01

الفصل الثالث: الأشكال التفاضلية على منوعة طبولوجية قابل للتفاضل

1.3: الأشكال المتعددة الخطية

Les formes multilineaires

نعتبر $p\in\mathbb{N}^*$ و E ف.ش على $\mathbb{R}$ ونعتبر التطبيق f.

$$f: E^p=\underbrace{E\times\dots\times E}_{p \text{ مرة}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1,\dots,x_p)\longmapsto f(x_1,\dots,x_p).$$

ونعتبر التطبيق:

$$\forall j=\overline{1,p}: g_j: E\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x_j\longmapsto g_j(x_j)=f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_p).$$

1.1.3 تعريف:

نقول أن f p-خطي على E إذا كانت من أجل كل $j=\overline{1,p}$ التطبيقات g_j خطية أي: من أجل كل $j=\overline{1,p}$

$$\forall x_j^1,x_j^2\in E,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:$$

$$g_j(\alpha x_j^1+\beta x_j^2)=\alpha g_j(x_j^1)+\beta g_j(x_j^2).$$

توضيح التعريف: ومنه f p-خطي على E إذا كان خطيا بالنسبة لكل مركبة x_j بمعنى $j=\overline{1,p}$ أي:

$$\forall j=\overline{1,p},\ \forall x_j^1,x_j^2\in E,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

$$f(x_1,\dots,x_{j-1},\alpha x_j^1+\beta x_j^2,x_{j+1},\dots,x_p)=$$

$$=\alpha f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j^1,x_{j+1},\dots,x_p)+\beta f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j^2,x_{j+1},\dots,x_p)$$

2.1.3 أمثلة:

1] $E=\mathbb{R}^n$ و $p=2$.

$$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$(u,v)\longmapsto f(u,v)=\sum_{k=1}^{n} u_k v_k.$$

حيث: $u=(u_1,\dots,u_n),\ v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$

bilinéaire

f يمثل الجداء السلمي في $\mathbb{R}^n$. f ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^n$

2] ليكن E ف.ش على $\mathbb{R}$ و f تطبيق خطي من E في $\mathbb{R}$

$f: E\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)$

إذن f 1-خطي على E.

3] لدينا E ف.ش على $\mathbb{R}$ و h و g تطبيقين خطيين معرفين من E في $\mathbb{R}$: $g:E\to\mathbb{R}$, $h:E\to\mathbb{R}$

نعرف التطبيق

$$f:E\times E\longrightarrow\mathbb{R}.$$

$$(x,y)\longmapsto f(x,y)=g(x).h(y).$$

إذن f 2-خطي على E

نرمز بـ $f(x,y)=g\otimes h(x,y)=g(x)h(y)$ ويسمى بالجداء الموتري بين g و h

تعميم: ويمكننا تعميم ذلك كما يلي

ليكن g_i تطبيق خطي على E $(i=\overline{1,p})$.

$$g=g_1\otimes\dots\otimes g_p: E^p\longrightarrow\mathbb{R}.$$

$$(x_1,\dots,x_p)\longmapsto g(x_1,\dots,x_p)$$

$$g(x_1,\dots,x_p)=g_1\otimes\dots\otimes g_p(x_1,\dots,x_p)=g_1(x_1)\times\dots\times g_p(x_p)$$

g p-خطية على E.

3.1.3: تعريف فضاء:

نرمز بـ $L^p(E)$ للأشكال p-خطية على E.

ولدينا $L^p(E)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

2.3: الأشكال المتعددة الخطية المتناوبة

1.2.3 تعريف: $f:E^p\to\mathbb{R}$ حيث $f\in L^p(E)$

أي أن f p خطية على E

نقول أن f متناوب إذا تحقق الشرط:

$$\forall j=\overline{1,p-1},\ x_j=x_{j+1}\Rightarrow f(x_1,\dots,x_j,x_{j+1},\dots,x_p)=0$$

نرمز بـ $L_a^p(E)$ لفضاء الأشكال p-خطية المتناوبة على E.

