يوم: الثلاثاء 28 رمضان 1438 هـ

الموافق لـ: 2016/06/20

المدة: ساعة ونصف

2017 - 2016

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة والعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

فرع الرياضيات السنة الثالثة LMD (S6)

الإمتحان الإستداكي في مادة الهندسة التفاضلية

التمرين1: لنضع: $S^1 = \{(x_1,x_2) \in IR^2;\ {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\}$ ، ونعرف ما يلي:

$U_1 = S^1 - \{N\}$ حيث: $N = \{(0,1)\}$ القطب الشمالي

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow IR$$

$$(x_1,x_2) \mapsto \varphi_1(x_1,x_2) = \frac{x_1}{1-x_2}$$

$U_2 = S^1 - \{S\}$ حيث: $S = \{(0,-1)\}$ القطب الجنوبي

$$\varphi_2 : U_2 \longrightarrow IR$$

$$(x_1,x_2) \mapsto \varphi_2(x_1,x_2) = \frac{x_1}{1+x_2}$$

1. برهن أن (U_1,φ_1) و (U_2,φ_2) خريطتين من S^1.
2. لنضع $A = \{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$ ، برهن أن (S^1, A) منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل، وما هو بعدها.

التمرين2: لنضع $V = \left\{ (x,y,z) \in IR^3;\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \right\}$

1. باستعمال نظرية القيمة العادية بين أن V منوعة جزئية من IR^3، وعين بعدها.
2. عين الفضاء المماسي لـ V عند النقطة (x,y,z) (أي: $T_{(x,y,z)}V$).

التمرين3:

أ- لنضع $U = IR^3 - \{(0,0,0)\}$، وليكن f دالة معرفة على U نحو IR كما يلي:

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha}$$

و ليكن $w \in \Omega_2(IR^3)$ معرفة كما يلي: $w(x,y,z) = z\ dx \wedge dy + y\ dz \wedge dx + x\ dy \wedge dz$

1. أحسب كل من: $d\,f$ ، و $df \wedge w$ ، و dw ، و $d(\beta \wedge \alpha)$ ، ثم استنتج $d\,(fw)$.
2. أوجد قيمة لـ α حتى يكون fw شكل تفاضلي مغلق.

ب- لنعتبر الأشكال التفاضلية التالية: $\alpha(x,y,z) = 2xy^2\ dx + 2x^2\ y\ dy - 2z\ dz$

$$\beta(x,y,z) = \frac{2\ dx}{1+x^2} + \frac{z\ dy}{1+y^2z^2} + \frac{y\ dz}{1+y^2z^2}$$

أحسب كل من: $\alpha \wedge \beta$ ، و $\beta \wedge \alpha$ ، و $d\,\alpha$ ، و $d\beta$ ، و $d(\alpha \wedge \beta)$ ، و $d(\beta \wedge \alpha)$ ، و $d\alpha \wedge d\beta$ ، و $d\beta \wedge d\alpha$.

التنقيط: [التمرين1: 7 نقاط] [التمرين2: 6 نقاط] [التمرين3: 7 نقاط]

والله ولي التوفيق

حل التمرين 03 :

3

أ- لنضع $U = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ ، وليكن $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\alpha}$$

و

$$w(x,y,z) = z\, dx\wedge dy + y\, dz\wedge dx + x\, dy\wedge dz .$$

1 حساب كل من: df و $df\wedge w$ و dw واستنتاج $d(fw)$.

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dz \quad 0,5$$

$$\boxed{df(x,y,z) = \alpha\,(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}\left[2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz\right]} \quad 0,5$$

$$df(x,y,z)\wedge w(x,y,z) = 2\alpha\,(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}\left[x^2\, dx\wedge dy\wedge dz + y^2\, dy\wedge dz\wedge dx + z^2\, dz\wedge dx\wedge dy\right] = 2\alpha\,(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}(x^2+y^2+z^2)\, dx\wedge dy\wedge dz$$

$$\boxed{df(x,y,z)\wedge w(x,y,z) = 2\alpha\,(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}\, dx\wedge dy\wedge dz} \quad 0,5$$

$$dw(x,y,z) = dz\wedge dx\wedge dy + dy\wedge dz\wedge dx + dx\wedge dy\wedge dz .$$

$$\boxed{dw(x,y,z) = 3\, dx\wedge dy\wedge dz} \quad 0,5$$

$$d(fw) = df\wedge w + f\, dw . \quad 0,5$$

$$d[fw(x,y,z)] = 2\alpha\,(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}\, dx\wedge dy\wedge dz + 3(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}\, dx\wedge dy\wedge dz .$$

$$\boxed{d[fw(x,y,z)] = (2\alpha+3)\,(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}\, dx\wedge dy\wedge dz} \quad 0,5$$

