كلية العلوم الدقيقة والعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
فرع الرياضيات السنة الثالثة LMD (S6)

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

يوم: 2014/06/12
المدة: ساعة ونصف
2014 - 2013

الإمتحان الإستدراكي في مادة الهندسة التفاضلية

التمرين 01:

1. ليكن التطبيق φ المعرف على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(t) = t^3$.

a. بين أن الزوج $(\mathbb{R}, \varphi)$ يشكل خريطة على $\mathbb{R}$، ثم استنتج أن $\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ أطلسا قابلا للتفاضل.

b. هل الأطلسين $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$ و $\acute{\mathcal{A}} = \{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ متكافئين.

2. لتكن M منوعة طبولوجية حيث: $dimM = m$.

a. ما هو تعريف بنية طبولوجية قابلة للتفاضل على M.

b. ليكن $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) ; i \in I\}$ أطلس على M، برهن أنه إذا كانت φ_i تشاكل تفاضلي من U_i نحو $\varphi_i(U_i)$ وذلك مهما يكن $i \in I$، فإن $(M, \mathcal{A})$ منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل.

ملحوظة: السؤال 1 مستقل عن السؤال 2.

التمرين 02:

لنضع $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; [4x^2(x^2 - 1) + y^2]^2 + z^2 = \frac{1}{4}\}$

1. بين أن V منوعة طبولوجية جزئية من $\mathbb{R}^3$ ، وعين بعدها.

2. عين الفضاء المماسي V لـ عند النقطة (x, y, z) (أي: $T_{(x,y,z)}V$).

التمرين 03:

أ- لنضع $U = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$، ولتكن f دالة معرفة من U نحو $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}$$

و $w \in \Omega_2(U)$ معرفة كما يلي:

$$w(x, y, z) = zdx \wedge dy + ydz \wedge dx + xdy \wedge dz$$

1. أحسب كل من df، و $df \wedge w$، dw، ثم استنتج $d(fw)$.

2. ما هي قيمة α حتى يكون w شكل تفاضلي مغلق.

ب- أحسب كل من: $\alpha \wedge \beta$، و $d\alpha$، و $d\beta$، و $d\alpha \wedge d\beta$ ، و $d(\alpha \wedge \beta)$، حيث:

$$\alpha(x, y, z) = xdy \wedge dz \quad \text{و} \quad \beta(x, y) = ydx - xdy$$

ت- أحسب $\varphi^* w$ حيث: $w(x, y) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

و φ التطبيق المعرف:

$$\varphi : [0,1] \to IR^2 - \{(0,0)\}$$

$$(t) \mapsto \varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

التنقيط: [التمرين 1 : 06 نقاط] [التمرين 2 : 06 نقاط] [التمرين 3 : 08 نقاط]

بالتوفيق

تصحيح الامتحان الاستدراكي الخاص بمادة الهندسة التفاضلية ليوم: 2014/06/12

حل التمرين 01:

1 a) $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ البرهان أن $(\mathbb{R}, \varphi)$ خريطة؟

$t \longmapsto t^3$

1) $\mathbb{R}$ مفتوح 2) φ مستمرة على $\mathbb{R}$.

3) φ تقابل على $\mathbb{R}$؟

φ مستمرة على $\mathbb{R}$ + φ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ $(\varphi'(t) = 3t^2)$

اذن φ تقابل على $\mathbb{R}$ نحو $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

4) $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. مستمرة على $\mathbb{R}$.

$t \longmapsto \varphi^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$

اذن φ متشاكل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ إذن $(\mathbb{R}, \varphi)$ خريطة.

ومنه $\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ أطلس ذو خريطة واحدة إذن فهو تفاضلي.

b) هل الأطلسين $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$ و $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ متكافئين

لنضع: $(U_1, \varphi_1) = (\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})$ و $(U_2, \varphi_2) = (\mathbb{R}, \varphi_2)$.