وفي حالة كون E ذو بعد منته نستعمل الرمز $\Lambda^p(E^*)$

2.2.3 مثال: $E=\mathbb{R}^n$ و $p=n$.

$$f:\overbrace{\mathbb{R}^n\times\dots\times\mathbb{R}^n}^{n \text{ مرة}}\longrightarrow\mathbb{R}.$$

$$(A_1,\dots,A_n)\longmapsto f(A_1,\dots,A_n)=\det[A_1\dots A_n]$$

f p-خطية متناوبة على $\mathbb{R}^n$.

3.2.3 خواص:

$L_a^p(E)$ هو فضاء شعاعي جزئي من $L^p(E)$ ومنه.

$$\forall f,g\in L_a^p(E),\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

① $f+g\in L_a^p(E)$

② $\lambda f\in L_a^p(E)$

4.2.3: تذكير حول زمرة التبديلات لـ p عنصر

groupe de permutation de p éléments

ليكن $p\in\mathbb{N}^*$ و $I_p=\{1,\dots,p\}$. نرمز لـ S_p لمجموعة التبديلات لـ p عنصر. معرفة كما يلي:

$$S_p=\{\sigma: I_p\to I_p,\ \sigma \text{ تقابل من } I_p \text{ في } I_p\}.$$

$$\text{Card } S_p=p!$$

لدينا

و $(S_p,\circ)$ زمرة التبديلات ($\circ$ عملية تركيب التطبيقات)

[عادة نكتب $\sigma\circ\tau=\sigma.\tau$].

المناقلة: transposition

لتكن $\tau\in S_p$ تسمى مناقلة إذا كان لدينا

$$\exists i,j\in I_p:\ \begin{cases}\tau(i)=j\\ \tau(j)=i\\ \tau(k)=k,\ \forall k\in I_p-\{i,j\}.\end{cases}$$

نظرية (الجبر)

كل تبديلة $\sigma\in S_p$ هي نتيجة عملية تركيب عدد منته من المناقلات.

$$\forall\sigma\in S_p,\ \exists q\in\mathbb{N}^*,\ \sigma=\tau_1.\tau_2\dots\tau_q$$

حيث τ_l مناقلات $(l=\overline{1,q})$.

تعريف: باستعمال النظرية الأخيرة نسمي تأشيرة التبديلة σ العدد المعرف والذي نرمز له بـ (la signature)

$$\varepsilon(\sigma)=(-1)^q=\pm1$$

[q: المعرف في النظرية السابقة].

مثال: τ مناقلة إذن $\varepsilon(\tau)=-1$

$\sigma=Id_p$ إذن $\sigma=\tau.\tau$ ومنه $\varepsilon(\sigma)=1$.

02 $\sigma\in S_4$ معرفة كمايلي: $\sigma(1)=3,\ \sigma(2)=1 \mid \sigma(3)=4,\ \sigma(4)=2$.

ومنه $\sigma=(1342)$ إذن $\sigma=(13)(34)(42)$.

لنضع $\tau_3=(13)$ و $\tau_2=(34)$ و $\tau_1=(42)$ إذن $\sigma=\tau_3\circ\tau_2\circ\tau_1$

$$\begin{array}{ccccccc}
i & \xrightarrow{\tau_1} & \tau_1(i) & \xrightarrow{\tau_2} & \tau_2\circ\tau_1(i) & \longrightarrow & \sigma(i)=\tau_3\circ\tau_2\circ\tau_1(i)\\
1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 3\\
2 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 1\\
3 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 4\\
4 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 2
\end{array}$$

ومنه $q=3$ و $\varepsilon(\sigma)=(-1)^3=-1$.

3.2.5 تعريف: $f\in L^p(E)$ و $\sigma\in S_p$ إذن $\sigma f\in L^p(E)$ ومعرفة كمايلي: $\sigma f: E^p\longrightarrow \mathbb{R}$.
$(x_1,\dots,x_p)\longmapsto \sigma f(x_1,\dots,x_p)=f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)})$.

