جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي

2017-2016
يوم: الأحد 2 رمضان 1438 هـ
الموافق لـ 27 ماي 2017

السنة الثالثة رياضيات S6

الامتحان في مادة الهندسة التفاضلية

التمرين 01: لنضع: $M = \left\{ (x,y) \in IR^2;\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$، ونعرف ما يلي:

$$U_1 = \{(x,y) \in M;\ x > 0\} \qquad U_2 = \{(x,y) \in M;\ x < 0\}$$

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow IR,\quad (x,y) \mapsto \varphi_1(x,y) = y \qquad \varphi_2 : U_2 \longrightarrow IR,\quad (x,y) \mapsto \varphi_2(x,y) = y$$

$$U_3 = \{(x,y) \in M;\ y > 0\} \qquad U_4 = \{(x,y) \in M;\ y < 0\}$$

$$\varphi_3 : U_3 \longrightarrow IR,\quad (x,y) \mapsto \varphi_3(x,y) = x \qquad \varphi_4 : U_4 \longrightarrow IR,\quad (x,y) \mapsto \varphi_4(x,y) = x$$

لنضع $A = \left\{ (U_i, \varphi_i), i = \overline{1,4} \right\}$ ، برهن أن (M, A) منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل.

التمرين 02:

لنضع $V = \left\{ (x,y,z) \in IR^3;\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1 \right\}$

1. بين أن V منوعة طبولوجية جزئية من IR^3، وعين بعدها.
2. عين الفضاء المماسي لـ V عند النقطة (x,y,z) (أي: $T_{(x,y,z)}V$).

التمرين 03:

1. ليكن $w \in \Omega_1(IR^2)$ بحيث: $w(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$
   1. أحسب dw، ثم أوجد الشرط لكي يكون w شكل تفاضلي مغلق.
   2. لنضع: $w(x,y) = (xy - y^2 - 1)\,dx + (x^2 - xy - 1)\,dy$، بين أن w غير مغلق.
   3. أوجد الدالة $f : IR \to IR$ من صنف C^1 حتى يكون الشكل التفاضلي η المعرف كما يلي:
      $\eta(x,y) = w(x,y) f(xy)$ شكل التفاضلي دقيق.
   4. أوجد الدالة g من صنف C^1 في IR^2 بحيث: $dg = \eta$.

   ~~[أوجد الدالة g من صنف C^1 في IR^2 بحيث: $dg = \eta$]~~

2. لنعتبر الشكلين التفاضليين α و β المعرفين كما يلي:

$$\alpha(x,y,z) = x^2\ dy \wedge dz \qquad \beta(x,y) = y\ dx + x\ dy$$

أحسب كل من: $\alpha \wedge \beta$، و $d(\alpha \wedge \beta)$، و $d\alpha$، و $d\beta$، و $d\alpha \wedge d\beta$.

بالتوفيق

تصحيح الامتحان الخاص بمادة الهندسة التفاضلية ، ذلك اليوم: 2017/01/27

حل التمرين 01: لنضع $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\}$

$U_{1,2}=\{(x,y)\in M, \pm x>0\}$.

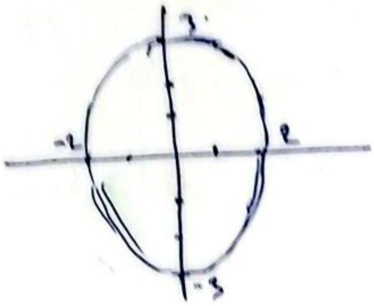
$\varphi_{1,2}: U_{1,2}\longrightarrow\mathbb{R}$.

$(x,y)\longmapsto\varphi_{1,2}(x,y)=y$

$U_{3,4}=\{(x,y)\in M, \pm y>0\}$.

$\varphi_{3,4}: U_{3,4}\longrightarrow\mathbb{R}$

$(x,y)\longmapsto\varphi_{3,4}(x,y)=x$.



