

Géométrie différentielle

Table des matières

Chapitre 1. Calcul différentiel	1
1. Différentielles	1
2. Inversion locale et fonctions implicites	10
3. Equations différentielles	15
4. Partitions de l'unité	25
Chapitre 2. Variétés différentielles	27
1. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$	27
2. Variétés	32
3. Fibré tangent	39
4. Sous-variétés	46
Chapitre 3. Feuilles de TD	51
1. TD1 : calcul différentiel	51
2. TD2 : sous-variétés, variétés, revêtements et quotients	55
3. TD3 : fibré tangent, sous-variétés et plongements	59
Chapitre 4. Corrections partielles des feuilles de TD	63
1. TD1	63
2. TD2	72
3. TD3	83
Chapitre 5. Examens	93
1. Mars 2015	93
2. Mars 2015 : correction de l'exercice 1.2	95
3. Mai 2015	99
4. Mai 2015 : correction	100

CHAPITRE 1

Calcul différentiel

1. Différentielles

Référence : cours de l'ENS de Frédéric Paulin (Topologie, analyse et calcul différentiel, disponible en ligne).

1.1. Différentielle d'ordre un. Si E et F sont des e.v.n, on note $L(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues $E \rightarrow F$. Si F est un Banach, alors $L(E, F)$ est un Banach.

Une application $f : U \rightarrow F$, où U est un ouvert de E , est dite *différentiable* en $a \in U$ quand il existe $g \in L(E, F)$ telle que

$$(1.1) \quad f(a+h) - f(a) = g(h) + o(h).$$

L'égalité (1.1) est à comprendre comme une *inégalité locale* au voisinage de a , au sens suivant : (1.1) exprime le fait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $h \in E$, si $|h| < r$, alors

$$|f(a+h) - f(a) - g(h)| < \varepsilon|h|.$$

Notation. L'application linéaire g est la *différentielle* de f . On la note $df(a)$ ou $f'(a)$ ou $Df(a)$.

On remarque facilement qu'il y a *unicité* de la différentielle en un point, et que la différentiabilité implique la continuité.

On définit de manière évidente la différentiabilité dans un ouvert.

On dit que f est C^1 en a quand f est différentiable au voisinage de a , et quand $x \rightarrow f'(x)$ est continue en a . Noter que $x \rightarrow f'(x)$ est une application de U vers $L(E, F)$.

Quand $E = \mathbb{R}$, alors $f'(x) \in L(\mathbb{R}, F) \simeq F$, et on note $f'(x)h = \underbrace{h}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{f'(x)}_{\in F}$.

Proposition 1.1.

- (1) Si f est constante, sa différentielle est nulle.
- (2) Si f est la restriction d'une application linéaire, alors $f'(x) \equiv f$ pour tout x .
- (3) $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$.
- (4) Si l'espace d'arrivée est un produit : la différentiabilité équivaut à la différentiabilité des composantes de la fonction.
- (5) Linéarité de l'application différentielle.
- (6) Si E et F sont des Banach, si U est un ouvert de E , si $f : U \rightarrow f(U)$ est un homéomorphisme différentiable en a et tel que $f'(a)$ soit bijective, alors f^{-1} est différentiable en $f(a)$, et $f^{-1}(f(a)) = f'(a)^{-1}$.
- (7) L'application $\text{inv} : u \in GL \rightarrow u^{-1} \in GL$ est C^1 , et $\text{inv}'(u)h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$.