3.2.6 مثال: $f\in L^4(E)$. $\sigma\in S_p$ معرف في مثال سابق

$\sigma f(x_1,x_2,x_3,x_4)=f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\sigma(4)})$.

$\sigma f(x_1,x_2,x_3,x_4)=f(x_3,x_1,x_4,x_2)$.

3.2.7 ملاحظة: $f\in L^p(E)$ ومنه:

$\forall \sigma,\delta\in S_p:\ (\delta\circ\sigma)f=\delta(\sigma f)$

3.2.8 نظرية: ليكن $f\in L^p(E)$ إذن القضايا (3) الآتية متكافئة:

$\boxed{1}$ $f\in L_a^p(E)$ f.p. خطية متناوبة.

$\boxed{2}$ $\forall i,j\in I_p.\ x_i=x_j \Rightarrow f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p)=0$

$\boxed{3}$ $\forall \sigma\in S_p:\quad \sigma f=\varepsilon(\sigma)f$

البرهان: كتمرين.

3.3 الجداء الخارجي:

3.3.1 تعريف: ليكن $f\in L_a^p(E)$ و $g\in L_a^q(E)$ نعرف

$S_{p,q}=\{\sigma\in S_{p+q},\ \sigma(1)<\dots<\sigma(p);\ \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)\}$.

نعرف الجداء الخارجي $f\wedge g$ كمايلي:

$f\wedge g: E^{p+q}\longrightarrow \mathbb{R}$.

$f\wedge g(x_1,\dots,x_{p+q})=\sum_{\sigma\in S_{p,q}}\varepsilon(\sigma)\,\sigma(f\otimes g)(x_1,\dots,x_{p+q})$.

$\forall (x_1,\dots,x_{p+q})\in E^{p+q}$.

$\sigma(f\otimes g)(x_1,\dots,x_{p+q})=f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)})\times$
$\times\, g(x_{\sigma(p+1)},\dots,x_{\sigma(p+q)})$.

3.3.2 نظرية: $f\in L_a^p(E),\ g\in L_a^q(E)\Longrightarrow f\wedge g\in L_a^{p+q}(E)$.

3.3.3 أمثلة: (1) $f,g\in L^1(E)=L_a^1(E)=E^*$

$(f\wedge g)(x_1,x_2)=\sum_{\sigma\in S_{1,1}}\varepsilon(\sigma)\,f(x_{\sigma(1)})\cdot g(x_{\sigma(2)})$.

$S_2=\{\sigma_1=Id_{I_2},\ \sigma_2=(12)\}=S_{1,1}$.

$(f\wedge g)(x_1,x_2)=f(x_1)\cdot g(x_2)-f(x_2)g(x_1)$.

(2) $f\in L_a^1(E)$, $f:E\longrightarrow\mathbb{R}$ | $g\in L_a^2(E)$, $g:E^2\longrightarrow\mathbb{R}$.

$(f\wedge g)(x_1,x_2,x_3)=\sum_{\sigma\in S_{1,2}}\varepsilon(\sigma)\,f(x_{\sigma(1)})\,g(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)})$.

$S_3=\{\sigma_1=Id_{I_3},\ \sigma_2=(2,3),\ \sigma_3=(1,2),\ \sigma_4=(1,2,3),\ \sigma_5=(1,3,2),\ \sigma_6=(1,3)\}$.

$S_{1,2}=\{\sigma_1,\sigma_3,\sigma_5\}$. $\varepsilon(\sigma_1)=\varepsilon(\sigma_5)=1,\ \varepsilon(\sigma_3)=-1$

$(f\wedge g)(x_1,x_2,x_3)=f(x_1)g(x_2,x_3)-f(x_2)g(x_1,x_3)+f(x_3)g(x_1,x_2)$.

