^{-1}) = d_{x_0}g \circ d_{f(x_0)}g^{-1}$, et de même, $\text{Id}_E = d_{f(x_0)}g^{-1} \circ d_{x_0}g$. Comme $d_{x_0}g = d_{x_0}f$ et $d_{f(x_0)}(g^{-1}) = d_{f(x_0)}(f^{-1})$, on obtient le résultat annoncé. $\square$

REMARQUE. Dans la preuve précédente, on a seulement utilisé l'existence de f^{-1} et sa différentiabilité en $f(x_0)$ (et pas la continuité de Df^{-1} en x_0).

Théorème 1.8.4 (Inversion locale1) *Soit E et F deux espaces de Banach. Si $f : U \rightarrow F$ est C^p en x_0 et $d_{x_0}f \in \text{Iso}(E; F)$, alors f est un C^p difféomorphisme en x_0 .*

Théorème 1.8.5 (Inversion locale2) *Soit E et F deux espaces de Banach. Si $f : U \rightarrow F$ est C^p sur U et $d_x f \in \text{Iso}(E; F)$ pour tout $x \in U$, alors f est un C^p difféomorphisme local sur U .*

Théorème 1.8.6 (Inversion globale) *Soit E et F deux espaces de Banach. Si $f : U \rightarrow F$ est C^p sur U , si $d_x f \in \text{Iso}(E; F)$ pour tout $x \in U$ et si f est injective sur U , alors $V = f(U)$ est un ouvert de F et $f : U \rightarrow V$ est un C^p -difféomorphisme.*

D'après ce qui précède, les trois théorèmes découlent du premier théorème d'inversion locale, qui sera démontré dans la section 1.11.

REMARQUE. Dans la pratique et dans le cas d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $d_{x_0}f$ est inversible si et seulement si $n = p$ et $\det(J_{x_0}f) \neq 0$, si et seulement si $n = p$ et $\text{rg } J_{x_0}f = n$, si et seulement si $n = p$ et $(d_{x_0}f_1, \dots, d_{x_0}f_p)$ forme une famille libre de $(\mathbb{R}^n)^*$, où $f = (f_1, \dots, f_p)$.

EXEMPLE. (Coordonnées polaires) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. f est C^∞ et $J_{(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$, donc $d_{(r, \theta)}f$ est inversible si et seulement si $r \neq 0$. Le théorème d'inversion local implique que $f|_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}}$ est un C^∞ -difféomorphisme local de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2 \times \{(0, 0)\}$. En revanche f n'est pas un difféomorphisme global puisque f est 2π -périodique en θ et donc f n'est pas injective sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Comme f est injective sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$, le théorème d'inversion globale implique que $f|_{\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[}$ est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ sur son image $f(\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$.

EXERCICE. Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2$ est un C^∞ -difféomorphisme local de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur lui-même. Montrer que $g(z) = e^z$ est un C^∞ -difféomorphisme local de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

EXERCICE. On se propose de trouver toutes les solutions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de

classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

1. On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$, montrer que φ est un difféomorphisme C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Soit f une solution de l'équation aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$, on pose $g := f \circ \varphi^{-1}$. Quelle est l'équation vérifiée par g ?
3. Conclure.

EXERCICE. Soit $u = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ et $U_u = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \cdot u)$. On définit la fonction $\Psi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $\Psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

1. Montrer que U_u et $V_{\theta_0} =]0, +\infty[\times]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et que Ψ est un C^∞ difféomorphisme local qui se restreint en un C^∞ difféomorphisme de V_{θ_0} sur U_u .
2. A l'anneau de $\mathbb{R}^2$ centré en $(0, 0)$ et de rayons $a < b$. On cherche les solutions f du problème suivant
 - a) f est continue sur A et C^2 sur l'intérieur de A ,
 - b) $f = M$ sur le cercle intérieur de A , $f = 0$ sur le cercle extérieur de A ,
 - c) $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur l'intérieur de A .

Supposons que f_0 est une solution de ce problème qui est de plus invariante par rotation. On pose $F = f_0 \circ \psi$. Montrer que F vérifie les équations suivantes sur $]a, b[\times \mathbb{R}$

$$r \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$

En déduire f_0 .