2 إيجاد قيمة α حتى يكون fw شكل تفاضلي مغلق.

0,5 0,5

(fw شكل تفاضلي مغلق) $\Leftrightarrow \left(d(fw) = 0\right) \Leftrightarrow (2\alpha+3=0) \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\frac{3}{2}}$

ب- لنعتبر:

$$\alpha(x,y,z) = 2xy^2\, dx + 2x^2y\, dy - 2z\, dz .$$

$$\beta(x,y,z) = \frac{2}{1+x^2}\, dx + \frac{z}{1+y^2z^2}\, dy + \frac{y}{1+y^2z^2}\, dz .$$

$$\alpha\wedge\beta(x,y,z) = \frac{2xy^2z}{1+y^2z^2}\, dx\wedge dy + \frac{2xy^3}{1+y^2z^2}\, dx\wedge dz + \frac{4x^2y}{1+x^2}\, dy\wedge dx + \frac{2x^2y^2}{1+y^2z^2}\, dy\wedge dz - \frac{4z}{1+x^2}\, dz\wedge dx - \frac{2z^2}{1+y^2z^2}\, dz\wedge dy .$$

0,5

$$\alpha\wedge\beta(x,y,z) = \left[\frac{2xy^2z}{1+y^2z^2} - \frac{4x^2y}{1+x^2}\right] dx\wedge dy + \left[\frac{2xy^3}{1+y^2z^2} + \frac{4z}{1+x^2}\right] dx\wedge dz + \left[\frac{2x^2y^2 + 2z^2}{[illegible]}\right] dy\wedge dz$$

0,5 — $\dim V = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathbb{R} = 2$.

ج) من أجل كل $(x,y,z) \in V$. إيجاد $T_{(x,y,z)}V$ ؟

0,1 — $T_{(x,y,z)}V = \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)}$

$\Rightarrow T_{(x,y,z)}V = \{ (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3 . \ df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3) = 0 \}$.

0,1 — $T_{(x,y,z)}V = \{ (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} h_1 + \frac{2y}{9} h_2 + 2z h_3 = 0 \}$.

حل التمرين 02 : لنضع $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1\right\}$

1) البرهان أن V منوعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ و تعيين بعدها ؟

$\boxed{3}$

(0,5) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 \end{cases}$

(0,5) $V=f^{-1}(\{1\})$.

(0,25) يكفي أن نبرهن أن 1 قيمة عادية لـ f

(0,25) f كثير حدود $\Leftarrow$ f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^3$

(0,25) $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ $\quad df_{(x,y,z)}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(h_1,h_2,h_3)\longmapsto df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3)$.

$df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3)=\frac{x}{2}h_1+\frac{2y}{9}h_2+2z\,h_3$

(0,25) لا بد أن نبرهن أنه من أجل كل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ التطبيق $df_{(x,y,z)}$ غامر من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}$

ط1) استعمال التعريف: من أجل كل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ نبرهن

(0,25) $\forall \alpha\in\mathbb{R},\ \exists h=(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3 : df_{(x,y,z)}(h)=\alpha$? $\quad\boxed{1,5}$

(0,25) $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\}) \iff \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$.

$\iff \frac{x^2\alpha}{4}+\frac{y^2\alpha}{9}+z^2\alpha=\alpha \iff \frac{x}{2}\left(\frac{x\alpha}{2}\right)+\frac{2y}{9}\left(\frac{y\alpha}{2}\right)+2z\left(\frac{z\alpha}{2}\right)=\alpha$

$\iff df_{(x,y,z)}\left(\frac{x\alpha}{2},\frac{y\alpha}{2},\frac{z\alpha}{2}\right)=\alpha$.

