جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي
كلية العلوم الدقيقة والعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
فرع الرياضيات السنة الثالثة LMD (S6)

يوم: 2014/05/21
المدة: ساعة ونصف
2014 - 2013

الإمتحـــان في مادة الهنـــدسة التفاضلية

التمرين01: لتكن M و N منوعتان طبولوجيتان قابلتان للتفاضل حيث: $dinM=m$ و $dinN=n$،
و $f:M\to N$ تطبيق، عرف ما يلي:

1. التمثيل المحلي لـ f.
2. قابلية تفاضل f عند $p\in M$، مع تعيين التطبيق $df(p)$ (بالتفصيل).

التمرين02:

1. هل الزوج (IR,f) يشكل خريطة على IR حيث:
$$f:IR\longrightarrow IR$$
$$t\mapsto f(t)=t^2$$
2. ليكن التطبيق $h:IR\longrightarrow IR$.

a. بين أنه إذا كان h تشاكلا تفاضليا من IR نحو IR فإن $\{(IR^n,h)\}$ أطلسا قابلا للتفاضل على IR

b. بين أن الأطلسين $\{(IR^n,Id_{IR})\}$ و $\{(IR^n,h)\}$ متكافئان إذا وفقط إذا كان h تشاكلا تفاضليا من IR نحو IR.

ملحوظة: السؤال 1 مستقل عن السؤال 2.

التمرين03: لنضع $V=\left\{(x,y,z,t)\in IR^4\,;\, x^2+y^2=z^2+t^2=\frac{1}{2}\right\}$

1. بين أن V منوعة طبولوجية جزئية من IR^4، وعين بعدها.
2. عين الفضاء المماسي لـ V عند النقطة (x,y,z,t) (أي: $T_{(x,y,z,t)}V$).
3. برهن أن V مستشاكل مع $S^1\times S^1$.(استعمل التطبيق: $g(x,y,z,t)=\sqrt{2}(x,y,z,t)$)

التمرين04:

أ- ليكن $w\in\Omega_1(IR^2)$ بحيث: $w(x,y)=(2x+y)dx+(2y+x)dy$

1. بين أن w شكل تفاضلي مغلق.
2. استنتج أن w شكل تفاضلي دقيق، ثم أوجد الدالة g من صنف C^1 في IR^2 بحيث: $dg=w$.

ب-أحسب كل من: $\alpha\wedge\beta$، و $\beta\wedge\alpha$، و $d\alpha$، و $d\beta$، و $d(\beta\wedge\alpha)$، و $d(\alpha\wedge\beta)$،
و $d\alpha\wedge d\beta$ و $d\beta\wedge d\alpha$ و $f^*\alpha$، و $f^*\beta$، و $f^*d\alpha$، و $f^*d\beta$ حيث:

$$\alpha(x,y,z)=2xy^2\,dx+2x^2y\,dy-2z\,dz \qquad \beta(x,y,z)=\frac{2\,dx}{1+x^2}+\frac{z\,dy}{1+y^2z^2}+\frac{y\,dz}{1+y^2z^2}$$

و

$$f\,:IR^2\longrightarrow IR^2$$
$$t\longrightarrow f(u,v)=(uv,v^2)$$

التنقيط:[**التمرين1**: 05 نقاط] [**التمرين2**: 05 نقاط] [**التمرين3**: 05 نقاط] [**التمرين4**: 05 نقاط]

التمرين 1 ① التمثيل المحلي لـ f / (3) نقاط

لتكن:

(0,25) — $\boxed{(U,\varphi)\ \text{خريطة من}\ M}$

(0,25) — (V,ψ) خريطة من N

(0,25) — $f(U)\subset V$

(0,25) — التمثيل المحلي لـ f وفق الخريطتين (U,φ) و (V,ψ)

(0,25) — $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m \xrightarrow{f_{\psi\varphi}} \psi(V)\subset\mathbb{R}^n$

(0,25) — $f_{\psi\varphi}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$.