3. Soit f une solution quelconque du problème (pas supposée invariante par rotation a priori). On pose $g = f - f_0$ et on suppose qu'il existe

$x \in A$ tel que $g(x) > 0$. Montrer que pour $\epsilon > 0$ assez petit, la fonction $h_\epsilon = g + \epsilon(x^2 + y^2)$ atteint son maximum en un point intérieur à A et vérifie $\Delta h_\epsilon = 4\epsilon > 0$ sur tout A . En déduire que $g \leq 0$ sur A , puis que $g = 0$. On en déduit que f_0 est la seule solution du problème.

EXERCICE. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme local en I_n .

On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices définies positives. Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de l'espace vectoriel $S_n(\mathbb{R})$ et que f induit un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sur lui-même.

Soit $M \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^t M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $S_M = f^{-1}(M^t M) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $O_M = S_M^{-1} \times M$. Montrer que $O_M \in O(n)$ et que $M = S_M \times O_M$ (décomposition polaire). Réciproquement, montrer que si $M = S \times O$ avec $S \in S^{++}(\mathbb{R})$ et $O \in O(n)$ alors $S = f^{-1}(M^t M)$ et $O = O_M$. Montrer que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{G}l_n(\mathbb{R}) &\rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O(n) \subset S_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto (S_M, O_M) \end{aligned}$$

est $\mathcal{C}^\infty$.

EXERCICE. En utilisant le changement de variable $x = u, y = uv$, résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

EXERCICE. Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine. On suppose la forme quadratique hessienne $D^2_{(0,0)} f$ non dégénérée.

1) Soit $c(t) = f(tx, ty)$. Calculer $c'(t)$ et $c''(t)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale pour c , montrer qu'il existe trois fonctions α, β, γ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telles que

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y \\ &= \alpha(x, y)x^2 + 2\beta(x, y)xy + \gamma(x, y)y^2 \end{aligned}$$

On note $S_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \alpha(x,y) & \beta(x,y) \\ \beta(x,y) & \gamma(x,y) \end{pmatrix}$.

2) Soit $S_0 \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible de taille n . Soit $F = S_0^{-1}S_n(\mathbb{R})$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et que $\varphi : F \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = {}^t M S_0 M$ réalise un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme d'un voisinage de I_n dans F sur un voisinage de S_0 dans $S_n(\mathbb{R})$. En déduire qu'il existe une application M de classe $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage U de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $Gl_2(\mathbb{R})$ telle que

$$S_{(x,y)} = {}^t M_{(x,y)} S_{(0,0)} M_{(x,y)}$$

On pose $(u,v) = \Phi(x,y) = (x,y) {}^t M_{(x,y)} {}^t P$ où P est une application linéaire bien choisie. Montrer que Φ est un difféomorphisme sur son image au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $g(u,v) := f \circ \Phi^{-1}(u,v) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$, où (λ_1, λ_2) sont les valeurs propres de $d_{(0,0)}^2 f$.

3) Donner la position du graphe de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par rapport à son plan tangent en $(0,0)$ en fonction de la signature de $d_{(0,0)}^2 f$ (on suppose toujours que $d_{(0,0)}^2 f$ est non dégénérée).

1.9 Fonction implicite

DÉFINITION. Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ une application. On appelle graphe de f la partie de $E \times F$ définie par $\text{Gr}(f) = \{(x,y) \in E \times F / x \in U \text{ et } y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in U \times F\}$.

DÉFINITION. Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ et $y_0 \in F$. On appelle ligne de niveau y_0 de f l'ensemble $S_{y_0} = \{x \in U / f(x) = y_0\}$.

REMARQUE. Le graphe de $f : U \subset E \rightarrow F$ est la ligne de niveau 0 de la fonction $F : U \times F \rightarrow F$ définie par $F(x,y) = y - f(x)$.

Le but du théorème des fonctions implicites est de donner une condition suffisante simple pour qu'une ligne de niveau soit (au moins localement) le graphe d'une fonction.