أ) البرهان أن (U_1,φ_1) خريطة على M؟

M قطع ناقص المبين في الشكل

ومنه $\varphi_{1,2}(U_{1,2})=]-3,3[$. (0,25)

$\varphi_{3,4}(U_{3,4})=]-2,2[$. (0,25)

$\varphi: E\longrightarrow F$

$\varphi: E\longrightarrow\varphi(E)$

إذن (1) φ_1 مستمرة (0,1) على U_1 (لأنه كثير حدود) تقابل

(2) U_1 مفتوح (0,1) في M (لأن φ_1 مستمرة و $U_1=\varphi_1^{-1}(]-3,3[)$ و $]-3,3[$ مفتوح في $\mathbb{R}$)

(3) φ_1 تقابل من U_1 نحو $]-3,3[$؟

φ_1 غامرة (0,1) (لأن $\varphi_1(U_1)=]-3,3[$) يكفي أن نبرهن أن φ_1 متباينة؟

φ_1 متباينة من U_1 نحو $]-3,3[$؟

$$\begin{cases}(x_1,y_1)\in U_1\\(x_2,y_2)\in U_1\\\varphi_1(x_1,y_1)=\varphi_1(x_2,y_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{9}=1,\ x_1>0\\\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{9}=1,\ x_2>0\\y_1=y_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\sqrt{1-\frac{y_1^2}{9}}\\x_2=2\sqrt{1-\frac{y_2^2}{9}}\\y_1=y_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}\ (1)$$

$$\Downarrow$$

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

φ_1 تقابلي من U_1 نحو $]-3,3[$ ومنه φ_1^{-1} موجود ومعرف كالتالي

$\varphi_1^{-1}:]-3,3[\longrightarrow U_1$. (0,2)

$\alpha\longmapsto\varphi_1^{-1}(\alpha)=\left(2\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{9}},\alpha\right)=(\xi_1(\alpha),\xi_2(\alpha))$; $\begin{cases}\xi_1(\alpha)=2\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{9}}\\\xi_2(\alpha)=\alpha.\end{cases}$

φ_1^{-1} دالة شعاعية ذات مركبتين مستمرتين (0,1) ξ_1 على مجموعة تعريفها .

و ξ_2 تطبيق حيادي ، إذن φ_1^{-1} مستمرة على $]-3,3[$.

إذن φ_1 متشاكل من U_1 نحو $]-3,3[$ ومنه (U_1,φ_1) خريطة في M.

البرهان أن $\mathcal{A}=\{(U_i,\varphi_i), i=\overline{1,4}\}$ أطلس لـ M

$U_1\cap U_2=\phi$ إذن الخريطتين (U_1,φ_1) و (U_2,φ_2) متوافقتين (0,1)

$U_3\cap U_4=\phi$ إذن الخريطتين (U_3,φ_3) و (U_4,φ_4) متوافقتين .

02

تابع التصحيح.

لنبرهن أن (U_1, φ_1) و (U_3, φ_3) متلائمتين. لدينا $U_1 \cap U_3 \neq \phi$:

$U_1 \cap U_3 = \{(x,y) \in M ,\ x>0 ,\ y>0\}$.

إذن لنبرهن أن φ_{31} و φ_{13} توابع الانتقال قابل للتفاضل.

$\varphi_{31} : \varphi_1(U_1 \cap U_3) \longrightarrow \varphi_3(U_1 \cap U_3)$.

$\alpha \longmapsto \varphi_{31}(\alpha) = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}(\alpha)$.

$\varphi_1(U_1 \cap U_3) =]0,3[$ (0,25) $\quad \varphi_3(U_1 \cap U_3) =]0,2[$ (0,25)

$\varphi_{31}(\alpha) = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}(\alpha) = \varphi_3\left(2\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{9}}, \alpha\right) = 2\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{9}}$ (0,25)

$\varphi_{13}(\alpha) = \frac{2}{3}\sqrt{9-\alpha^2}$ (0,25) ومنه هي قابل للتفاضل على $]0,3[$ (أيضاً صحيح)

$\varphi_{13} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) =]0,2[\longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_3) =]0,3[$.