---

② قابلية تفاضل f عند $p\in M$ / 2 نقاط

(0,25) — توجد $\boxed{(U,\varphi)\ \text{خريطة من}\ M}:$ $p\in U$

وخريطة (V,ψ) من N حيث $\boxed{f(U)\subset V}$

(0,25) — يكون f قابل للتفاضل عند $\varphi(p)$ $f_{\psi\varphi}$

(0,25) —

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "df(p)"] \arrow[d, "\theta_\varphi"'] & T_{f(p)}N \arrow[d, "\theta_\psi"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "df_{\psi\varphi}(\varphi(p))"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

(0,5) — $df(p)=\theta_\psi^{-1}\circ df_{\psi\varphi}(\varphi(p))\circ\theta_\varphi$.

التمرين 2: 1 نقطة

1) f ليس متباين $\Leftarrow (\mathbb{R},f)$ ليس خريطة — (1).

(تعريف المتشاكل أو خريطة / 0,25).

② / نقطتان

h تشاكل تفاضلي من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ $\Leftarrow f$ متشاكل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ — (0,25)

$\Leftarrow (\mathbb{R},h)$ خريطة (0,25) $\Leftarrow \{(\mathbb{R},h)\}$ أطلس (0,5) قابل للتفاضل على $\mathbb{R}$ (0,25)

③ $\{(\mathbb{R},Id_{\mathbb{R}})\}$ و $\{(\mathbb{R},h)\}$ متكافئان $\Leftrightarrow$ [h تشاكل تفاضلي من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$].

$\Leftarrow$ نفرض (I) صحيحة ونضع $(U_1,\varphi_1)=(\mathbb{R},Id)$ و $(U_2,\varphi_2)=(\mathbb{R},h)$ متلائمتان ومنه $\varphi_{12}=\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}=h^{-1}$

$h=\varphi_{21}=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ قابلة للتفاضل و h تقابلي (لأن $(\mathbb{R},h)$ خريطة) $\Leftarrow h$ تشاكل تفاضلي.

(II) $(\mathbb{R},h)$ أطلس قابل للتفاضل ولدينا $\varphi_{21}=h$ و $\varphi_{12}=h^{-1}$ قابل للتفاضل

③ 1

① لتكن M و N متنوعتين تفاضليتين حيث $\dim M = m$ و $\dim N = n$ ، $f : M \to N$

• التمثيل المحلي لـ f :

لتكن (U,φ) خريطة على M و (V,ψ) خريطة على N حيث $f(U) \subset V$.

التمثيل المحلي لـ f وفق الخريطتين (U,φ) و (V,ψ) هو التطبيق $f_{\psi\varphi}$ المعرف كما يلي:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d] \\ \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \arrow[r, "f_{\psi\varphi}"'] & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$f_{\psi\varphi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

نقول أن f قابل للتفاضل عند $p \in M$ إذا وجدت خريطة (U,φ) في M حيث $p \in U$ و خريطة (V,ψ) في N حيث $f(U) \subset V$ حيث التمثيل المحلي $f_{\psi\varphi}$ يكون قابل للتفاضل عند $\varphi(p)$.

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "df(p)"] \arrow[d, "\theta_\varphi"'] & T_{f(p)}N \arrow[d, "\theta_\psi"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "(df_{\psi\varphi})(\varphi(p))"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$df(p) = \theta_\psi^{-1} \circ df_{\psi\varphi}(\varphi(p)) \circ \theta_\varphi$$

حيث:

$\theta_\varphi : T_pM \to \mathbb{R}^m$

$v \mapsto \theta_\varphi(v) = d(\varphi \circ c)(0)$.

c ممثل تكافؤ منحنيات القابل للتفاضل عند 0 .

تمرين ②

① $f(t) = t^3$ تطبيق تقابلي مستمر و منه f تشاكل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

إذن الزوج $(\mathbb{R}, f)$ هو خريطة على $\mathbb{R}$.

② لدينا (h تشاكل تفاضلي) $\Leftarrow$ (f تشاكل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$) .

إذن $(\mathbb{R}, h)$ خريطة و منه $\{(\mathbb{R}, h)\}$ أطلس قابل للتفاضل على $\mathbb{R}$.