Théorème 1.9.1 (fonction implicite) Soit E_1, E_2 et F des espaces de Banach, $f : U \subset E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une fonction de classe C^p ($p \geq 1$), $y_0 \in F$ et

$(x_1^0, x_2^0) \in S_{y_0}$. Si $\frac{df}{dx_2}|_{(x_1^0, x_2^0)} \in \text{Iso}(E_2; F)$ alors il existe un voisinage U_i de x_i^0 dans E_i et $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ de classe C^p tel que $U_1 \times U_2 \subset U$ et $S_{y_0} \cap (U_1 \times U_2) = \text{Gr}(\varphi)$, i.e.

$$\{(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 / f(x_1, x_2) = y_0\} = \{(x_1, \varphi(x_1)) / x_1 \in U_1\}$$

De plus, on a $d_{x_1^0}\varphi = -\left(\frac{df}{dx_2}|_{(x_1^0, x_2^0)}\right)^{-1} \circ \frac{df}{dx_1}|_{(x_1^0, x_2^0)}$.

Dans la pratique, si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est définie par $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$, alors pour que $S_{y_0} = f^{-1}(\{y_0\})$ soit le graphe d'une fonctions des variables $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ au voisinage de $m_0 \in U$, il suffit que

1. $f(m_0) = y_0$
2. $k = n - p$,
3. $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}}(m_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_p}}(m_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{j_1}}(m_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{j_p}}(m_0) \end{pmatrix} \neq 0$, où les indices (j_i) sont $\{j_1, \dots, j_p\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$.

Dans ce cas, la Jacobienne de φ et m_0 se calcule par la formule

$$J_{m_0}\varphi = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}}(m_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_p}}(m_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{j_1}}(m_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{j_p}}(m_0) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}(m_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_k}}(m_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}}(m_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_k}}(m_0) \end{pmatrix}$$

EXEMPLE. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^1 = f^{-1}(\{1\})$ et si $y_0 \neq 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$ et donc $\mathbb{S}^1$ est le graphe d'une fonction φ de la variable x et de classe C^∞ au voisinage de (x_0, y_0) . De plus, on a $\varphi'(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) / \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{y_0}$.

En fait, un calcul direct donne $\varphi(x) = \text{sg}(y_0)\sqrt{1 - x^2}$. Bien sûr, l'intérêt de ce théorème est qu'il donne l'existence de φ (et sa différentielle) y compris dans les cas où φ ne peut pas être calculée explicitement.

PREUVE. — (Théorème des fonctions implicites) Soit $F : U \subset E_1 \times E_2 \rightarrow E_1 \times F$ l'application définie par $F(x_1, x_2) = (x_1, f(x_1, x_2))$. Alors F est C^p

et on a $d_{(x_1^0, x_2^0)}F(h_1, h_2) = (h_1, \frac{df}{dx_1}|_{(x_1^0, x_2^0)}(h_1) + \frac{df}{dx_2}|_{(x_1^0, x_2^0)}(h_2))$. L'application $L : E_1 \times F \rightarrow E_1 \times E_2$ définie par

$$L(h_1, v) = \left(h_1, \left(\frac{df}{dx_2} \Big|_{(x_1^0, x_2^0)} \right)^{-1} \left(v - \frac{df}{dx_1} \Big|_{(x_1^0, x_2^0)}(h_1) \right) \right)$$

est linéaire, continue puisqu'on a

$$\|L\| \leq 1 + \left\| \left(\frac{df}{dx_2} \Big|_{(x_1^0, x_2^0)} \right)^{-1} \right\| \left(1 + \left\| \frac{df}{dx_1} \Big|_{(x_1^0, x_2^0)} \right\| \right)$$

et vérifie $L \circ d_{(x_1^0, x_2^0)}F = \text{Id}_{E_1 \times E_2}$ et $d_{(x_1^0, x_2^0)}F \circ L = \text{Id}_{E_1 \times F}$. On a donc $d_{(x_1^0, x_2^0)}F \in \text{Iso}(E_1 \times E_2; E_1 \times F)$.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U_i de x_i dans E_i tel que $F|_{U_1 \times U_2}$ soit un C^p difféomorphisme de $U_1 \times U_2$ sur $V = F(U_1 \times U_2)$. V est un ouvert de $E_1 \times F$ contenant $(x_1^0, y_0) = F(x_1^0, x_2^0)$.

