Cours 20

تمارين

(3) $(df_1\wedge\dots\wedge df_n)_x = \frac{\partial(f_1\dots f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$

حيث: المحدد اليعقوبي لـ $f=(f_1,\dots,f_n)$.

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)(x)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = \det\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)\right] = (df)_x \quad 1\leq j,k\leq n.$$

حيث $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$x \longmapsto f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$.

ملاحظة: $f\in C^1$ ، $f\in\Omega_0(U)$.

$f: U\longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow df: U\longrightarrow \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = L^1_a(E^*)$

$x\longmapsto f(x)$ $\quad x\longmapsto (df)_x = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx_j$

$\Rightarrow df\in\Omega_1(U)$.

$d: \Omega_0(U)\longrightarrow\Omega_1(U)$.

$f\longmapsto df$

5.5.3 عمليات التفاضل الخارجية

تم رسمها في إطار البعد المنتهي.

1.6.3 تعريف: ليكن U مفتوحاً من E فضاء شعاعي بعد منتهٍ n.

ليكن $w\in\Omega_p^{(1)}(U)$

$$w=\sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} c_{i_1\dots i_p}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p},$$

بحيث $c_{i_1\dots i_p}: U\longrightarrow\mathbb{R}$ من صنف C^1 على U.

$x\longmapsto c_{i_1\dots i_p}(x)$

نعرف الشكل التفاضلي $dw\in\Omega_{p+1}^{(0)}(U)$

$$dw=\sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n}(dc_{i_1\dots i_p})\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}.$$

$$d: \Omega_p^{(1)}(U)\longrightarrow\Omega_{p+1}^{(0)}(U)$$

2.5.5.3 مثال: $w\in\Omega_1(U)$: $w=a\,dx_1+b\,dx_2+c\,dx_3$, $U\subseteq\mathbb{R}^3$

$dw = da\wedge dx_1+db\wedge dx_2+dc\wedge dx_3$.

$a,b,c: U\longrightarrow\mathbb{R}\in C^1$

$da=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial a}{\partial x_j}dx_j=\frac{\partial a}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial a}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial a}{\partial x_3}dx_3$

$db=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial b}{\partial x_j}dx_j=\frac{\partial b}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial b}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial b}{\partial x_3}dx_3$

$dc=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial c}{\partial x_j}dx_j=\frac{\partial c}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial c}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial c}{\partial x_3}dx_3$

$$dw=\left[\frac{\partial b}{\partial x_1}-\frac{\partial a}{\partial x_2}\right]dx_1\wedge dx_2+\left[\frac{\partial c}{\partial x_2}-\frac{\partial b}{\partial x_3}\right]dx_2\wedge dx_3$$
$$+\left[\frac{\partial c}{\partial x_1}-\frac{\partial a}{\partial x_3}\right]dx_1\wedge dx_3$$

3.5.5.3 نظرية: خواص التفاضل الخارجي ($U\subset E$ plein $E=n$)

(1) $w\in\Omega_p(U)$ ، ضمنياً $w\in C^1$ و $\eta\in\Omega_p(U)$

$\lambda,\mu\in\mathbb{R}\Rightarrow d(\lambda w+\mu\eta)=\lambda\,dw+\mu\,d\eta$

(2) ليكن f دالة $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ من صنف C^1.

$d(fw)=df\wedge w+f\,dw$.

(3) $d(w\wedge\eta)=dw\wedge\eta+(-1)^p w\wedge d\eta$

$w\in\Omega_p(U)$ ، $\eta\in\Omega_q(U)$.

(4) في حالة: $w=df_1\wedge\dots\wedge df_p$ ،

$\Rightarrow dw=0$

$f_j: U\longrightarrow\mathbb{R}$ من صنف C^2.

البرهان: (1): واضح.

(2) $w\in\Omega_p(U)$: $w=\sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} c_{i_1\dots i_p}\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}$

$\eta\in\Omega_q(U)$: $\eta=\sum_{1\leq j_1<\dots<j_q\leq n} g_{j_1\dots j_q}\,dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}$

يكفي أن نبرهن الحالة الخاصة

$w=c\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}$ $\quad c:U\longrightarrow\mathbb{R}$.