③ (الأطلسين $\{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$ و $\{(\mathbb{R}, h)\}$ متكافئان) $\Leftrightarrow$ (h تشاكل تفاضلي)

$\Leftarrow$ نفرض أن الأطلسين $\{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$ و $\{(\mathbb{R}, h)\}$ متكافئان و منه الخريطتين $(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})$ و $(\mathbb{R}, h)$ متلائمتين و منه تراكيبها قابلة للتفاضل $\varphi_1 = Id_{\mathbb{R}}$ و $\varphi_2 = h$

$\varphi_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = h^{-1}$ و $\varphi_{21} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = h$ قابل للتفاضل و منه $(\mathbb{R}, h)$ خريطة إذن h قابل

إذن h تشاكل تفاضلي من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ h تشاكل تفاضلي إذن $\varphi_{12} = h^{-1}$ و $\varphi_{21} = h$ قابل للتفاضل ←

(٤)

دروس المنطقة تبع

التمرين 02

$$V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x^2+y^2=z^2+t^2=\tfrac{1}{2}\}$$

1) البرهان أن V منوعة طبولوجية جزئية من $\mathbb{R}^4$ وتعيين بعدها.

نضع

$$f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$X=(x,y,z,t)\longmapsto f(X)=(\underbrace{x^2+y^2}_{f_1},\ \overbrace{z^2+t^2}^{f_2})$$

لدينا $V=f^{-1}(\{(\frac12,\frac12)\})$

ومنه لنبرهن أن $(\frac12,\frac12)$ قيمة عادية لـ f.

1) f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^4$ ولدينا من أجل $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$

$$df(\overbrace{x,y,z,t}^{X}):\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$\overbrace{(h_1,h_2,h_3,h_4)}^{H}\longmapsto df(X)(H)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(X)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(X)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\\h_4\end{pmatrix}$$

$$df(X)(H)=\begin{pmatrix}2x & 2y & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2z & 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\\h_4\end{pmatrix}\Leftrightarrow \boxed{df(X)(H)=\begin{pmatrix}2xh_1+2yh_2\\2zh_3+2th_4\end{pmatrix}\quad \forall X\in\mathbb{R}^4,\ \forall H\in\mathbb{R}^4}$$

لكي نبرهن أن $(\frac12,\frac12)$ قيمة عادية لـ f يكفي أن نبرهن أنه من أجل كل $\overbrace{(x,y,z,t)}^{X}\in f^{-1}(\{(\frac12,\frac12)\})$ $df(X)$ غامر من $\mathbb{R}^4$ في $\mathbb{R}^2$ ومنه من أجل كل $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ يوجد $H=(h_1,h_2,h_3,h_4)\in\mathbb{R}^4$ حيث $df(X)(H)=(\alpha,\beta)$ ومنه لدينا

$$X=(x,y,z,t)\in f^{-1}(\{(\tfrac12,\tfrac12)\})\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=\frac12\times(2\alpha)\\ z^2+t^2=\frac12\times(2\beta)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2\alpha+2y^2\alpha=\alpha\\ 2z^2\beta+2t^2\beta=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x(\alpha x)+2y(\alpha y)=\alpha\\ 2z(\beta z)+2t(\beta t)=\beta\end{cases}$$

ومنه يكفي أخذ $H=(h_1,h_2,h_3,h_4)=(\alpha x,\alpha y,\beta z,\beta t)$ وهو المطلوب.

$(\frac12,\frac12)$ قيمة عادية لـ f إذن $V=f^{-1}(\{(\frac12,\frac12)\})$ م.ج.ت من $\mathbb{R}^4$ بعدها هو:

$$\dim V=\dim\mathbb{R}^4-\dim\mathbb{R}^2=4-2=2\ \Leftrightarrow\ \boxed{\dim V=2}$$

2) ~~تعيين~~ من أجل $X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ تعيين T_XV:

$$T_XV=\ker df(X)=\{H=(h_1,h_2,h_3,h_4)\in\mathbb{R}^4,\ df(X)(H)=0\}$$
$$=\{H=(h_1,h_2,h_3,h_4)\in\mathbb{R}^4,\ 2xh_1+2yh_2=0,\ 2zh_3+2th_4=0\}$$
$$=\{(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2,\ \cancel{2}xh_1+\cancel{2}yh_2=0\}\times\{(h_3,h_4)\in\mathbb{R}^2,\ \cancel{2}zh_3+\cancel{2}th_4=0\}$$

إذن $T_XV=\Delta_1\times\Delta_2$

$\Delta_1=\{(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2,\ xh_1+yh_2=0\}$.

$\Delta_2=\{(h_3,h_4)\in\mathbb{R}^2,\ zh_3+th_4=0\}$.