$\alpha \longmapsto \varphi_{13}(\alpha) = \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(\alpha) = 3\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{4-\alpha^2}$ (0,25)

$\varphi_3^{-1}(\alpha) = \left(\alpha, 3\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}\right)$. (0,5) $\qquad \varphi_{13}$ قابل للتفاضل على $]0,2[$. (0,25)

ومنه بنفس الطريقة نبرهن أن تلاؤم الخرائط الباقية.

ومنه A أطلس قابل للتفاضل ومنه (M, A) منوعة طبولوجية قابل للتفاضل.

(0,5) $I = \{1,2,3,4\}$ قابل للعد (0,5) $\quad \bigcup_{i=1,4} U_i = M$.

حل التمرين 02 لنضع $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ,\ x^3+y^3+z^3-3xyz = 1\}$

البرهان أن V منوعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ وتعيين بعدها.

لنضع

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$

لدينا $V = f^{-1}(\{1\})$ يكفي أن نبرهن أن 1 قيمة عادية لـ f

f كثير حدود ومنه f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^3$. ولدينا

03

من أجل كل $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h=(h_1,h_2,h_3)\longmapsto df_{(x,y,z)}(h)=\left(3x^2-3yz \quad 3y^2-3xz \quad 3z^2-3xy\right)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3)=3\left[(x^2-yz)h_1+(y^2-xz)h_2+(z^2-xy)h_3\right]. \\ \forall (h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

لنبرهن أنه من أجل كل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ التطبيق الخطي $df_{(x,y,z)}$ غامر من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}$

ط$_1$ لنستعمل التعريف: من أجل كل $\alpha\in\mathbb{R}$ البحث عن $(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3$ بحيث $df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3)=\alpha$

من أجل $\alpha\in\mathbb{R}$ لدينا

$$(x_1,x_2,x_3)\in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz=1. \quad (*)$$
$$\Leftrightarrow x^3\alpha+y^3\alpha+z^3\alpha-3xyz\alpha=\alpha.$$
$$\Leftrightarrow 3\left[(x^2-yz)\frac{\alpha x}{3}+(y^2-xz)\frac{\alpha y}{3}+(z^2-xy)\frac{\alpha z}{3}\right]=\alpha.$$
$$\Leftrightarrow df_{(x,y,z)}\left(\frac{\alpha x}{3},\frac{\alpha y}{3},\frac{\alpha z}{3}\right)=\alpha.$$

يكفي أخذ $(h_1,h_2,h_3)=\frac{\alpha}{3}(x,y,z)$.

ط$_2$ يكفي أن نبرهن أن $\mathrm{Im}\, df_{(x,y,z)}=\mathbb{R}$ من أجل ذلك توجد طريقتين أيضا:

(1) لنبرهن أن $\dim \mathrm{Im}\, df_{(x,y,z)}=1$. ومن أجل ذلك يكفي أن نبرهن أن $\dim \mathrm{Im}\, df_{(x,y,z)}\neq 0$

[وهذا لا يكون إلا إذا كان $df_{(x,y,z)}=0$ (أي التطبيق المعدوم)]:

ونبرهن أنه من أجل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ فإن $df_{(x,y,z)}\neq 0$.

ومن أجل هذه الأخيرة نبرهن أن $df_{(x,y,z)}=0$ فإن $(x,y,z)\notin f^{-1}(\{1\})$

إذن. $df_{(x,y,z)}=0 \Leftrightarrow df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3)=0 \quad , \forall (h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3$.

$$\Leftrightarrow 3\left[(x^2-yz)h_1+(y^2-xz)h_2+(z^2-xy)h_3\right]=0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-yz=0 \\ \wedge\ y^2-xz=0 \\ \wedge\ z^2-xy=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=yz \\ \wedge\ y^2=xz \\ \wedge\ z^2=xy \end{cases}$$

بالتعويض في الطرف الأيسر لمعادلة $(*)$ نجد

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=x\cdot x^2+y\cdot y^2+z\cdot z^2-3xy\cdot z=$$
$$=xyz+yxz+zxy-3xyz=3xyz-3xyz=0\neq 1$$

ومنه $(x,y,z)\notin f^{-1}(\{1\})$ وهو المطلوب.