3.3.4 خواص الجداء الخارجي

(1) تجميعي: $f\in L_a^p(E),\ g\in L_a^q(E),\ h\in L_a^r(E)$.

$f\wedge g\wedge h=f\wedge(g\wedge h)=(f\wedge g)\wedge h\in L_a^{p+q+r}(E)$

(2) ليكن $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\lambda(f\wedge g)=(\lambda f)\wedge g=f\wedge(\lambda g)$

(3) $f\wedge g=(-1)^{p\cdot q}\,g\wedge f$ (ومنه غير تبديلي)

(4) $(f+g)\wedge h=f\wedge h+g\wedge h$ $\quad p=q$

3.3.5 نظرية: $f_i: E\longrightarrow\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$ 1-خطية على E

$f_1\wedge\dots\wedge f_n(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\,f_1(x_{\sigma(1)})\cdots f_n(x_{\sigma(n)})$.

البرهان: باستعمال البرهان بالتراجع.

3.3.6 ملاحظة: ليكن $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ نعلم أن

$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.

وإذن:

$$f_1\wedge\dots\wedge f_n(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n)\\ \vdots & & \vdots\\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n)\end{vmatrix}=\det(f)$$

حيث: $f=(f_1,\dots,f_n)$.

3.4 حالة البعد المنتهي:

E ف.ش على $\mathbb{R}$ ذو بعد منته $\dim E=n$.

لنضع $B=(e_j)_{1\le j\le n}$ أساس لـ E إذن:

$\forall x\in E \Longleftrightarrow \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n,\ x=\sum_{j=1}^n\lambda_j e_j$.

3.4.1 نظرية: كتابة عبارة شكل p-خطية على E

$\dim E=n$ و $T\in L^p(E)$ إذن T يكتب بصفة وحيدة على الشكل:

$T=\sum_{1\le j_1,\dots,j_p\le n} C_{j_1\dots j_p}\, e^*_{j_1}\otimes\dots\otimes e^*_{j_p}$

بحيث $C_{j_1\dots j_p}=T(e_{j_1},\dots,e_{j_p})$

و $(e_k^*)_{1\le k\le n}$ الأساس الثنوي على E^*

$E^*=\{u: E\longrightarrow\mathbb{R}$, u تطبيق خطي ومعرف على $E\}$

E^* ثنوي الفضاء E وهو مجموعة الأشكال الخطية المعرفة على E: $\dim E^*=n \Longleftarrow \dim E=n$

وأساسه $B^*=(e_j^*)_{1\le j\le n}$ حيث e_j^* هو إسقاط رقم j.

3.4.3 ملاحظة (1): ومنه من أجل $\dim E = n$

الفضاء $L^p(E)$ ذو بعد منته أساسه المتشكل من $(e^*_{j_1}\otimes\cdots\otimes e^*_{j_p})$ ومنه $0<j_1,\dots,j_p\le n$

$$\dim L^p(E) = A^p_n = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

ومنه من أجل $p>n \Leftarrow L^p(E)=\{0\}$.

ومن أجل $n=p$:

$$T\in L^p_a(E) \Rightarrow \{T=\lambda e_1^*\wedge\dots\wedge e_n^*\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

(2) تذكير: من أجل E فضاء منته نستعمل الرمز $\Lambda^p(E^*)$ في مكان الرمز $L^p_a(E)$.

5.3: الأشكال التفاضلية على م.ط.ق.ت

1.5.3 تعريف: الحالة العامة $\dim E = n$.

U مفتوح من فضاء شعاعي نظيمي تام E و $p\in\mathbb{N}^*$

نقول أن w شكل تفاضلي ذو الرتبة p من صنف C^k.

إذا كان w تطبيق في U نحو $\Lambda^p(E^*)$ من صنف C^k.

[قابل للتفاضل باستمرار k مرة على U].