3) البرهان أن V متشاكل مع $S^1\times S^1$: أي أن يوجد تطبيق g: $g:V\longrightarrow S^1\times S^1$ بحيث g يكون متشاكل.

(3) $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x,y,z,t) \mapsto g(x,y,z,t) = \sqrt{2}(x,y,z,t)$.

$g(V) = S^1 \times S^1$? ومنه

$\forall (x,y,z,t) \in V \Rightarrow g(x,y,z,t) \in S^1 \times S^1$.

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}x, \sqrt{2}y, \sqrt{2}z, \sqrt{2}t) \in S^1 \times S^1$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}x, \sqrt{2}y) \in S^1, \quad (\sqrt{2}z, \sqrt{2}t) \in S^1$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{2}y)^2 = 1 \quad (\sqrt{2}z)^2 + (\sqrt{2}t)^2 = 1$.

$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2) = 1 \quad 2(z^2+t^2) = 1$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{2} \quad z^2+t^2 = \frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow (x,y,z,t) \in V$

$\underline{g(V) = S^1 \times S^1}$.

إذن

إذن g غامر من V في $S^1 \times S^1$.

g متباين: $g(x_1,y_1,z_1,t_1) = g(x_2,y_2,z_2,t_2) \Rightarrow \sqrt{2}(\quad) = \sqrt{2}(\quad)$

$\Rightarrow (\quad) = (\quad)$.

إذن متباين إذن g تقابل.

$g^{-1} : S^1 \times S^1 \longrightarrow V$.

$(\alpha, \beta, \lambda, \gamma) \longmapsto g^{-1}(\alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)$.

g^{-1} مركب. وهو المطلوب

<u>التمرين 05</u>: $\omega \in \Omega_2(\mathbb{R}^2)$, $\omega(x,y) = (2x+y)\,dx + (2y+x)\,dy$

1) برهن أن ω مغلق. إذن لنضع $a(x,y) = (2x+y)$, $b(x,y) = (2y+x)$

إذن $\omega = a\,dx + b\,dy \Rightarrow d\omega = da \wedge dx + db \wedge dy$.

$\Rightarrow d\omega = \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy$.

$d\omega = (1-1)\,dx \wedge dy = 0$. $\boxed{d\omega = 0}$

إذن ω مغلق.

2) استنتج أن ω شكل تفاضلي دقيق (تام) $\exists g \in C^1 : dg = \omega$

حسب نظرية بوانكاريه: $\mathbb{R}^2$ محدب فهو نجمي بالنسبة لجميع نقاطه إذن

ω مغلق $\Leftarrow$ ω دقيق.

3) إيجاد g من C^1 في $\mathbb{R}^2$: $dg = \omega$?

(4) $dg(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dy = w(x,y)$

أولاً:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x + y \quad \text{—(1)} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y + x \quad \text{—(2)} \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow g(x,y) = x^2 + \varphi(y)$ —(3)

لكي إيجاد $\varphi(y)$ نعوض (3) في (1) نجد

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y) = 2y + x.$

$\boxed{\varphi(y) = y^2 + xy + c.}$ (4)

ومنه

$\boxed{g(x,y) = x^2 + y^2 + xy + c \quad , c \in \mathbb{R}}$ نعوض (4) في (3) نجد

(2).

$\alpha = 2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy - 2z\,dz.$

$\beta = \frac{2}{1+x^2}\,dx + \frac{z}{1+y^2z^2}\,dy + \frac{y}{1+y^2z^2}\,dz.$

$$\alpha\wedge\beta = \frac{2xy^2z}{1+y^2z^2}\,dx\wedge dy + \frac{2xy^3}{1+y^2z^2}\,dx\wedge dz + \frac{4x^2y}{1+x^2}\,dy\wedge dx + \frac{2x^2y^2}{1+y^2z^2}\,dy\wedge dz - \frac{4z}{1+x^2}\,dz\wedge dx - \frac{2z^2}{1+y^2dz^2}\,dz\wedge dy.$$

$$\boxed{\alpha\wedge\beta = \left(\frac{2xy^2z}{1+y^2z^2} - \frac{4x^2y}{1+x^2}\right)dx\wedge dy + \left(\frac{2xy^3}{1+y^2z^2} + \frac{4z}{1+x^2}\right)dx\wedge dz + \left(\frac{2x^2y^2+2z^2}{1+y^2z^2}\right)dy\wedge dz.}$$