2.2 : لكي نبرهن أن $\dim df_{(x,y,z)} = 1$ نستعمل المعادلة الجبرية :

$$\dim \operatorname{Ker}(df_{(x,y,z)}) + \dim \operatorname{Im} df_{(x,y,z)} = \dim \mathbb{R}^3 = 3 .$$

ومنه يكفي أن نبرهن أن . $\dim \operatorname{Ker}(df_{(x,y,z)}) = 2$

$$(h_1,h_2,h_3) \in \operatorname{Ker}(df_{(x,y,z)}) \iff df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3) = 0 .$$

$$\iff 3\Big[\underbrace{(x^2-yz)}_{\text{الحد (1)}}h_1 + \underbrace{(y^2-xz)}_{\text{الحد (2)}}h_2 + \underbrace{(z^2-xy)}_{\text{الحد (3)}}h_3\Big] = 0 \quad (**)$$

<u>توجد 4 حالات:</u>

1) انعدام جميع الحدود أي $x^2=yz$ و $y^2=xz$ و $z^2=xy$

بالتعويض في الحد الأيسر (*) نجد:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = xx^2+yy^2+zz^2-3xyz = 3xyz-3xyz = 0 \neq 1 .$$

ومنه $(x,y,z) \notin f^{-1}(\{1\})$.

2) انعدام حدين فقط وعدم انعدام الثالث مثال: $x^2=yz$ و $y^2=xz$ و $z^2\neq xy$

بالتعويض في $(**)$ نجد:

$$(z^2-xy)h_3 = 0 \Rightarrow h_3 = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} \iff \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 0 \end{pmatrix} = h_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + h_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}$$

إذن $\operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} = \operatorname{Vect}\{e_1,e_2\}$ إذن $\dim \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} = 2$ وهو المطلوب.

3) انعدام حد واحد وعدم انعدام الحدين الآخرين. مثال: $x^2=yz$ و $y^2\neq xz$ و $z^2\neq xy$ بالتعويض في $(**)$ نجد:

$$(y^2-xz)h_2 + (z^2-xy)h_3 = 0 \Rightarrow h_2 = \left(\frac{xy-z^2}{y^2-xz}\right)h_3 .$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} \iff \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \left(\frac{xy-z^2}{y^2-xz}\right)h_3 \\ h_3 \end{pmatrix} = h_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + h_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{xy-z^2}{y^2-xz} \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}$$

إذن $\operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} = \operatorname{Vect}\{e_1,u_1\}$ إذن $\dim \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)}$ وهو المطلوب

4) عدم انعدام أي حد من الحدود الثلاثة أي: $x^2\neq yz$ و $y^2\neq xz$ و $z^2\neq xy$

$$(**) \Rightarrow h_1 = \left(\frac{xz-y^2}{x^2-yz}\right)h_2 + \left(\frac{xy-z^2}{x^2-yz}\right)h_3$$

$$\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(\frac{xz-y^2}{x^2-yz}\right)h_2+\left(\frac{xy-z^2}{x^2-yz}\right)h_3\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{xz-y^2}{x^2-yz}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}}_{u_2} h_2 + \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{xy-z^2}{x^2-yz}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{u_3} h_3$$

إذن: $\operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} = Vect\{u_1,u_2\}$ إذن $\dim \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} = 2$ وهو المطلوب.

إذن في الأخير 1 قيمة عادية لـ f ومنه $V = f^{-1}(\{1\})$ منوعة جزئية من $\mathbb{R}^3$.

و (1) —— $\dim V = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\dim V = 2}$

$\boxed{3}$ من أجل كل $(x,y,z) \in V$ إيجاد $T_{(x,y,z)}V$ ؛ $T_{(x,y,z)} = \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)}$ 0,1

$$T_{(x,y,z)}V = \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3,\ df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3) = 0\}.$$

$$T_{(x,y,z)}V = \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3,\ 3[(x^2-yz)h_1+(y^2-xz)h_2+(z^2-xy)h_3] = 0\}$$

0,1

$$T_{(x,y,z)}V = \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3,\ (x^2-yz)h_1+(y^2-xy)h_2+(z^2-xy)h_3 = 0\}$$

وهي معادلة مستوي في الفضاء.