Soit $G = (F|_{U_1 \times U_2})^{-1} : V \rightarrow U_1 \times U_2$. On note $G(x_1, y) = (g_1(x_1, y), g_2(x_1, y))$, alors G, g_1 et g_2 sont C^p sur V . Comme $F \circ G(x_1, y) = (x_1, y)$ pour tout $(x_1, y) \in V$, on a $g_1(x_1, y) = x_1$ et $f \circ g_2(x_1, y) = y$ pour tout $(x_1, y) \in V$.

L'ensemble $U'_1 = \{x_1 \in U_1 / (x_1, y_0) \in V\}$ est un voisinage ouvert de x_1^0 dans U_1 et donc dans E_1 , car $\pi(x_1, y_0) = x_1$ est continue. On pose $\varphi(x_1) = g_2(x_1, y_0)$. φ est bien définie et C^p sur U'_1 , et vérifie

$(x_1, x_2) \in (U'_1 \times U_2) \cap S_{y_0}$ si et seulement si $x_1 \in U'_1, x_2 \in U_2$ et $f(x_1, x_2) = y_0$,
si et seulement si $x_1 \in U'_1, x_2 \in U_2$ et $F(x_1, x_2) = (x_1, y_0) \in V$,
si et seulement si $x_1 \in U'_1, x_2 \in U_2$ et $(x_1, x_2) = G(x_1, y_0) = (x_1, \varphi(x_1)) \in V$,
si et seulement si $x_1 \in U'_1, x_2 \in U_2$ et $x_2 = \varphi(x_1)$,
si et seulement si $x_1 \in U'_1$ et $x_2 = \varphi(x_1)$ (car $\varphi(x_1) = g_2(x_1, y_0) \in U_2$),
si et seulement si $(x_1, x_2) \in \text{Gr}(\varphi)$.

Enfin, on a $\psi(x_1) = f(x_1, \varphi(x_1)) = y_0$ pour tout $x_1 \in U_1$. Donc

$$0 = d_{x_1^0}\psi = d_{(x_1^0, x_2^0)}f(h, d_{x_1}\varphi(h)) = \frac{df}{dx_1} \Big|_{(x_1^0, x_2^0)}(h) + \frac{df}{dx_2} \Big|_{(x_1^0, x_2^0)}(d_{x_1}\varphi(h))$$

Et donc on a

$$d_{x_1}\varphi(h) = - \left(\frac{df}{dx_2} \Big|_{(x_1^0, x_2^0)} \right)^{-1} \circ \frac{df}{dx_1} \Big|_{(x_1^0, x_2^0)}(h)$$

□

EXERCICE. Montrer que l'égalité $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ définit au voisinage de $(1, 1)$ une fonction implicite $y = \Phi(x)$. Donner un développement limité à l'ordre 2 de Φ en 1.

EXERCICE. Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine simple de P . Montrer qu'il existe un voisinage U de $(a_0, \dots, a_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et un voisinage V de α dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in U$, le polynôme $b_0 + \dots + b_n X^n$ ait une unique racine (simple) $\varphi(b_0, \dots, b_n)$ dans V . Montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur U et calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial b_i}(a_0, \dots, a_n)$.

1.10 Théorème du rang constant

DÉFINITION. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en x_0 . On appelle rang de f en x_0 , et on note $\text{rg}_{x_0} f$, l'entier $\text{rg } d_{x_0} f$. On a toujours $\text{rg}_{x_0} f \leq \min(n, m)$.

Proposition 1.10.1 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est C^1 en x_0 , alors il existe un voisinage U_{x_0} de x_0 dans U tel que pour tout $x \in U_{x_0}$, on a $\text{rg}_x f \geq \text{rg}_{x_0} f$.*

En particulier, si f est C^1 sur U , alors pour tout $c \in \mathbb{N}$, $\Omega_c = \{x \in U / \text{rg}_x f \geq c\}$ est un ouvert de U .

Si $d_{x_0} f$ est injective (resp. surjective, resp. bijective) alors il existe un voisinage U_{x_0} de x_0 dans U tel que pour tout $x \in U_{x_0}$, on ait $d_x f$ injective (resp. surjective, resp. bijective).