$\beta\wedge\alpha = (-1)^{1\times1}\alpha\wedge\beta = -\alpha\wedge\beta \qquad \boxed{\beta\wedge\alpha = -\alpha\wedge\beta}$

نضع: $a(x,y,z) = 2xy^2, \; b(x,y,z) = 2x^2y, \; c(x,y,z) = -2z.$

$w = a\,dx + b\,dy + c\,dz \Rightarrow dw = da\wedge dx + db\wedge dy + dc\wedge dz.$

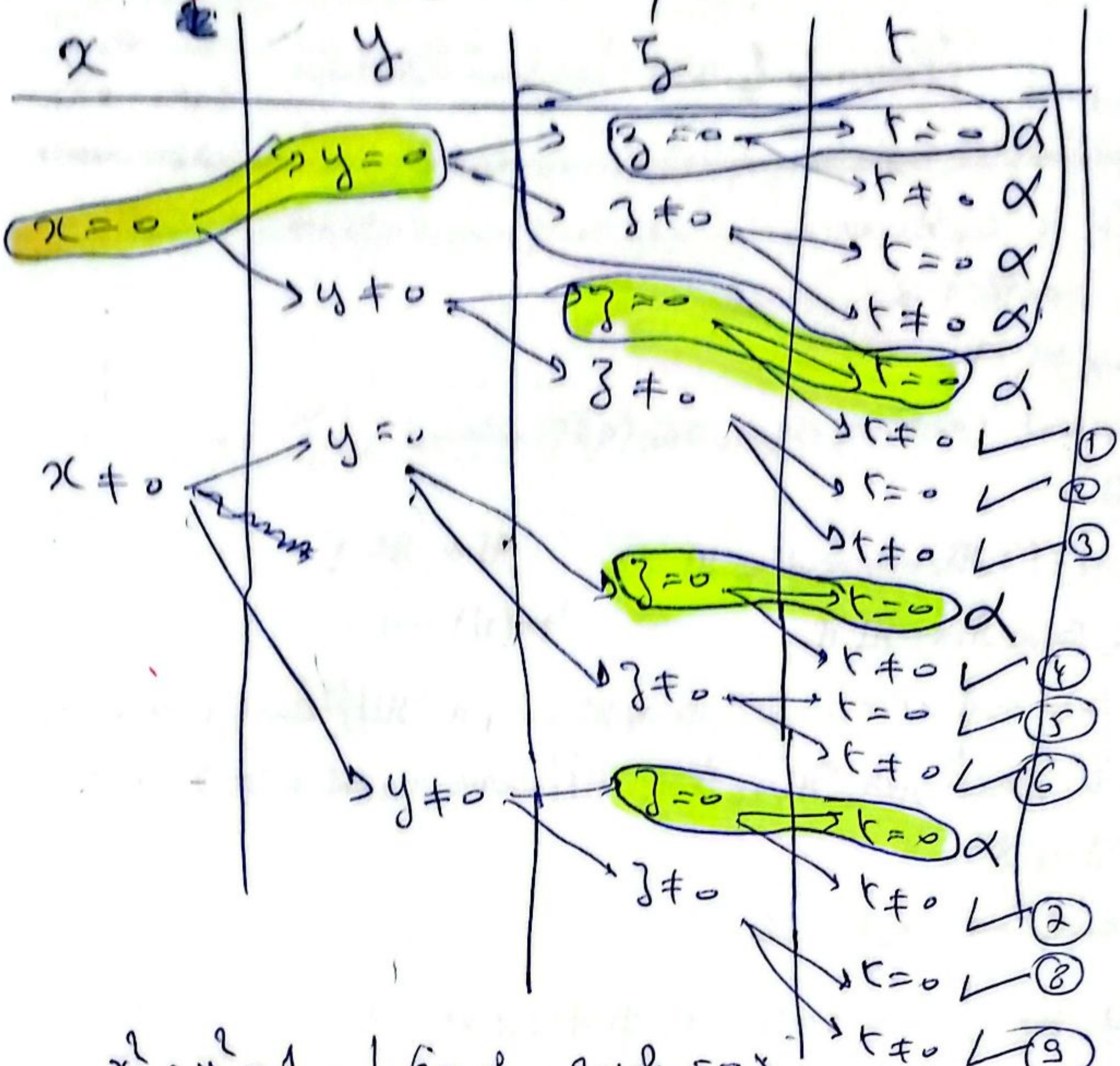
$dw = \frac{\partial a}{\partial y}\,dy\wedge dx + \frac{\partial a}{\partial z}\,dz\wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x}\,dx\wedge dy + \frac{\partial b}{\partial z}\,dz\wedge dy + \frac{\partial c}{\partial x}\,dx\wedge dz + \frac{\partial c}{\partial y}\,dy\wedge dz$