حل التمرين 03

أ) ليكن $w \in \Omega_1(\mathbb{R}^2)$ بحيث: $w(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

1/ حساب dw وإيجاد الشرط حتى يكون w شكل تفاضلي مغلق،

$$dw(x,y) = dM(x,y) \wedge dx + dN(x,y) \wedge dy \quad \text{——} (1)$$

$$dM(x,y) = \frac{\partial M}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dy. \quad \text{——} (2)$$

$$dN(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial N}{\partial y}(x,y)dy \quad \text{——} (3)$$

بتعويض كل من (2) و (3) في (1) نجد:

$$dw(x,y) = \left(\frac{\partial M}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial N}{\partial y}(x,y)dy\right) \wedge dy$$

$$= \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\, dy \wedge dx + \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\, dx \wedge dy.$$

$$\boxed{dw(x,y) = \left[\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right] dx \wedge dy}$$

الشرط: w شكل تفاضلي مغلق $\Leftrightarrow dw = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 0$

إذن الشرط هو: $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y)}$

2) لنضع $w(x,y)=\underbrace{(xy-y^2-1)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(x^2-xy-1)}_{N(x,y)}dy$ البرهان أن w غير مغلق

من السؤال 1) إذن :
$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=x-2y\neq 2x-y=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$
إذن w شكل تفاضلي غير مغلق.

3) إيجاد الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ من صنف C^1 حتى يكون الشكل التفاضلي η المعرف كمايلي $\eta(x,y)=w(x,y)f(xy)$ شكل تفاضلي دقيق.

لدينا: $w\in\Omega_1(\mathbb{R}^2)$ و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ إذن $\eta\in\Omega_1(\mathbb{R}^2)$ بما أن $\mathbb{R}^2$ محدب.

إذن فهو نجمي في جميع نقاطه إذن η دقيق $\Leftrightarrow$ η مغلق.
$$\eta(x,y)=f(xy)w(x,y)=\underbrace{f(xy)M(x,y)}_{M_1(x,y)}dx+\underbrace{f(xy)N(x,y)}_{N_1(x,y)}dy$$

(η مغلق) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial M_1}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N_1}{\partial x}(x,y)}$ —— (4).

$$\frac{\partial f(xy)}{\partial x}=yf'(xy)\qquad \frac{\partial f(xy)}{\partial y}=xf'(xy).$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f(xy)M(x,y)\right)=\frac{\partial f}{\partial y}(xy)M(x,y)+f(xy)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y).$$

$$\boxed{\frac{\partial M_1}{\partial y}(x,y)=xf'(xy)(xy-y^2-1)+f(xy)(x-2y)} \text{—(5)}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f(xy)N(x,y)\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(xy)N(x,y)+f(xy)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

$$\boxed{\frac{\partial N_1}{\partial x}(x,y)=yf'(xy)(x^2-xy-1)+f(xy)(2x-y)} \text{—(6)}$$

من (5) و(6) لدينا

$$(4)\Leftrightarrow xf'(xy)(xy-y^2-1)+f(xy)(x-2y)=yf'(xy)(x^2-xy-1)+f(xy)(2x-y)$$
$$\Leftrightarrow f'(xy)(\cancel{x^2y}-\cancel{xy^2}-x-\cancel{yx^2}+\cancel{xy^2}+y)=f(xy)(2x-y-x+2y).$$
$$\Leftrightarrow (y+x)f'(xy)=(x+y)f(xy)\Leftrightarrow$$

التمرين 01 [7 نقاط]