$\eta=g\,dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}$ $\quad g:U\longrightarrow\mathbb{R}$.

$(w\wedge\eta)=c.g\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}$

$d(w\wedge\eta)=d(cg)\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}$

حسب قاعدة لَيبنيز

$d(cg)=dc.g+dg.c$

$d(w\wedge\eta)=(dc.g+dg.c)\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}$

$$d(w\wedge\eta)=\underbrace{dc\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}}_{dw}\wedge\underbrace{g\,dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}}_{\eta}$$
$$+\,c\,\underbrace{dg}_{\in\Omega_1(U)}\wedge\underbrace{dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}}_{\in\Omega_p(U)}\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}$$

$$d(w\wedge\eta)=dw\wedge\eta+(-1)^p\underbrace{c\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}}_{w}\wedge\underbrace{dg\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}}_{d\eta}$$

$d(w\wedge\eta)=dw\wedge\eta+(-1)^p w\wedge d\eta$.

(3) ليكن $w\in\Omega_p(U)$ ، و $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ من صنف C^1.

لنبرهن أن $f.w=f\wedge w$.

$$fw=\sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n}(f.c_{i_1\dots i_p})\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}$$

$\Rightarrow f.w=f\wedge w$.

من الخاصية 2: $d(f\wedge w)=df\wedge w+(-1)^0 f\wedge dw$

$d(fw)=df\wedge w+f\,dw$.

(4) لنبرهن بالتراجع:

الشرط الأول يتحقق لدينا: $p=1$ ، $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ من صنف C^2.

لنضع $w=df$.

$$w=df=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \in\Omega_1(U)$$

$$\boxed{dw=d(df)=\sum_{j=1}^{n}d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\wedge dx_j} \quad -(1)$$

Séance 12

3.9. الأشكال التفاضلية على م.ط.ق.ت.

1.9.3 تعريف: لتكن M م.ط.ق.ت.

لنضع:

$$\Lambda^p(T^*M) = \bigcup_{x\in M}\left(\Lambda^p(T^*_xM)\right)$$

[هذه الكتابة اختصار: $T^*M=(TM)^*$ ، $T^*_xM=(T_xM)^*$]

$\Lambda^p(T^*M)$ حسب ما سبق هو عبارة عن م.ط.ق.ت.

نسمي شكل تفاضلي من الرتبة p (p-تفاضلي) كل تطبيق قابل للتفاضل:

$$w: M \longrightarrow \Lambda^p(T^*M).$$

بحيث:

$$x \longmapsto w(x)\in\Lambda^p(T^*_xM)$$

$$w(x): (T_xM)^p = \underbrace{T_xM\times\dots\times T_xM}_{p\ \text{مرة}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

مهما يكن $x\in M$

حيث $w(x)$ تطبيق p-خطي متناوب على T_xM

نرمز بـ $\Omega_p(M)$ للأشكال التفاضلية من الرتبة p

$$\Omega_p(M)=\{w: M\to\Lambda^p(T^*M);\ w(x)\in\Lambda^p(T^*_xM)\ \ \forall x\in M\}$$

2.9.3 مثال: ليكن التطبيق $f: M\to\mathbb{R}$ قابل للتفاضل على M ومنه يوجد التطبيق

$$df: M\to\Lambda^p(T^*M)\quad ,\ p=1$$

$$x\mapsto df(x)\in\Lambda^1(T^*_xM)\subset\Lambda^1(T^*M)$$

$df(x): T_xM\to\mathbb{R}$ و $df(x)$ خطي

8.3 الشكل التفاضلي φ^*w

[عملية المناقلة أو عملية تبديل المتغير].

[Transposition ou changement de variable].

1.8.3 تعريف: لتكن M و N م.ط.ق.ت. والتطبيق $\varphi: M\to N$ قابل للتفاضل.