$dw = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy + \left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z}\right)dx\wedge dz + \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)dy\wedge dz.$

مكامل: $a(x,y,z) = 2xy^2, \; b(x,y,z) = 2x^2y, \; c(x,y,z) = -2z, \; w = \alpha..$

$\Rightarrow d\alpha = (4xy - 4xy)\,dx\wedge dy + \ldots = 0$

$$2x h_1 + 2y h_2 = 0 \ , \quad 2z h_3 + 2t h_4 = 0.$$



$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}. \qquad \left(\begin{array}{l} 2x h_1 + 2y h_2 = 0 \\ 2z h_3 + 2t h_4 = 0 \end{array} \right) - \mathrm{I}$$
$$z^2 + t^2 = \frac{1}{2}.$$

① $x = 0, y \neq 0, z = 0, t \neq 0$. $(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} h_2 = 0 \\ h_4 = 0 \end{cases}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

② $x = 0, y \neq 0, z \neq 0, t = 0$. $(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{cases}$. $e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

③ $x = 0, y \neq 0, z \neq 0, t \neq 0$, $(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} h_2 = 0 \\ h_4 = -\frac{z}{t} h_3 \end{cases}$, $e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{z}{t} \end{pmatrix}$.

④ $x \neq 0, y = 0$,

تمرين 03 :

$$V=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x^2+y^2=z^2+t^2=\frac{1}{2}\right\}.$$

1) برهان أن V م ت م من $\mathbb{R}^4$ ، وما هو بعدها ؟

0,5

$$f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2$$

$$X=(x,y,z,t)\longmapsto f(X)=\big(\underbrace{x^2+y^2}_{f_1(X)},\underbrace{z^2+t^2}_{f_2(X)}\big)$$

لدينا 0,5 $\boxed{V=f^{-1}\left(\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}\right)}$.

لنبرهن أن $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ قيمة عادية لـ f 0,25

* f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^4$. 0,5

$$df(X):\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2.$$

0,5

$$H=(h_1,h_2,h_3,h_4)\longmapsto df(X)(H)=\begin{pmatrix}2xh_1+2yh_2\\ 2zh_3+2th_4\end{pmatrix}$$

لابد أن نبرهن أنه من أجل كل $X\in f^{-1}\left(\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}\right)$. $df(X)$ غامر في $\mathbb{R}^4$ في $\mathbb{R}^2$. 0,25

نستعمل التعريف: نبرهن أنه من أجل كل $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ يوجد $H\in\mathbb{R}^4$ بحيث $df(X)(H)=(\alpha,\beta)$ ؟

$$X\in f^{-1}\left(\left\{\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\right\}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=\frac{1}{2}\\ z^2+t^2=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2\alpha+2y^2\alpha=\alpha\\ 2z^2\beta+2t^2\beta=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x(\alpha x)+2y(\alpha y)=\alpha\\ 2z(\beta z)+2t(\beta t)=\alpha\end{cases}$$ 0,5

ومنه يكفي أخذ $H=(h_1,h_2,h_3,h_4)=(\alpha x,\alpha y,\beta z,\beta t)$ 0,5 وهو مطلوب.