0,5 $\varphi_1(U_1) =]-3,3[$

0,5 φ_1 مستمرة على U_1

0,5 U_1 مفتوح من Z من M

0,5 φ_1 غامر من U_1 نحو $\varphi_1(U_1)$

0,25 φ_1 متباين $x_1 = x_2$

0,25 $y_1 = y_2$

0,5 φ_1^{-1}: $\varphi_1^{-1}(\alpha) = \left(2\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{9}}, \alpha\right)$

0,5 φ_1^{-1} مستمرة على $]-3,3[$

0,5 $U_1 \cap U_2 = \phi$

الخريطتين (U_1,φ_1) و (U_2,φ_2) متلائمتين

لنبرهن أن (U_1,φ_1) و (U_3,φ_3) متلائمتين

0,25 $U_1 \cap U_3 \neq \phi$ إذن لنبرهن أن φ_{13} ، φ_{31} قابل التفاضل

0,25 $\varphi_1(U_1 \cap U_3) =]0,3[$

0,25 $\varphi_3(U_1 \cap U_3) =]0,2[$

0,25 $\varphi_{31}(\alpha) = 2\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{9-\alpha^2}$

0,25 φ_{31} قابل للتفاضل على $]0,3[$

0,25 $\varphi_3^{-1}(\alpha) = \left(\alpha, 3\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}\right)$

0,25 $\varphi_{13}(\alpha) = 3\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{4-\alpha^2}$

0,25 φ_{13} قابل للتفاضل على $]0,2[$

0,5 $\bigcup_{i \in I = \{1,2,3,4\}} U_i = M$

0,5 I قابل للعد

التمرين 02 [7 نقاط]

(0,5) $\begin{cases} f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz. \end{cases}$

(0,5) $V = f^{-1}(\{1\})$

(0,5) يكفي أن نبرهن أن 1 قيمة عادية لـ f

(0,5) f كثير حدود $\Leftarrow$ f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^3$

(0,5) $\begin{cases} \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \quad df_{(x,y,z)}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}. \\ \qquad (h_1,h_2,h_3) \longmapsto df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3) \\ df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3) = 3\left[(x^2-yz)h_1+(y^2-xz)h_2+(z^2-xy)h_3\right] \end{cases}$

(0,5) لابد أن نبرهن أنه من أجل كل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ التطبيق $df_{(x,y,z)}$ غامر من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}$

ط1 | إستعمال التعريف: من أجل كل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ البرهان:

(0,5) $\forall \alpha\in\mathbb{R} : \exists h=(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3 : \quad df_{(x,y,z)}(h) = \alpha\ ?$

(0,5) $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz = 1$ ———— $(*)$

بضربها الطرفين في α وكتابتها على الشكل

(0,5) $3\left[(x^2-yz)\frac{\alpha x}{3}+(y^2-xz)\frac{\alpha y}{3}+(z^2-xy)\frac{\alpha z}{3}\right]=\alpha$

$\Leftrightarrow df_{(x,y,z)}\left(\frac{\alpha x}{3},\frac{\alpha y}{3},\frac{\alpha z}{3}\right)=\alpha$

(0,5) يكفي أخذ $h=\frac{\alpha}{3}(x,y,z)$

ط2 | البرهان أنه من أجل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ أن $\dim \operatorname{Im} df_{(x,y,z)} = 1$.

(0,25) لابد أن نبرهن أن $\dim \operatorname{Im} df_{(x,y,z)} \neq 0$

(0,25) من أجل ذلك نبرهن أنه من أجل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ أن $df_{(x,y,z)} \neq 0$ دالة معدومة.

(0,25) وللتسهيل نبرهن أن $df_{(x,y,z)} = 0$ فإن $(x,y,z)\notin f^{-1}(\{1\})$

(0,25) $df_{(x,y,z)}=0 \Leftrightarrow df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3)=0, \quad \forall (h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3.$

$\Leftrightarrow 3\left[(x^2-yz)h_1+(y^2-xz)h_2+(z^2-xy)h_3\right]=0, \forall (h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3.$

(0,25) $\Leftrightarrow \{x^2=yz \wedge y^2=xz \wedge z^2=xy\}$

بالتعويض في الطرف الأيسر من المعادلة $(*)$ نجد

(0,25) $x^3+y^3+z^3-3xyz = 0 \neq 1 \Rightarrow (x,y,z)\notin f^{-1}(\{1\})$.