نعرف التطبيق الآتي: $\varphi^*: \Omega_p(N)\to\Omega_p(M)$.

$$w\longmapsto\varphi^*w\in\Omega_p(M).$$

$$(\varphi^*w)(x)(h_1,\dots,h_p)=w(\varphi(x))(d\varphi(x)h_1,\dots,d\varphi(x)h_p)$$

$\forall x\in M$ ، $\forall h_i\in T_xM$ ، $\forall i=\overline{1,p}$.

$$\varphi: M\to N \Rightarrow d\varphi(x): T_xM\to T_{\varphi(x)}N.$$

$x\mapsto\varphi(x)\in N$ ، $h_i\longmapsto d\varphi(x)h_i\in T_{\varphi(x)}N$

في الحالة الخاصة: $p=0$: لنضع $f\in\Omega_0(N)$

$f: N\to\mathbb{R}$ ، $\varphi: M\to N$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "f\circ\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

: $f\circ\varphi: M\to\mathbb{R}$.

$(\varphi^*f)=f\circ\varphi\in$

2.8.3 لازمة: [خواص العملية φ^*]

① φ^* عملية خطية أي: $w,\eta\in\Omega_p(N)$. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\varphi^*(\alpha w+\beta\eta)=\alpha(\varphi^*w)+\beta(\varphi^*\eta)$$

② φ^* تحافظ على الجداء الخارجي:

$w\in\Omega_p(N),\ \eta\in\Omega_q(N)$: $\varphi^*(w\wedge\eta)=\varphi^*w\wedge\varphi^*\eta$

حالة خاصة: $w\in\Omega_p(N)$ و $f\in\Omega_0(N)$ أي $f: N\to\mathbb{R}$:

$$\varphi^*(fw)=(\varphi^*f)(\varphi^*w).$$

3.8.3 نوطات: U مفتوح في $\mathbb{R}^n$ و V مفتوح في $\mathbb{R}^m$

$\varphi: V\to U$ قابلة للتفاضل على V.

$f: U\to\mathbb{R}$ قابل للتفاضل على U.

إذن: $\varphi^*(df)=d(\varphi^*f)$.

البرهان: كتمرين

4.8.3 ملاحظة: على وجه الخصوص لما $f=e_i^*$

لنعتبر التطبيق

$$e_i^*: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$$x\longmapsto e_i^*(x)=x_i \qquad \left[x=\sum_{i=1}^n x_ie_i\right].$$

لدينا $d(e_i^*)(x)=dx_i=e_i^*$ ، $\forall x\in\mathbb{R}$

لنأخذ التطبيق $\varphi: V\to U$

$$\varphi^*(de_i^*)=d(\varphi^*e_i^*)=d(e_i^*\circ\varphi)=d\varphi_i$$

حيث: $\varphi: V\subset\mathbb{R}^m\to U\subset\mathbb{R}^n$

$$y\longmapsto\varphi(y)=(\varphi_1(y),\dots,\varphi_i(y),\dots,\varphi_n(y))$$

إذن: $\boxed{\varphi^*(dx_i)=d\varphi_i=\varphi^*(de_i^*)}$

5.8.3 كتابة φ^*w لما $w\in\Omega_p(U)$ في إطار البعد المنتهي

$w\in\Omega_p(U)$ بحيث $U\subset E$ و $\dim E=n$ و $V\subset F$ و $\dim F=m$ ولنضع: $\varphi: V\to U$ من صنف C^{k+1}

تعلمون أن w يكتب بصفة وحيدة على الشكل:

$$w=\sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} c_{i_1\dots i_p}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}.$$

حيث $c_{i_1\dots i_p}: U\to\mathbb{R}$ من صنف k.

$$\varphi^*w=\sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n}(c_{i_1\dots i_p}\circ\varphi)\, d\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge d\varphi_{i_p}$$

6.8.3 مثال: $V=]a,b[\subset\mathbb{R}$. $n=3$. $U\subset\mathbb{R}^3$, $p=1$

$$w\in\Omega_1(U)\Rightarrow w=\alpha\, dx_1+\beta\, dx_2+\gamma\, dx_3.$$

حيث α و β و γ دوال معرفة: $\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\varphi:]a,b[\longrightarrow U,\qquad t\longmapsto\varphi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \varphi_3(t)\end{pmatrix}$$

$$d\varphi_i(t)=\frac{\partial\varphi_i(t)}{\partial t}dt \Rightarrow d\varphi_i(t)=\varphi_i'(t)\,dt. \quad (i=\overline{1,3})$$

$$(\varphi^*w)(t)=(\alpha\circ\varphi)(t)\varphi_1'(t)\,dt+(\beta\circ\varphi)(t)\varphi_2'(t)\,dt+(\gamma\circ\varphi)(t)\varphi_3'(t)$$

$$\boxed{(\varphi^*w)(t)=[\alpha[\varphi(t)]\varphi_1'(t)+\beta[\varphi(t)]\varphi_2'(t)+\gamma(\varphi(t))\varphi_3'(t)]\,dt}$$