$\dim V=\dim\mathbb{R}^4-\dim\mathbb{R}^2=2,$ $\dim V=2$ 0,5

2) من أجل $X\in\mathbb{R}^4$ تعيين T_XV

0,5

$$T_XV=\ker df(X)=\{H\in\mathbb{R}^4,\ df(X)(H)=0\}\Leftrightarrow\{H\in\mathbb{R}^4,\ 2xh_1+2yh_2=0,\ 2zh_3+2th_3=0\}$$ 0,5

$$T_XV=\{(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2,\ xh_1+yh_2=0\}\times\{(h_3,h_4)\in\mathbb{R}^2,\ zh_3+th_4=0\}.$$

3) البرهان أن V متشاكل مع $S^1\times S^1$ $\Leftrightarrow$ يوجد تطبيق g متشاكل

$$g:V\longrightarrow S^1\times S^1$$

نضع $g(x,y,z,t)=\sqrt{2}(x,y,z,t)$. لنبرهن أن g متشاكل . 0,25

1) g مستمر على $\mathbb{R}^4$ ومنه فهو مستمر على V 0,25

2) g تقابل : α و y عناصر ويكفي أن نبرهن أن $g(V)=S^1\times S^1$.

$X\in V\Leftrightarrow g(X)\in S^1\times S^1$? 0,25

$$X\in V\Leftrightarrow g(X)=(\sqrt{2}x,\sqrt{2}y,\sqrt{2}z,\sqrt{2}t)\Leftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{2}y)^2=2(x^2+y^2)=1\\ (\sqrt{2}z)^2+(\sqrt{2}t)^2=2(z^2+t^2)=1\end{cases}$$

لأن $H\in V$

$$\Leftrightarrow g(X)\in S^1\times S^1.$$

التمرين 04: (9ن) $\omega(x,y) = (2x+y)\,dx + (2y+x)\,dy$, $\omega \in \Omega_1(\mathbb{R}^2)$

1) بين أن ω شكل تفاضلي مغلق: لنضع: $a(x,y) = 2x+y$, $b(x,y) = 2y+x$.

$\omega = a\,dx + b\,dy \Rightarrow d\omega = da\wedge dx + db\wedge dy = \frac{\partial a}{\partial y}\,dy\wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x}\,dx\wedge dy$ 0,25 0,25

$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx\wedge dy}$ 0,25 $\Rightarrow \boxed{d\omega = 0}$ 0,25 $\Rightarrow$ ω مغلق.

2) استنتج أن ω شكل تفاضلي دقيق $\Leftrightarrow \exists\, g \in C^1 : dg = \omega$ 0,25

حسب نظرية بوانكاري 0,25 $\mathbb{R}^2$ محدب بمفهوم نجمي بالنسبة لجميع نقاطه إذن 0,25

ω مغلق $\Leftarrow$ ω دقيق. 0,25

3) إيجاد g دالة C^1 على $\mathbb{R}^2$ بحيث $dg = \omega$

$dg(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dy = \omega(x,y)$ 0,25

ومنه

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x+y & (1) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y+x & (2) \end{cases}$$ 0,25

بمكاملة (1) بالنسبة لـ x نجد

$g(x,y) = x^2 + xy + \varphi(y)$ — (3) 0,25

بتعويض (3) في (2) نجد

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x + \varphi'(y) = 2y + x$ 0,25

$\Rightarrow \varphi'(y) = 2y \Rightarrow \boxed{\varphi(y) = y^2 + c}$ (4) 0,25

نعوض (4) في (3) نجد

$\boxed{g(x,y) = x^2 + y^2 + xy + c}$ 0,25

ب)

$\alpha(x,y,z) = 2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy - 2z\,dz$, $\beta(x,y,z) = \frac{2\,dx}{1+x^2} + \frac{z\,dy}{1+y^2z^2} + \frac{y\,dz}{1+y^2z^2}$.

$$\alpha\wedge\beta = \left(\frac{2xy^2z}{1+y^2z^2} - \frac{4x^2y}{1+x^2}\right)dx\wedge dy + \left(\frac{2xy^3}{1+y^2z^2} + \frac{4z}{1+x^2}\right)dx\wedge dz + \left(\frac{2x^2y^2+2z^2}{1+y^2z^2}\right)dy\wedge dz$$ 0,25

$\boxed{\beta\wedge\alpha = -\alpha\wedge\beta}$ 0,25

$\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz \Rightarrow d\omega = da\wedge dx + db\wedge dy + dc\wedge dz$.

$d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy + \left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z}\right)dx\wedge dz + \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)dy\wedge dz$.

$a = 2xy^2$, $b = 2x^2y$, $c = -2z$; $\omega = \alpha$.