أي:
$$w: U\longrightarrow \Lambda^p(E^*)$$
$$x\longmapsto w(x)\in\Lambda^p(E^*)$$

نرمز ب: $\Omega_p^{(k)}(U)$ لمجموعة الأشكال التفاضلية من الرتبة p من صنف C^k على U.

بما أن E ذو بعد منته، إذن: ($\dim E = n$).

من أجل U مفتوح من E، $w\in\Omega_p^{(k)}(U)$

$$w: U\longrightarrow\Lambda^p(E^*)$$
$$x\longmapsto \boxed{w(x) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} c_{i_1\dots i_p}(x)\, e^*_{i_1}\wedge\dots\wedge e^*_{i_p}}\quad (1)$$

$L_0(E,F)=F$.

2.5.3 أمثلة:

(1) $E=\mathbb{R}^n$. حيث $U\subset\mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} f: U\to\mathbb{R} = \Lambda^0((\mathbb{R}^n)^*) = L_0(\mathbb{R}^n)\\ x\mapsto f(x)\end{cases}$$

ومنه f شكل تفاضلي ذو الرتبة 0 على U.

(2) نعتبر f دالة من صنف C^1 من U نحو $\mathbb{R}$

$f: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow df: U\subset\mathbb{R}^n\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = L(\mathbb{R}^n)$$
$$x\mapsto df(x).$$

$$df(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$
$$h\mapsto df(x)(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, h_j.$$

نحن نعلم أن $e_j^*(h)=h_j$

ومنه
$$df(x)(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, e^*_j(h)\ ,\ \forall h\in\mathbb{R}^n.$$

$$\Rightarrow \boxed{df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, e_j^*}\ ,\ \forall j=1,n$$

$$df(x)\in L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \Lambda^1(\mathbb{R}^{n*})\ ,\quad (1)$$

إذن
$$df: U\longrightarrow\Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*)$$
$$x\longmapsto df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, e_j^*$$

إذن إذا f من صنف C^1 على U فإن df شكل تفاضلي من الرتبة 1 من صنف C^0 على U.

(3) على وجه الخصوص:

$$f_j = e_j^*: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto e_j^*(x) = x_j \ . \ / x=\sum_{i=1}^n x_i e_i$$

حسب المثال السابق لدينا e_j^* من صنف C^∞ على $\mathbb{R}^n$

إذن $\boxed{de_j^*(x) = dx_j = e_j^*}$ (2) هو شكل تفاضلي من الرتبة 1 من صنف C^∞ على U.

ومنه بتعويض (2) في (1) نجد:

$$\begin{cases} w(x) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} c_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\\ \forall x\in U\end{cases}$$

ومنه نرجع إلى مثال (2) من أجل $f\in C^1$

$$f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \Rightarrow df: U\to\Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*)$$
$$x\mapsto df(x).$$

$$\begin{cases} df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\,dx_n\\ \forall x\in U\end{cases}$$

ونكتب: $f\in\Omega_1^{(0)}(U)$.

(4) $n=3$ و $p=1$: $w\in\Omega_1(U)$ حيث $U\subset\mathbb{R}^3$

$$w: U\longrightarrow\Lambda^1((\mathbb{R}^3)^*)$$
$$x\longmapsto w(x) = \sum_{1\le i_1\le 3} c_{i_1}(x)\, e^*_{i_1}.$$

$$\begin{cases} w(x) = c_1(x)\,dx_1 + c_2(x)\,dx_2 + c_3(x)\,dx_3.\\ \forall x\in U\end{cases}$$