7.8.3 الحالة لما $p=m$: $\varphi: V\subset\mathbb{R}^m\to U\subset\mathbb{R}^n$

لما $p=m$ و $\varphi^*w\in\Omega(V)$ ومنه $\varphi^*w=\lambda\, dy_1\wedge\dots\wedge dy_m$

حيث:

$$\varphi^*w=\left[\sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n}(c_{i_1\dots i_p}\circ\varphi)\frac{\partial(\varphi_{i_1}\dots\varphi_{i_p})}{\partial(y_1\dots y_m)}\right]dy_1\wedge\dots\wedge dy_m$$

حيث $C_{i_1\dots i_p} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ مرفوعة $\mathbb{R}$.

$$\varphi^* w = \varphi^*\Big[\sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} C_{i_1\dots i_p}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\Big] \qquad \varphi^* dx_i = d\varphi_i$$

$$\boxed{\varphi^* w = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} (C_{i_1\dots i_p}\circ\varphi)\, d\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge d\varphi_{i_p}}$$

6.8.3 مثال $p=1$

$U' =]a,b[\subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^3$

$w \in \Omega_1(U)$,

$w = \alpha\, dx_1 + \beta\, dx_2 + \gamma\, dx_3$.

$\alpha, \beta, \gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\varphi :]a,b[\longrightarrow U$.

$$t \longmapsto \varphi(t) = \begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \varphi_3(t)\end{bmatrix}.$$

$(d\varphi_i)_t = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t)\, dt$

$\Rightarrow (d\varphi_i)_t = \varphi_i'(t)\, dt$. $i = \overline{1,3}$.

$(\varphi^* w)_t = (\alpha\circ\varphi)(t)\,\varphi_1'(t)\, dt +$
$+ (\beta\circ\varphi)(t)\,\varphi_2'(t)\, dt +$
$+ (\gamma\circ\varphi)(t)\,\varphi_3'(t)\, dt$.

$$\boxed{(\varphi^* w)_t = \big[\alpha(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \beta(\varphi(t))\varphi_2'(t) + \gamma(\varphi(t))\varphi_3'(t)\big]\, dt}$$

7.8.3 في الحالة الخاصة لما $p = m$.

$\varphi : U' \longrightarrow U$. : $U' \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$

$\varphi^* w \in \Omega_p(U')$. لما $p = m$

$\varphi^* w = \lambda\, dy_1\wedge\dots\wedge dy_m$,

$\lambda : U' \longrightarrow \mathbb{R}$ ونجد أن

$$\underbrace{d\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge d\varphi_{i_m}}_{\in\Omega_m(U)} = \frac{\partial(\varphi_{i_1}\dots\varphi_{i_m})}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\, dy_1\wedge\dots\wedge dy_m$$

$$\varphi^* w = \Big(\sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le m} (C_{i_1\dots i_p}\circ\varphi)\,\frac{\partial(\varphi_{i_1}\dots\varphi_{i_p})}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\Big)\, dy_1\wedge\dots\wedge dy_m$$

8.8.3 مثال: $U' =]a,b[\subset \mathbb{R}$ و $U \subset \mathbb{R}^n$

$\gamma :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^n$.

$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{bmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots\\ \gamma_n(t)\end{bmatrix}.$$

cours 27

3.8.2 لازمة [خواص العملية φ^*]

① φ^* عملية خطية أي

$w, \eta \in \Omega_r(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi^*(w + \eta) = \varphi^* w + \varphi^* \eta$.

$\varphi^*(\lambda w) = \lambda\, \varphi^*(w)$.

② φ^* تحافظ على الجداء الخارجي:

$w_1 \in \Omega_{r_1}(M)$, $w_2 \in \Omega_{r_2}(M)$.

$\varphi^*(w_1\wedge w_2) = \varphi^* w_1 \wedge \varphi^* w_2$.