PREUVE. — Rappelons qu'une matrice M est de rang plus grand que c si et seulement si il existe une matrice carrée de taille c et inversible extraite de M . Donc si $\text{rg}_{x_0} f \geq c$, il existe $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_c \leq n$ et $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_c \leq m$ tels que

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_1}}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_c}}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{i_c}}{\partial x_{j_1}}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_{i_c}}{\partial x_{j_c}}(x_0) \end{pmatrix}}_{C_{x_0}} \neq 0$$

Or les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ et $M \mapsto \det M$ sont continues et donc, pour x assez proche de x_0 , on a C_x est inversible. On en déduit qu'alors $\text{rg}_x f \geq c$ pour tout x assez proche de x_0 .

Le dernier résultat découle du fait que $d_x f$ est injective, surjective ou bijective si et seulement si $\text{rg}_x f = \min(n, m)$. $\square$

Théorème 1.10.2 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application C^p sur U .*

1. *Si f est une immersion en x_0 (i.e. si $d_{x_0} f$ est injective), alors il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 dans U , un voisinage ouvert $V_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}^m$ et $\Psi : V_{f(x_0)} \rightarrow W \subset \mathbb{R}^m$ un C^p -difféomorphisme tels que $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$ et $\Psi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in U_{x_0}$.*

Autrement dit, à un changement de variable près, toute immersion est localement égale à l'injection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

2. *Si f est une submersion en x_0 (i.e. si $d_{x_0} f$ est surjective), alors il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 dans U , un ouvert W de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi : W \rightarrow U_{x_0}$ un C^p -difféomorphisme tels que $f \circ \Phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in W$.*

Autrement dit, à un changement de variable près, toute submersion est égale à la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

3. *Si $\text{rg}_x f = c$ pour tout $x \in U$, alors pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 dans U , un voisinage ouvert $V_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}^m$ et des C^p -difféomorphismes $\Phi : V \rightarrow U_{x_0}$ et $\Psi : V_{f(x_0)} \rightarrow W$ tels que $\Psi \circ f \circ \Phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_c, 0, \dots, 0)$.*

Autrement dit, toute application de rang localement constant est, à changements de variables près, équivalente à

$$J_c(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_c, 0, \dots, 0).$$

PREUVE. — On se place sous les hypothèses du point (3) car elles impliquent les hypothèses des points (1) et (2) quand $c = m$ ou $c = n$.

Par hypothèse, il existe une matrice carrée, inversible et de taille r extraite de $J_{x_0} f$. Quitte à remplacer f par $L \circ f \circ L'$, où L et L' sont des isomorphismes linéaires permutant les coordonnées (et donc des C^∞ -difféomorphismes), on peut supposer que la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(m_0)\right)_{\substack{1 \leq i \leq c \\ 1 \leq j \leq c}}$ est inversible.

Soit $\Theta : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\Theta(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_c(x_1, \dots, x_n), x_{c+1}, \dots, x_n).$$

Alors Θ est C^p , $J_{x_0} \Theta = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(m_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq c \\ 1 \leq j \leq c}} & * \\ 0 & I_{n-c} \end{pmatrix}$ et donc $d_{x_0} \Theta \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe U_{x_0} un voisinage de x_0 tel que $\Theta|_{U_{x_0}}$ soit un C^p -difféomorphisme sur $V = \Theta(U_{x_0})$. on pose alors $\varphi = \Theta^{-1}$.

On a

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(y_1, \dots, y_n) &= (f_1 \circ \varphi(y), \dots, f_c \circ \varphi(y), f_{c+1} \circ \varphi(y), \dots, f_m \circ \varphi(y)) \\ &= (\Theta_1 \circ \varphi(y), \dots, \Theta_c \circ \varphi(y), h_{c+1}(y), \dots, h_m(y)) \\ &= (y_1, \dots, y_c, h_{c+1}(y), \dots, h_m(y)) \end{aligned}$$

Si $c = m$, alors on a $f \circ \varphi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_m)$, ce qui donne le point (2).