(0,25) يكفي أخذ $h=\left(\frac{\alpha x}{2},\frac{\alpha y}{2},\frac{\alpha z}{2}\right)$

ط2) لنبرهن أنه من أجل كل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ $\quad \dim \operatorname{Im} df_{(x,y,z)}=1$

(0,25) يكفي أن نبرهن أن $\forall (x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})\ \dim \operatorname{Im} df_{(x,y,z)}\neq 0$

(0,25) من أجل ذلك نبرهن أنه من أجل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ فإن $df_{(x,y,z)}\neq 0$

(0,25) بالعكس النقيض نبرهن أن $(x,y,z)\notin f^{-1}(\{1\})$. فإن $df_{(x,y,z)}=0$

(0,25) $df_{(x,y,z)}=0 \iff df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3)=0,\ \forall (h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3$.

$\iff \frac{x}{2}h_1+\frac{2y}{9}h_2+2z\,h_3=0,\ \forall (h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3$

$\iff x=0 \wedge y=0 \wedge z=0$

(0,25) $\Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=0\neq 1 \Rightarrow (x,y,z)\notin f^{-1}(\{1\})$.

وهو المطلوب

(0,5) $\dim V=\dim\mathbb{R}^3-\dim\mathbb{R}=2$.

(1) $T_{(x,y,z)}V=\operatorname{Ker} df_{(x,y,z)}=\left\{(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x}{2}h_1+\frac{2y}{9}h_2+2z\,h_3=0\right\}$

[illegible] 03

4

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^\alpha .$$
$$w(x,y,z) = z\, dx\wedge dy + y\, dz\wedge dy + x\, dy\wedge dz .$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$ 0,5

$$df(x,y,z) = 2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}\left[x\,dx + y\,dy + z\,dz\right]$$ 0,5

$$(df\wedge w)(x,y,z) = 2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha} dx\wedge dy\wedge dz$$ 0,5

$$dw(x,y,z) = 3\, dx\wedge dy\wedge dz$$ 0,5

$$d(fw) = df\wedge w + f\,dw .$$ 0,5

$$d\left[fw(x,y,z)\right] = (2\alpha+3)(x^2+y^2+z^2)\, dx\wedge dy\wedge dz$$ 0,5

$d(fw) = 0 .$ $\Leftarrow$ ([illegible] fw) 0,5

$$\alpha = -\frac{3}{2}$$ 0,5

---

3 ب

$$\alpha(x,y,z) = 2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy - 2z\,dz .$$
$$\beta(x,y,z) = \frac{2}{1+x^2}dx + \frac{z}{1+y^2z^2}dy + \frac{y}{1+y^2z^2}dz .$$

0,5

$$\alpha\wedge\beta(x,y,z) = \left[\frac{2xy^2z}{1+y^2z^2} - \frac{4x^2y}{1+x^2}\right]dx\wedge dy + \left[\frac{2xy^3}{1+y^2z^2} + \frac{4z}{1+x^2}\right]dx\wedge dz + \left[\frac{2x^2y^2+2z^2}{1+y^2z^2}\right]dy\wedge dz$$

$$\beta\wedge\alpha = (-1)^{1\times 1}\alpha\wedge\beta = -\alpha\wedge\beta$$ 0,25

$$d\alpha = da_1\wedge dx + da_2\wedge dy + da_3\wedge dz .$$ 0,25

$$\begin{matrix} d\alpha \\ d\beta \end{matrix} = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial z}\right)dx\wedge dz + \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)dy\wedge dz$$ 0,25

$$d\alpha = (4xy - 4xy)\,dx\wedge dy \rightarrow \quad d\alpha = 0$$ 0,25

$$d\beta = \left[\frac{1-y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2} - \frac{1-y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2}\right]dy\wedge dz \qquad d\beta = 0$$ 0,25

0,25

$$d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^1\alpha\wedge d\beta \Rightarrow \quad d(\alpha\wedge\beta) = 0$$ 0,25

$$d(\beta\wedge\alpha) = -d(\alpha\wedge\beta) = 0$$ 0,25

$$d\alpha\wedge d\beta = 0$$ 0,25

$$d\beta\wedge d\alpha = 0$$ 0,25