لدينا $\varphi_{12} = \varphi \circ \varphi^{-1}$ لكن φ^{-1} لا يقبل الاشتقاق عند 0 ومنه φ_{12} ليس تقابل على $\mathbb{R}$.

اذن الأطلسين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ غير متكافئين.

2 M منوعة طبولوجية بعدها m.

a) تعريف بنية قابل للتفاضل على M:

هي صنف تكافؤ لأطلس قابل للتفاضل.

$\dot{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}'$ أطلس ق.ت على M $, \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ أطلس ق.ت$\}$.

b) ليكن $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ أطلس على M.

بحيث φ_i تشاكل تفاضلي من U_i نحو $\varphi_i(U_i)$، $\forall i \in I$

المطلوب: البرهان أن $(E, \mathcal{A})$ م. ط ق. ت؟

يكفي أن نبرهن أن $\mathcal{A}$ أطلس قابل للتفاضل.

أي أن جميع خرائط $\mathcal{A}$ متلائمة مثنى مثنى.

لتكن (U_i, φ_i) و (V_j, φ_j) خريطتين في $\mathcal{A}$.

لنفرض أن $U_i \cap U_j \neq \phi$ ومنه لنبرهن أن φ_{ij} و φ_{ji} قابل للتفاضل؟

$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$, $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$

بما أن φ_i و φ_j تشاكل تفاضلي إذن φ_i و φ_j قابلة للتفاضل

φ_i و φ_j تقابل و φ_i^{-1} و φ_j^{-1} قابل للتفاضل

ومنه φ_{ij} و φ_{ji} قابلة للتفاضل

وهو المطلوب.

التمرين 02:

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (4x^2(x^2-1) + y^2)^2 + z^2 = \frac{1}{4}\}$.

1) البرهان أن V م. جزئية من $\mathbb{R}^3$ وتعيين بعدها؟

لنضع:

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (4x^2(x^2-1) + y^2)^2 + z^2$.

لدينا $V = f^{-1}(\{\frac{1}{4}\})$ يكفي أن نبرهن أن $\frac{1}{4}$ نقطة عادية لـ f.

f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^3$ (لأنه كثير حدود) ولدينا

لكل $X = (x, y, z)$ $df(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$H = (h_1, h_2, h_3) \longmapsto df(X)(H) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(X) \frac{\partial f}{\partial y}(X) \frac{\partial f}{\partial z}(X)\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$.

$df(X)(H) = [16x(2x^2-1)[4x^2(x^2-1) + y^2]] h_1 +$

$+ [4y[4x^2(x^2-1) + y^2]] h_2 + 2z h_3$.

لنبرهن أنه من أجل كل $X \in f^{-1}(\{\frac{1}{4}\})$: $df(X)$ غامر

لدينا $(df(X) = 0) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x = 0 \text{ أو } x = 1 \text{ أو} \\ \text{و: } y = 0 \text{ و } z = 0 \end{array}\right)$

و $X \in f^{-1}(\{\frac{1}{4}\}) \Leftrightarrow (4x^2(x^2-1) + y^2)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ (*)

ومنه $df(X) = 0$ ينعدم أيا كان (1) لا تحقق

الحالة (1) $x = y = z = 0$ لا تحقق (*)

الحالة الثانية $x = 1, y = z = 0$ لا تحقق (*).

الحالة الثالثة: $x = -1, y = z = 0$ لا تحقق (*)

ومنه إذن $df(X) \neq 0$

وهو المطلوب إذن $\frac{1}{4}$ قيمة عادية لـ f.

إذن V منوعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ ولدينا

$\dim V = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathbb{R} = 3 - 1 = 2$, $\boxed{\dim V = 2}$

2) إيجاد $T_X V$ $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$T_X V = \{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3, 16[4x^3(x^2-1)^2 + xy^2(x^2-1)] h_1$

$+ [16x^2y(x^2-1) + 4y^3] h_2 + 2z h_3\}$.