Sinon, on a

$$J_y(f \circ \varphi) = \begin{pmatrix} I_c & & & & 0 \\ \frac{\partial h_{c+1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_{c+1}}{\partial y_c} & \frac{\partial h_{c+1}}{\partial y_{c+1}} & \dots & \frac{\partial h_{c+1}}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_c} & \frac{\partial h_m}{\partial y_{c+1}} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \underbrace{J_{\varphi(y)} f}_{\text{de rang } c} \times \underbrace{J_y \varphi}_{\text{inversible}}$$

et donc $\text{rg}_y(f \circ \varphi) = c$. Comme les c premières colonnes de $J_y(f \circ \varphi)$ forment une famille libre, on en déduit que les suivantes sont nulles, et donc $\frac{\partial h_i}{\partial y_j}(y) = 0$ pour tout $y \in V$, tout $j \geq c+1$ et tout $i \in \{c+1, \dots, m\}$. Quitte à réduire le voisinage U_{x_0} de x_0 on peut supposer que les fonctions $h_{c+1}, \dots, h_m$ ne dépendent que des variables $y_1, \dots, y_c$ sur V . On pose $\Psi(z_1, \dots, z_m) = (z_1, \dots, z_c, z_{c+1} - h_{c+1}(z_1, \dots, z_c), \dots, z_m - h_m(z_1, \dots, z_c))$ sur V . Alors on a $J_{f(x_0)} \Psi = \begin{pmatrix} I_c & 0 \\ * & I_{m-c} \end{pmatrix}$ et donc Ψ est un difféomorphisme au voisinage de $f(x_0)$. Enfin, on a $\Psi \circ f \circ \varphi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_c, 0, \dots, 0)$, ce qui donne le point (3).

Si $c = n$, alors, en posant $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $\bar{f}(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$, on a

$$\begin{aligned} \Psi \circ f(z) &= (\bar{f}(z), f_{n+1}(z) - f_{n+1} \circ \varphi \circ \bar{f}(z), \dots, f_m(z) - f_m \circ \varphi \circ \bar{f}(z)) \\ &= (\Theta_1(z), \dots, \Theta_n(z), 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

et donc, si on pose $\varphi \times \text{Id}_{\mathbb{R}^{m-n}}(y_1, \dots, y_m) = (\varphi(y_1, \dots, y_n), y_{n+1}, \dots, y_m)$, on obtient

$$(\varphi \times \text{Id}_{\mathbb{R}^{m-n}}) \circ \Psi \circ f(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0)$$

ce qui donne le point (1). $\square$

1.11 Démonstration du théorème d'inversion locale

L'ingrédient essentiel de la preuve du théorème d'inversion locale est le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 1.11.1 (Point fixe de Banach) *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une application k -Lipschitzienne avec $k < 1$. Alors f a un unique point fixe dans X .*

PREUVE. — Si x et x' sont des points fixes de f , alors on a

$$d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq kd(x, x')$$

comme $k < 1$, on en déduit que $d(x, x') = 0$ et donc $x = x'$, d'où l'unicité du point fixe de f .

Pour l'existence, on choisit $x_0 \in X$ et on considère la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Cette suite est de Cauchy puisqu'on a $d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq k^n d(x_0, x_1)$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{l=0}^{p-1} d(x_{n+l}, x_{n+l+1}) \leq \sum_{l=0}^{p-1} k^{n+l} d(x_0, x_1) \\ &= \frac{k^n - k^{n+p}}{1 - k} d(x_0, x_1) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x, x') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Comme X est complet, il existe $x \in X$ tel que $x_n \rightarrow x$. Alors, puisque f est continue, on a $f(x) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$ et donc x est un point fixe de f dans X . $\square$

Notre démonstration du théorème d'inversion locale va se faire en 4 étapes.

Soit $x_0 \in \Omega$ tel que $d_{x_0}f \in \text{Iso}(E; F)$. Comme f est C^1 en x_0 , il existe $r > 0$ tel que $B'(x_0, r) \subset \Omega$ et $\|d_x f - d_{x_0} f\| \leq \frac{1}{2\|(d_{x_0} f)^{-1}\|}$ pour tout $x \in B'(x_0, r)$.