$d\alpha = (4xy - 4xy)\,dx\wedge dy + 0\,dx\wedge dz + 0\,dy\wedge dz$ $\boxed{d\alpha = 0}$ 0,25

$a = \frac{2}{1+x^2}$, $b = \frac{z}{1+y^2z^2}$, $c = \frac{y}{1+y^2z^2}$, $\omega = \beta$.

$d\beta = 0\,dx\wedge dy + 0\,dx\wedge dz + \left(\frac{1-y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2} - \frac{1-y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2}\right)dy\wedge dz$ $\boxed{d\beta = 0}$ 0,25

$$d(\beta\wedge\alpha) = d\beta\wedge\alpha + (-1)^1 \beta\wedge d\alpha = 0$$ ٠,٢٥

$$d(\alpha\wedge\beta) = d(-(\beta\wedge\alpha)) = -d(\beta\wedge\alpha) = 0$$ ٠,٢٥

$$d\alpha\wedge d\beta = 0$$ ٠,٢٥

$$d\beta\wedge d\alpha = 0 .$$ ٠,٢٥

$$w = a\,dx + b\,dy + c\,dz .$$

$$f^* w = (a\circ f)\,df_1 + (b\circ f)\,df_2 + (c\circ f)\,df_3 .$$

$$\boxed{(f^* w)(u,v) = (a\circ f)(u,v)\,df_1(u,v) + (b\circ f)(u,v)\,df_2(u,v) + (c\circ f)(u,v)\,df_3(u,v).} \quad \text{— (1)}$$

$$f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)) = (uv, v^2, v) .$$

$$f_1(u,v) = uv \Rightarrow \boxed{df_1(u,v) = v\,du + u\,dv} \quad \text{— (2)}$$

$$f_2(u,v) = v^2 \Rightarrow \boxed{df_2(u,v) = 2v\,dv .} \quad \text{— (3)}$$

$$f_3(u,v) = v \Rightarrow \boxed{df_3(u,v) = dv} \quad \text{— (4)}$$

نعوض كل من (2) و (3) و (4) في (1) نجد

$$(f^* w)(u,v) = (a\circ f)(u,v)[v\,du + u\,dv] + (b\circ f)(u,v)[2v\,dv] + (c\circ f)(u,v)\,dv .$$

$$\boxed{(f^* w)(u,v) = [a(f(u,v))\cdot v]\,du + [a(f(u,v))\cdot u + b(f(u,v))\cdot 2v + c(f(u,v))]\,dv .}$$

$a(x,y,z) = 2xy^2$, $b(x,y,z) = 2x^2y$, $c(x,y,z) = -2z \Rightarrow w = \alpha .$

$$f^*\alpha = [2(uv)(v^2)^2 v]\,du + [2(uv)(v^2)^2 u + 2(uv)^2 v^2 \cdot 2v - 2v]\,dv .$$

$$\boxed{(f^*\alpha)(u,v) = 2uv^6\,du + [2u^2v^5 + 4u^2v^5 - 2v]\,dv}$$ ٠,٢٥

$a(x,y,z) = (z/1+x^2 z^2)$, $b(x,y,z) = z/1+y^2z^2$, $c(x,y,z) = y/1+y^2z^2 \Rightarrow w = \beta .$

$$(f^*\beta)(u,v) = \frac{2v}{1+u^2v^2}\,du + \left[\frac{2u}{1+u^2v^2} + \frac{2v^2 + \cancel{\ }\,v^2}{1+(v^2)^2 v^2}\right] dv$$

$$\boxed{(f^*\beta)(u,v) = \frac{2v}{1+u^2v^2}\,du + \left[\frac{2u}{1+u^2v^2} + \frac{3v^2}{1+v^6}\right] dv}$$ ٠,٢٥

$$f^* d\alpha = f^* d\beta = 0$$ ٠,٢٥ ٠,٢٥

$g(x) = g(x') \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{2}x' \Rightarrow x = x'$ — g متباينة 0,25

$g^{-1} : S^1 \times S^1 \longrightarrow V$ — 0,25

$y = (\alpha, \beta, \lambda, \gamma) \longmapsto g^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} y$ — g^{-1} معرف.

إذن g تقابل من V نحو $S^1 \times S^1$ — 0,25

تابع تمرين 03