أو نكتب:
$$w = c_1\,dx_1+c_2\,dx_2+c_3\,dx_3.$$

(5) $n=3$ و $p=2$ و $w\in\Omega_2(U)$، $U\subset\mathbb{R}^3$

$$w: U\longrightarrow\Lambda^2((\mathbb{R}^3)^*).$$
$$x\longmapsto w(x) = \sum_{1\le i_1<i_2\le 3} c_{i_1 i_2}(x)\, dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}$$

$$\begin{cases} w(x) = c_{12}(x)\,dx_1\wedge dx_2 + c_{13}(x)\,dx_1\wedge dx_3 + c_{23}(x)\,dx_2\wedge dx_3\\ \forall x\in U.\end{cases}$$

$$\boxed{w = A\,dx_1\wedge dx_2 + B\,dx_1\wedge dx_3 + C\,dx_2\wedge dx_3}$$

(6) $p=n=4$ ، $w\in\Omega_4(U)$ ، $U\subset\mathbb{R}^4$.

$$w: U\longrightarrow\Lambda^4((\mathbb{R}^4)^*)$$
$$x\longmapsto w(x) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_4\le n} c_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x)\, dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge dx_{i_3}\wedge dx_{i_4}.$$

$$w = \lambda\, dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4.$$

04

3.5.3 . خواص الأشكال التفاضلية

ليكن f دالة معرفة في U $(U\subset E)$ في : IR

$f: U\subset E \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)=\lambda$. وليكن $\omega\in\Omega_p(U)$.

نعرف الشكل التفاضلي $f\omega$ كما يلي :

$f\omega: U \longrightarrow \Lambda^p(E^*)$.

$x\longmapsto (f\omega)(x) = f(x)\,\omega(x)$.

إذاً : $[f\in\Omega_0(U), \omega\in\Omega_p(U)] \Rightarrow [(f\omega)\in\Omega_p(U)]$

لأن : $\lambda\in\mathbb{R}, T\in\Lambda^p(E^*) \Rightarrow \lambda T\in\Lambda^p(E^*)$

1.3.5.3 مبرهنة : $\eta\in\Omega_p(U)$ و $\omega\in\Omega_p(U)$ ، f و g معرفتان على U في IR .

① $(f+g)\omega = f\omega + g\omega$

② $f(\omega+\eta) = f\omega + f\eta$

③ $(f\cdot g)\,\omega = f(g\omega) = g(f\omega)$.

البرهان : كتمرين .

4.5.3 : الجداء الخارجي على الأشكال التفاضلية

1.4.5.3 تعريف : $\eta\in\Omega_q(U)$ ، $\omega\in\Omega_p(U)$

حيث $U\subset E$ نعرف الشكل التفاضلي $\omega\wedge\eta \in \Omega_{p+q}(U)$

$\omega\wedge\eta: U\longrightarrow\Lambda^{p+q}(E^*)$

$x\longmapsto(\omega\wedge\eta)(x)=\omega(x)\wedge\eta(x)$.

$(\omega\wedge\eta)(x)(h_1,\dots,h_{p+q})=\sum_{\sigma\in S_{p,q}}\varepsilon(\sigma)\,\sigma(\omega\otimes\eta)(h_1,\dots,h_{p+q})$,

$\forall(h_1,\dots,h_{p+q})\in E^{p+q}$.

2.4.5.3 حالة البعد المنتهي $(\dim E = n)$

ليكن $B=(e_1,\dots,e_n)$ أساس لـ E ومنه :

$x\in U,\ \omega(x)(h_1,\dots,h_p)=\sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} c_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}$

$\forall(h_1,\dots,h_p)\in E^p,\quad c_{i_1\dots i_p}(x)=\omega(x)(e_{i_1},\dots,e_{i_p})$.

$x\in U,\ \eta(x)(h_{p+1},\dots,h_{p+q})=\sum d_{j_1\dots j_q}(x)\, dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}$

$\forall(h_{p+1},\dots,h_{p+q})\in E^q,\ d_{j_1\dots j_q}(x)\, dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}$.

$\Rightarrow x\in U,\ (\omega\wedge\eta)(x)(h_1,\dots,h_{p+q}) =$

$= \sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_p\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_q\le n}} c_{i_1\dots i_p}(x)\cdot d_{j_1\dots j_q}(x)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{p+1}\wedge\dots\wedge dx_{p+q}$.