(0,25) وهو المطلوب.

(0,25) 3) البرهان أنه من أجل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ أن $\dim \operatorname{Im} df_{(x,y,z)} = 1$

(0,25) لدينا $\dim \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} + \dim \operatorname{Im} df_{(x,y,z)} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

(0,25) إذن يكفي أن نبرهن أنه من أجل كل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ أن $\dim \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} = 2$

$$(h_1,h_2,h_3)\in \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} \iff df_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3)=0.$$

(0,25) $$\iff 3\left[\underbrace{(x^2-yz)}_{\text{الحد } 1}h_1+\underbrace{(y^2-xz)}_{\text{الحد } 2}h_2+\underbrace{(z^2-xy)}_{\text{الحد } 3}h_3\right]=0 \quad \text{---} (**).$$

توجد 4 حالات:

(0,25) الحالة (1): انعدام 3 حدود أي $x^2=yz$ و $y^2=xz$ و $z^2=xy$:

بالتعويض في الحد الأيسر للعبارة (*) نجد: $x^3+y^3+z^3-3xyz=0\neq 1$

ومنه $(x,y,z)\notin f^{-1}(\{1\})$

(0,25) الحالة (2): انعدام 2 حدود وعدم انعدام الثالث مثل: $x^2=yz$ و $y^2=xz$ و $z^2\neq xy$

بالتعويض في (**) نجد: $(z^2-xy)h_3=0$ ومنه $h_3=0$

$$\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} \iff \begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\0\end{pmatrix}=h_1\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1}+h_2\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2}$$

إذن $\operatorname{Ker} df_{(x,y,z)}=\operatorname{Vect}\{e_1,e_2\}$ إذن $\dim \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)}=2$ وهو المطلوب.

(0,25) الحالة (3): انعدام حد واحد وعدم انعدام حدين مثال: $x^2=yz$ و $y^2\neq xz$ و $z^2\neq xy$

بالتعويض في (**) نجد $(y^2-xz)h_2+(z^2-xy)h_3=0$ ومنه $h_2=\left(\frac{xy-z^2}{y^2-xz}\right)h_3$

$$\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} \iff \begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1\\ \left(\frac{xy-z^2}{y^2-xz}\right)h_3\\ h_3\end{pmatrix}=h_1\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1}+h_3\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \frac{xy-z^2}{y^2-xz}\\ 1\end{pmatrix}}_{u_1}$$

إذن $\operatorname{Ker} df_{(x,y,z)}=\operatorname{Vect}\{e_1,u_1\}$ إذن $\dim \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)}=2$ وهو المطلوب.

(0,25) الحالة (4): عدم انعدام جميع الحدود أي: $x^2\neq yz$ و $y^2\neq xz$ و $z^2\neq xy$.

ومنه:

$$(**)\Rightarrow h_1=\left(\frac{xz-y^2}{x^2-yz}\right)h_2+\left(\frac{xy-z^2}{x^2-yz}\right)h_3.$$

$$\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} \iff \begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\frac{xz-y^2}{x^2-yz}\right)h_2+\left(\frac{xy-z^2}{x^2-yz}\right)h_3\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{xz-y^2}{x^2-yz}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}}_{u_2}h_2+\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{xy-z^2}{x^2-yz}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{u_3}h_3$$

إذن $\operatorname{Ker} df_{(x,y,z)}=\operatorname{Vect}\{u_2,u_3\}$ إذن $\dim \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)}=2$ وهو المطلوب.

(0,5) 2) من أجل كل $(x,y,z)\in V$ ، $T_{(x,y,z)}V$ ؟

(0,5) $$T_{(x,y,z)}V=\operatorname{Ker} df_{(x,y,z)}=\{(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3,\ (x^2-yz)h_1+(y^2-xz)h_2+(z^2-xy)h_3=0\}$$

1) $\dim V=\dim \mathbb{R}^3-\dim \mathbb{R}=2$