Lemme 1.11.2 *Pour tout $y \in B(f(x_0), \frac{r}{2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|})$, il existe un unique $x \in B'(x_0, r)$ tel que $f(x) = y$.*

PREUVE. — L'idée est de transformer l'équation $f(x) = y$ en équation de point fixe. Pour cela on pose $h_y : B'(x_0, r) \rightarrow E$ définie par

$$h_y(x) = x - (d_{x_0}f)^{-1}(f(x) - f(x_0)) + (d_{x_0}f)^{-1}(y - f(x_0)).$$

h_y est de classe C^p sur $B'(x_0, r)$ et vérifie

$$\begin{aligned} \|d_x h_y\| &= \|\text{Id}_E - (d_{x_0}f)^{-1} \circ d_x f\| = \|(d_{x_0}f)^{-1} \circ (d_{x_0}f - d_x f)\| \\ &\leq \|(d_{x_0}f)^{-1}\| \|d_{x_0}f - d_x f\| \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On déduit du théorème des accroissements finis que h_y est 1/2-Lipschitzienne sur $B'(x_0, r)$. De plus, si $x \in B'(x_0, r)$, alors on a

$$\begin{aligned} \|h_y(x) - x_0\| &= \|h_{f(x_0)}(x) - h_{f(x_0)}(x_0) + (d_{x_0}f)^{-1}(y - f(x_0))\| \\ &\leq \|h_{f(x_0)}(x) - h_{f(x_0)}(x_0)\| + \|(d_{x_0}f)^{-1}\| \|y - f(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x - x_0\| + \|(d_{x_0}f)^{-1}\| \frac{r}{2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|} \leq r \end{aligned}$$

Donc h_y est une application $\frac{1}{2}$ -Lipschitzienne de $B'(x_0, r)$ dans lui-même. Comme E est un espace de Banach, la boule fermée $B'(x_0, r)$ est un espace complet. D'après le théorème du point fixe de Banach, il existe un unique $x_y \in B'(x_0, r)$ tel que $h_y(x_y) = x_y$. Or $h_y(x) = x$ si et seulement si $f(x) = y$, ce qui donne le résultat. $\square$

Soit $U = B'(x_0, r) \cap f^{-1}\left(B(f(x_0), \frac{r}{2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|})\right)$. U est un voisinage de x_0 dans E par continuité de f et f réalise une bijection de U sur $V = B(f(x_0), \frac{r}{2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|})$ d'après le lemme précédent.

On pose $g : V \rightarrow U \subset E$ définie par $g = (f|_U)^{-1}$.

Lemme 1.11.3 *g est $2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|$ -Lipschitzienne sur V et U est un ouvert de E .*

PREUVE. — En reprenant les notations de la preuve du lemme précédent, $h_0(x) = x - (d_{x_0}f)^{-1} \circ f(x)$ est 1/2-Lipschitzienne sur $B'(x_0, r)$, et donc on a

$$\begin{aligned} \|(d_{x_0}f)^{-1}\| \|f(x) - f(x')\| &\geq \|(d_{x_0}f)^{-1}\| (f(x) - f(x')) \geq \|x - x' + h(x') - h(x)\| \\ &\geq \|x - x'\| - \|h(x) - h(x')\| \geq \frac{1}{2} \|x - x'\| \end{aligned}$$

pour tout x, x' dans $B'(x_0, r)$.

Si y, y' sont des points de V , alors $x = g(y)$ et $x' = g(y')$ sont des points de $U \subset B'(x_0, r)$ et on a

$$\|g(y) - g(y')\| = \|x - x'\| \leq 2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|\|f(x) - f(x')\| \leq 2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|\|y - y'\|$$

et donc g est bien $2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|$ -Lipschitzienne.

Pour $y' = f(x_0)$, l'égalité précédente donne

$$\|g(y) - x_0\| \leq 2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|\|y - f(x_0)\| < r$$

pour tout $y \in V$, et donc $U = g(V) \subset B(y_0, r)$, i.e. $U \subset B(x_0, r) \cap f^{-1}(V) \subset B'(x_0, r) \cap f^{-1}(V) = U$, dont on déduit que $U = B(x_0, r) \cap f^{-1}(V)$ et donc est bien un ouvert de E . $\square$

On a donc montré que f est un homéomorphisme (et même une application bi-Lipschitzienne) du voisinage ouvert U de x_0 dans E sur le voisinage ouvert V de $f(x_0)$ dans F . Il reste à montrer que g est de classe C^p sur V .