حالة خاصة: $(f \in \Omega_0(M))$ $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$

$\varphi^*(f w) = (\varphi^* f)(\varphi^* w)$.

3.8.3 توطئة: U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و U' مفتوح من $\mathbb{R}^m$

$\varphi : U' \longrightarrow U$ قابلة للتفاضل على U'،

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة للتفاضل على U.

إذن $\varphi^*(df) = d(\varphi^* f)$.

البرهان: كتمرين.

3.8.4 ملاحظة: على وجه الخصوص

لو نعتبر التطبيق $e_i^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

$x \longmapsto e_i^*(x) = x_i$

لدينا

$$\begin{cases} d(e_i^*)_x = dx_i = e_i^* \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

لنأخذ $\varphi : U' \longrightarrow U$

$\varphi^*(de_i^*) = d(\varphi^* e_i^*) = d(e_i^*\circ\varphi)$

$\varphi : U' \xrightarrow{\varphi} U \subset \mathbb{R}^n$

$$y \longmapsto \varphi(y) = \begin{bmatrix}\varphi_1(y)\\ \varphi_2(y)\end{bmatrix}.$$

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "e_i^*\circ\varphi"'] & \varphi(y) \arrow[d, "e_i^*"] \\ & \varphi_i(y) \end{tikzcd}$$

$\varphi_i : U' \longrightarrow \mathbb{R}$.

$y \longmapsto \varphi_i(y) = (e_i^*\circ\varphi)(y)$.

$i = \overline{1,n}$.

$$\boxed{\varphi^*(dx_i) = d\varphi_i = \varphi^*(dx_i^*)}$$ إذن

5.8.3 كتابة φ^* لما $w \in \Omega_p(U)$ في إطار المعلم القانوني

لنأخذ $w \in \Omega_p(U)$ بحيث $U \in E$, $\dim E = n$, $U \subset E$

$\varphi : U' \longrightarrow U$ مع $\dim E' = m$. C^k

نعلم أن w يكتب بصفة وحيدة على الشكل

$$w = \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_p\le n} C_{i_1\dots i_p}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ j=\overline{1,n}$$

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) dx_k$$

$$\boxed{d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} dx_k} \ (1)$$

بتعويض (2) في (1) نجد

$$dw = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} dx_k\right) \wedge dx_j$$

$$dw = \sum_{1\leq j,k\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j$$

$$= \sum_{1\leq j<k\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j + \cancel{\sum_{1\leq j=k\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j}^{\,0} + \sum_{1\leq k<j\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j .$$

حسب نظرية شوارتز Shwartz
$f\in C^2 \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} . \quad dx_k\wedge dx_j = - dx_j \wedge dx_k$$

$$dw = \cancel{\sum_{1\leq j<k\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} dx_k\wedge dx_j} - \cancel{\sum_{1\leq k<j\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \wedge dx_k}$$

$\Rightarrow dw = 0$.

لنفرض أن الخاصية صحيحة في الرتبة (p-1) ولنبرهن صحتها لأجل الرتبة p . أي نفرض أنه

$d(df_1\wedge\ldots\wedge df_k) = 0 . \quad \forall\, k=\overline{1,p-1}$.

ولنبرهن أن

$d(df_1\wedge\ldots\wedge df_p) = 0$?

$d(df_1\wedge\ldots\wedge df_{p-1}\wedge df_p) = d(\theta\wedge df_p)$

نضع
$[\theta = df_1\wedge\ldots\wedge df_{p-1}$.

حسب ③ لدينا

$$dw = d(\theta\wedge df_p) = \underbrace{d\theta}_{0}\wedge df_p + (-1)^{p-1}\theta\wedge \underbrace{d(df_p)}_{0}$$

$\Rightarrow dw = 0$.

6.5.3 الشكل التفاضلي المغلق والدقيق

1.6.5.3 تعاريف :

ليكن $w\in\Omega_p(U)$.

① نقول أن w شكل تفاضلي مغلق (fermée) إذا كان لدينا $dw = 0$.

② نقول أن w شكل تفاضلي دقيق (Exacte) إذا وجد $\eta\in\Omega_{p-1}(U)$ بحيث $d\eta = w$.