التمرين 03

التمرين 01

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^\alpha$$

$$w(x,y,z) = z\,dx\wedge dy + y\,dz\wedge dx + x\,dy\wedge dz.$$

0,5 $df(x,y,z) = 2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}[x\,dx + y\,dy + z\,dz].$

0,5 $df\wedge w = 2\alpha(x^2+y^2+z^2)^\alpha\, dx\wedge dy\wedge dz.$

0,5 $dw = 3\,dx\wedge dy\wedge dz.$

$d(fw) = df\wedge w + f\,dw.$

0,5 $d(fw) = (2\alpha+3)(x^2+y^2+z^2)^\alpha\, dx\wedge dy\wedge dz.$

0,5 $\alpha = \frac{-3}{2}.$

$\alpha = x\,dy\wedge dz.\quad \beta = y\,dx - x\,dy.$

0,5 $\alpha\wedge\beta = xy\, dx\wedge dy\wedge dz.$

0,5 $d\alpha = dx\wedge dy\wedge dz.$

0,5 $d\beta = -2\,dx\wedge dy.$

0,5 $d\alpha\wedge d\beta = 0$

0,5 $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^2\alpha\wedge d\beta = 0.$

$$w(x,y) = \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{a}dx + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{b}dy.$$

$\varphi_1(t) = \cos(2\pi t)\qquad \varphi_2(t) = \sin(2\pi t).$

0,5 $d\varphi_1(t) = -2\pi\sin(2\pi t)\,dt\qquad$ 0,5 $d\varphi_2(t) = 2\pi\cos(2\pi t)\,dt.$

0,5 $a(\varphi(t)) = -\quad 2\pi t\qquad$ 0,5 $b(\varphi(t)) = \cos(2\pi t)\,dt$

0,5 $\varphi^* w(t) = a(\varphi(t))\,d\varphi_1(t) + b(\varphi(t))\,d\varphi_2(t).$

0,5 $\varphi^* w(t) = 2\pi t\ dt$

تمرين 04

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , (4x^2(x^2-1)+y^2)^2 + z^2 = \frac{1}{4}\}$.

1) البرهان أن V م جزئية من $\mathbb{R}^3$ وتعيين بعدها ؟

0,25 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$X = (x,y,z) \longmapsto f(X) = [4x^2(x^2-1)+y^2]^2 + z^2$

لدينا 0,25 $V = f^{-1}(\{\frac{1}{4}\})$.

0,25 f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^3$.

$\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\quad df(X) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

0,25 $H = (h_1,h_2,h_3) \longmapsto df(X)(H) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(X), \frac{\partial f}{\partial y}(X), \frac{\partial f}{\partial z}(X)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$

0,25 $df(X)(H) = [16x(2x^2-1)[4x^2(x^2-1)+y^2]]\,h_1 +$

$+[4y\,[4x^2(x^2-1)+y^2]]\,h_2 + 2z\,h_3$

لنبرهن 0,25 $\frac{1}{4}$ قيمة عادية لـ f $\Leftrightarrow$ 0,25 يعني أن $df(X) : X \in f^{-1}(\{\frac{1}{4}\})$ غامر

لدينا $(df(X) = 0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = y = z = 0 & (1) \text{ أو} \\ x = 1 ,\ y = z = 0 & (2) \text{ أو} \\ x = -1 ,\ y = z = 0 & (3) \end{pmatrix}$ 0,25

نلاحظ أن الحالات (3)، (2)، (1) لا تحقق $X \in f^{-1}(\{\frac{1}{4}\})$ إذن $df(X) \neq 0$

0,25 و $Im\,df(X) \neq \{0\}$ ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$ إذن $Im\,df(X) = \mathbb{R}$ ومنه

$df(X)$ غامر

إذن V م. جزئية من $\mathbb{R}^3$ ولدينا

$\dim V = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathbb{R}$

0,25 $\boxed{\dim V = 2}$

2) إيجاد $T_X V$ 　 $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

0,25 $T_X V = \ker df(X)$.