Lemme 1.11.4 *g est différentiable sur V et $d_y g = (d_{g(y)}f)^{-1}$.*

PREUVE. — On a vu plus haut que si E et F sont des espaces de Banach et $L \in \text{Iso}(E; F)$ alors $B(f_0, \frac{1}{\|L^{-1}\|}) \subset \text{Iso}(E; F)$.

Dans notre cas, on a montré que pour tout $x \in U$, on a $d_x f \in B(d_{x_0}f, \frac{1}{2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|})$, et donc $d_x f \in \text{Iso}(E; F)$.

Soit $y \in V$ et $\epsilon > 0$ assez petit pour que $B(y, \epsilon) \subset V$. Si $\|h\| \leq \epsilon$, alors $y + h \in V$ et $g(y + h) - g(y) - (d_{g(y)}f)^{-1}(h)$ est bien définie (car $g(y) \in U$). Si on pose $\omega = g(y + h) - g(y)$, alors on a

$$g(y + h) - g(y) - (d_{g(y)}f)^{-1}(h) = (d_{g(y)}f)^{-1}(d_{g(y)}f(\omega) - \underbrace{(y + h)}_{=f(g(y)+\omega)} + \underbrace{y}_{=f \circ g(y)})$$

et donc

$$\begin{aligned} Q(h) &= \frac{\|g(y + h) - g(y) - (d_{g(y)}f)^{-1}(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \|(d_{g(y)}f)^{-1}\| \frac{\|d_{g(y)}f(\omega) - f(g(y) + \omega) + f(g(y))\|}{\|h\|} \\ &\leq 2\|(d_{x_0}f)^{-1}\| \|(d_{g(y)}f)^{-1}\| \frac{\|f(g(y) + \omega) - f(g(y)) - d_{g(y)}f(\omega)\|}{\|\omega\|} \end{aligned}$$

où $\|\omega\| \leq 2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|\|h\|$ car g est $2\|(d_{x_0}f)^{-1}\|$ -Lipschitzienne. Comme f est différentiable en $g(y)$, et que $y \mapsto (d_{g(y)}f)^{-1}$ est continue (donc bornée) comme composée d'applications continue, on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h) = 0$. Comme $(d_{g(y)}f)^{-1}$ est une application linéaire continue, on en déduit que g est différentiable en y et que $Dg = \text{inv} \circ Df \circ g$. $\square$

On conclut la preuve du théorème d'inversion locale en montrant que g est aussi régulière que f . On a vu que g est différentiable sur V et donc g est C^0 sur V . Or on a $Dg = \text{inv} \circ Df \circ g$ et comme inv est C^∞ , si f est C^1 , alors Df est C^0 et par composition, Dg est C^0 , et donc g est C^1 .

De même, supposons montré que g est C^k . Si f est C^{k+1} , alors Df est C^k et donc Dg est C^k par composition d'applications C^k , et donc g est C^{k+1} . Par récurrence, on montre que g est aussi régulière que f .

REMARQUE. Dans la preuve précédente, on ne contrôle pas explicitement l'ouvert U en restriction auquel f est un difféomorphisme sur son image.

EXERCICE. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 1$.
2. Montrer que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Cela contredit-il le théorème d'inversion locale? Où la preuve précédente cesse-t-elle de fonctionner dans le cas de cette fonction f ?

Bibliographie

- [1] AVEZ, *Calcul différentiel*
- [2] M.BERGER, GOSTIAUX, *Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces*
- [3] H.CARTAN, *Cours de calcul différentiel*
- [4] J.LAFONTAINE, *Introduction aux variétés différentielles*
- [5] J.LEE, *Introduction to smooth manifolds*
- [6] J.MILNOR, *Topology from the differential view point*
- [7] L.SCHWARTZ, *Analyse II*