2.6.5.3 قضية

$$\boxed{\text{كل شكل تفاضلي دقيق هو شكل مغلق}}$$

البرهان: $U\subset E$ مفتوح و $w\in\Omega_p(U)$

بما أن w دقيق إذن يوجد شكل تفاضلي $\eta\in\Omega_{p-1}(U)$ بحيث $w = d\eta$

$. dw = d(d\eta) = 0$.

البرهان:

$$\eta\in\Omega_{p-1}(U) \Rightarrow \eta = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{p-1}\leq n} c_{i_1\ldots i_{p-1}}\, dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{p-1}}$$

$$\Rightarrow d\eta = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{p-1}\leq n} d(c_{i_1\ldots i_{p-1}})\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{p-1}}$$

حسب النظرية السابقة 3.5.5.3 ④

$$\Rightarrow d(dc_{i_1\ldots i_{p-1}}\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{p-1}}) = 0$$

$\Rightarrow dw = d(d\eta) = 0 \Rightarrow$ w مغلق

3.6.3 مثال

ليكن $w\in\Omega_1(\mathbb{R}^3)$.

$w_{(x,y,z)} = x\,dx + y\,dy + z\,dz$.

$dw_{(x,y,z)} = d[x\,dx + y\,dy + z\,dz]$

$dw_{(x,y,z)} = dx\wedge dx + dy\wedge dy + dz\wedge dz = 0$

w شكل مغلق

وكذلك w شكل دقيق (ذلك أن:

$\eta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\eta_{(x,y,z)} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$, $\eta\in\Omega_0(\mathbb{R}^3)$.

$d\eta_{(x,y,z)} = x\,dx + y\,dy + z\,dz$.

4.6.3 ملاحظة :

شكل دقيق $\Longrightarrow$ شكل مغلق .

$\not\Longleftarrow$

[إلا في حالة خاصة وهي تتمثل في هندسة المفتوح]

5.6.3 نظرية بوان كاري Théorème de Poincaré

1.5.6.3 تعريف القطعة المستقيمة في $\mathbb{R}^n$

ليكن $a,b\in\mathbb{R}^n$

$[a,b] = \{y\in\mathbb{R}^n, \exists t\in[0,1], y=(1-t)a+tb\}$.

$[a,b]$ هي القطعة المستقيمة في $\mathbb{R}^n$ مبدأها a وطرفها b

2.5.6.3 تعريف مفتوح نجمي بالنسبة لنقطة x_0

U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و $x_0\in U$.

نقول أن U نجمي بالنسبة لـ x_0 إذا كان لدينا ،

$\forall x\in U , \quad [x_0,x]\subset U$.

* كل مفتوح محدب في $\mathbb{R}^n$ هو نجمي بالنسبة لجميع نقاطه .

3.5.6.3 نص النظرية :

ليكن U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ نجمي في نقطة من نقاطه . ليكن $w\in\Omega_p(U)$ مغلق ($dw=0$)

إذن w شكل دقيق في U أي:

$\exists\, \eta\in\Omega_{p-1}(U) , \quad w = d\eta$

البرهان :

3.8.4 علاقة الترتيب بين φ و ψ

<u>نظرية</u>:

$$\varphi : U' \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n .$$

$$\psi : \hat{U} \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$$

$$\varphi \circ \psi : \hat{U} \longrightarrow U .$$

إذن من أجل كل $w \in \Omega_p(U)$:

$$(\varphi \circ \psi)^* w = \psi^* (\varphi^* w) .$$

ومنه

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^* .$$

<u>البرهان</u>:

$\forall\, \xi_1, \dots, \xi_p \in \mathbb{R}^n ,\ z \in U'$

$$[(\varphi \circ \psi)^* w(z)](\xi_1, \dots, \xi_r) .$$

$$= w[(\varphi \circ \psi)(z)]\,[(\varphi \circ \psi)'(z)\xi_1, \dots, (\varphi \circ \psi)'(z)\xi_r]$$

$$= w[\varphi(\psi(z))]\,[\varphi'(\psi(z))\psi'(z)\xi_1, \dots, \varphi'(\psi(z))\psi'(z)\xi_r]$$

$$= (\varphi^* w)(\psi(z))\,[\psi'(z)\xi_1, \dots, \psi'(z)\xi_p] .$$

$$= \psi^* (\varphi^* w)_z (\xi_1, \dots, \xi_p)$$