0,25 $T_X V = \{H \in \mathbb{R}^3 ,\ 16[4x^3(x^2-1)^2 + xy^2(x^2-1)]\,h_1$

$+ 4[4x^2y(x^2-1) + y^3]\,h_2 + 2z\,h_3\}$.

تمرين 02 : 8 نقاط.

$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\omega(x,y,z) = z\, dx\wedge dy + y\, dz\wedge dx + x\, dy\wedge dz$

$\boxed{df = 2\alpha (x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1} [x\,dx + y\,dy + z\,dz]}$ 0,5

$df\wedge\omega = 2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}[x^2 dx\wedge dy\wedge dz + y^2 dy\wedge dz\wedge dx + z^2 dz\wedge dx\wedge dy]$

$\boxed{df\wedge\omega = 2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha} dx\wedge dy\wedge dz}$ 0,5

$d\omega = dz\wedge dx\wedge dy + dy\wedge dz\wedge dx + dx\wedge dy\wedge dz$

$\boxed{d\omega = 3\, dx\wedge dy\wedge dz}$ 0,5

$d(f\omega) = df\wedge\omega + f\, d\omega$.

$\boxed{d(f\omega) = (2\alpha+3)(x^2+y^2+z^2)^{\alpha} dx\wedge dy\wedge dz}$ 0,5

2 إيجاد قيمة α حتى يكون $(f\omega)$ مغلق $\Leftrightarrow d f\omega = 0 \Leftrightarrow 2\alpha+3=0$

إذن $\boxed{\alpha = \frac{-3}{2}}$ 0,5

1 $\alpha(x,y,z) = x\, dy\wedge dz$, $\beta(x,y) = y\,dx - x\,dy$ (2,5)

$\alpha\wedge\beta = xy\, dy\wedge dz\wedge dx \Rightarrow \boxed{\alpha\wedge\beta = xy\, dx\wedge dz\wedge dz}$ 0,5

$\boxed{d\alpha = dx\wedge dy\wedge dz}$ 0,5

$d\beta = dy\wedge dx - dx\wedge dy \Rightarrow \boxed{d\beta = -2\,dx\wedge dy}$ 0,5

$\boxed{d\alpha\wedge d\beta = 0}$ 0,5 $d(\alpha\wedge\beta) = \cancel{d\alpha\wedge\beta} + (-1)^2 \cancel{\alpha\wedge d\beta}$ $\boxed{d(\alpha\wedge\beta) = 0}$ 0,5

~~$d\alpha\wedge\beta = dx\wedge dy\wedge dz$~~

ج حساب $\varphi^*\omega$ حيث

$\omega(x,y) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, $\varphi: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

$t \longmapsto \varphi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

نضع $a(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $b(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $\varphi_1(t) = \cos 2\pi t$, $\varphi_2(t) = \sin 2\pi t$.

$\omega = a(x,y)\,dy + b(x,y)\,dx \Rightarrow \boxed{\varphi^*\omega = a\circ\varphi(t)\, d\varphi_2 + b\circ\varphi(t)\, d\varphi_1}$ 0,5

$a\circ\varphi(t) = a(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = \boxed{\cos 2\pi t = a\circ\varphi(t)}$ 0,5 $\boxed{b\circ\varphi(t) = b(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = -\sin 2\pi t = b\circ\varphi(t)}$ 0,5

$\boxed{d\varphi_2(t) = 2\pi\cos 2\pi t}$ 0,5 $\boxed{d\varphi_1(t) = -2\pi \sin 2\pi t}$ 0,5

$\varphi^*\omega = 2\pi(\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t)\,dt \Rightarrow \boxed{\varphi^*\omega = 2\pi t}$ 0,5