PREUVE. (3) On calcule

$$g(f(a+h)) = g\left(f(a) + f'(a)h + o(h)\right) = g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)h + o(h)) + o(f'(a)h + o(h)).$$

La première égalité par différentiabilité de f , la seconde par différentiabilité de g . Comme $f'(a)$ est continue :

$$o(f'(a)h + o(h)) = o(h).$$

Comme $g'(f(a))$ est continue :

$$g'(f(a))o(h) = o(h).$$

(6) Par complétude de E et F , l'application linéaire inverse $f'(a)^{-1}$ est automatiquement continue (par linéarité, bijectivité et continuité de $f'(a)$). On note $y = f(x)$ (notation non ambiguë car f est un homéomorphisme) et $b = f(a)$. Alors par différentiabilité de f :

$$y - b - f'(a)(x - a) = |x - a|\varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$. Donc

$$(1.2) \quad x - a = f'(a)^{-1}(y - b) - |x - a|f'(a)^{-1}\varepsilon(x),$$

et en majorant :

$$|x - a| \leq C|y - b| + \delta C|x - a|,$$

avec δ arbitrairement petit si $|x - a|$ est petit. En particulier $\delta C \leq 1/2$ si $|x - a|$ assez petit. Donc

$$(1.3) \quad |x - a| \leq 2C|y - b|, \text{ pour } |x - a| \leq r, \text{ pour un certain } r > 0.$$

Revenons à (1.2). On peut réécrire (1.2) :

$$(1.4) \quad f^{-1}(y) - f^{-1}(b) = f'(a)^{-1}(y - b) - |x - a|f'(a)^{-1}\varepsilon \circ f^{-1}(y).$$

Il suffit maintenant de remarquer que $\varepsilon \circ f^{-1}(y) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow b$, par continuité de f^{-1} et propriété de ε . Donc avec (1.3),

$$\left| |x - a|f'(a)^{-1}\varepsilon \circ f^{-1}(y) \right| \leq 2C|y - b|\varepsilon \circ f^{-1}(y) = o(y - b),$$

et avec (1.4) on a donc prouvé la différentiabilité de f^{-1} , et aussi calculé $(f^{-1})'(b)$. $\square$

Remarque. Si on ne suppose plus $f'(a)$ bijective, alors le résultat n'est plus vrai. Cf le contre-exemple $x \rightarrow x^3$ dans $\mathbb{R}$.

1.2. Théorème des accroissements finis.

Théorème 1.2. Si U est un ouvert convexe de E et $f : U \rightarrow F$ différentiable telle que $|f'(x)| \leq C$ pour tout $x \in U$, alors pour tous $x, y \in U$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

Précisément : si $[x, x+h] \subset U$ et si f est différentiable en tout point de $]x, x+h[$, alors

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \sup_{0 < t < 1} |f'(x+th)||h|.$$

Le Théorème 1.2 en découle.

Corollaire 1.3. *Si la dérivée de f est nulle partout dans un connexe U , alors f est constante dans U .*

PREUVE. Soit $a \in U$. On pose

$$V = \{x \in U, f(x) = f(a)\}.$$

Alors V est non vide, et fermé dans U par continuité de f :

$$V = U \cap f^{-1}(\{f(a)\}).$$

Par ailleurs, V est ouvert dans U : pour tout $b \in V$, on peut trouver un voisinage convexe U' de b contenu dans U (une petite boule, par exemple). Si $x \in U'$, alors $|f(x) - f(b)| \leq 0$ par le Th des accroissements finis. Donc $f(x) = f(b) = f(a)$ pour tout x proche de b . On conclut par connexité de U . $\square$

1.3. Différentielles partielles. Dans ce paragraphe, l'espace de départ E est un produit :

$$E = E_1 \times \cdots \times E_n.$$

On note U un ouvert de E , et encore $f : U \rightarrow F$ (E et F sont des evn).

Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$, on dit que f admet une dérivée (ou une différentielle) partielle par rapport à la i -ème variable (ou coordonnée) quand

$$x \rightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

est différentiable en a_i .

Notation. On note $d_i f(a)$, ou $\partial_{x_i} f(a)$, ou $D_i f(a)$, ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la différentielle partielle par rapport à la i -ème variable.