$\Rightarrow (\omega\wedge\eta)(x)(h_1,\dots,h_{p+q}) = \sum_{1\le k_1<\dots<k_{p+q}\le n} g_{k_1\dots k_{p+q}}(x)\, dx_{k_1}\wedge\dots\wedge dx_{k_{p+q}}$

$\forall(h_1,\dots,h_{p+q})\in E^{p+q}$

3.4.5.3 مثال

① حسب مثال 12.5.3 .

$U\subset\mathbb{R}^3$ و $\omega\in\Omega_2(U)$ $\qquad E=\mathbb{R}^3$

$\forall x\in U,\ \omega_x = A(x)\,dx_1\wedge dx_2 + B(x)\,dx_1\wedge dx_3 + C(x)\,dx_2\wedge dx_3$.

و $\eta\in\Omega_1(U)$ ، $(p=1, n=3)$.

$\forall x\in U,\ \eta_x = e(x)\,dx_1 + f(x)\,dx_2 + g(x)\,dx_3$

$(\omega\wedge\eta)_x = [A(x)\,dx_1\wedge dx_2 + B(x)\,dx_1\wedge dx_3 + C(x)\,dx_2\wedge dx_3]\wedge[e(x)\,dx_1 + f(x)\,dx_2 + g(x)\,dx_3]$

$= A(x).e(x)\,\cancel{dx_1\wedge dx_2\wedge dx_1} + A(x).f(x)\,\cancel{dx_1\wedge dx_2\wedge dx_2}$

$+ A(x).g(x)\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 + B(x).\cancel{e(x)\,dx_1\wedge dx_3\wedge dx_1}$

$+ B(x).f(x)\,dx_1\wedge dx_3\wedge dx_2 + B(x).g(x)\,\cancel{dx_1\wedge dx_3\wedge dx_3}$.

$+ C(x).e(x)\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_1 + C(x).f(x)\,\cancel{dx_2\wedge dx_3\wedge dx_2}$

$+ C(x).g(x)\,\cancel{dx_2\wedge dx_3\wedge dx_3}$

$\boxed{(\omega\wedge\eta)_x = [A(x)g(x) - B(x)f(x) + C(x)e(x)]\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3}$

② $U\subset E$ و $\dim E=n$ و $\omega\in\Omega_p(U)$ و $\eta\in\Omega_q(U)$

$p+q>n \Rightarrow \omega\wedge\eta=0$

4.4.5.3 خواص الجداء الخارجي

① $\omega\in\Omega_p(U),\ \eta\in\Omega_q(U) \Rightarrow \omega\wedge\eta\in\Omega_{p+q}(U)$

② $\omega\wedge\eta = (-1)^{p.q}\,\eta\wedge\omega$.

③ $\omega\in\Omega_p(U),\ \eta\in\Omega_q(U),\ \alpha\in\Omega_r(U)$.

$\omega\wedge\eta\wedge\alpha = (\omega\wedge\eta)\wedge\nu = \omega\wedge(\eta\wedge\nu)\in\Omega_{p+q+r}(U)$

تمرين : $f_j: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ دوال من صنف C^1

بين أن : $(df_1\wedge\dots\wedge df_n)_x = \frac{\partial(f_1\dots f_n)(x)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$

بحيث : $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)(x)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = \det\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)\right]_{1\le j,k\le n} = (df)_x$

المحدد اليعقوبي لـ $f=(f_1,\dots,f_n)$.

$f: U\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$x=(x_1,\dots,x_n)\longmapsto f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$.

ملاحظة : $f\in C^1(U)$:

$f: U\subset E\longrightarrow\mathbb{R}$.

$x\longmapsto f(x)$

$df: U\to\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = L^1_a(E^*)$. $\Rightarrow df\in\Omega_1(U)$.

$x\longmapsto(df)_x = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx_j$ $\qquad d:\Omega_0(U)\longrightarrow\Omega_1(U)$

$f\longmapsto df$.