Si $E_i = \mathbb{R}$ alors $\partial_i f(a) \in L(\mathbb{R}, F) \simeq F$, et

$$\partial_i f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{t}.$$

Proposition 1.4. *Si f est différentiable, alors les dérivées partielles existent.*

PREUVE. Soit

$$A : x \rightarrow (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

On pose

$$g(x) = (f \circ A)(x).$$

Alors g est différentiable, comme f et A , et

$$g'(a_i)h = f'(A(a_i))A'(a_i)h = f'(a)A'(a_i)h,$$

et comme A est affine :

$$A'(a_i)h = (0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0).$$

La différentiabilité de g est justement l'existence de la dérivée partielle de f . On a par définition de $\partial_i f$:

$$g'(a_i)h = \partial_i f(a)h$$

et donc l'égalité

$$(1.5) \quad \partial_i f(a)h = f'(a)(0, \dots, 0, \underset{(i)}{h}, 0, \dots, 0).$$

□

La proposition suivante examine la réciproque :

Proposition 1.5. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *f est C^1*
- (2) *f a des dérivées partielles continues*

DÉMONSTRATION. (1) $\implies$ (2) : l'existence des dérivées partielles est donnée par la Proposition 1.4. On a aussi, par la preuve de la Proposition 1.4,

$$\partial_i f(a) = f'(a) \circ A,$$

et donc la continuité de $x \rightarrow \partial_i f(x)$ en $x = a$. (Puisque A est linéaire continue, et donc que l'application $u \rightarrow u \circ A$ est continue dans $L(E, F)$.)

(2) $\implies$ (1) : On note $a = (a_1, \dots, a_n)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$. On note aussi

$$u_i(x) = (a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, a_i + x, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Alors

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{1 \leq i \leq n} f(u_i(h_i)) - f(u_i(0)).$$

Identité algébrique qu'on vérifie facilement dans le cas $n = 2$. On remarque que $f \circ u_i$ est différentiable en $x = 0$, pour tout i , si $|h|$ est assez petit, par hypothèse sur f . Et

$$(f \circ u_i)'(0) = \partial_i f(u_i(0)).$$

Donc

$$f(u_i(h_i)) - f(u_i(0)) = \partial_i f(u_i(0))h_i + o(h_i).$$

Mais comme $\partial_i f(u_i(0)) \rightarrow \partial_i f(a)$ quand $h \rightarrow 0$, on a donc

$$(\partial_i f(u_i(0)) - \partial_i f(a))h_i = o(h).$$

Si bien que

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i f(a)h_i + o(h).$$

On a prouvé que la différentielle de f existe en a et vaut

$$(1.6) \quad f'(a)h = \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i f(a)h_i,$$

ce qui implique directement la continuité de $x \rightarrow f'(x)$. □

Contre-exemple si on ne suppose pas la continuité des dérivées partielles : la fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Les dérivées partielles suivant x et y existent, ne sont pas continues. La fonction f n'est pas différentiable en $(0, 0)$, car elle n'est même pas continue.

1.4. Différentielles d'ordre supérieur. On dit que f est *deux fois différentiable* en $a \in U$ quand f est différentiable dans un ouvert V autour de a et que $f' : x \in V \rightarrow f'(x) \in L(E, F)$ est différentiable en a .

Notation. On note $d^2f(a)$ ou $D^2f(a)$ ou $f''(a)$ la différentielle seconde.

On définit de manière évidente une notion de *différentiabilité à l'ordre deux dans un ouvert*.

On remarque que $L(E, L(E, F)) \simeq L_2(E, F)$, l'espace des applications bilinéaires $E \times E \rightarrow F$, via

$$\begin{aligned} L(E, L(E, F)) &\rightarrow L_2(E, F) \\ u &\rightarrow ((x, y) \rightarrow u(x)(y)) \end{aligned}$$

qui admet pour réciproque

$$\begin{aligned} L_2(E, F) &\rightarrow L(E, L(E, F)) \\ u &\rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow u(x, y))). \end{aligned}$$

Remarque 1.6. *L'évaluation d'une application linéaire en un vecteur donné h est linéaire continue : $e_h : u \in L(E, F) \rightarrow u(h) \in F$ est linéaire continue. Donc si f est deux fois différentiable en a , alors*

$$(1.7) \quad g(x) = e_h \circ f'(x)$$

est différentiable en $x = a$. On calcule :

$$g'(x)h' = e'_h(f'(x))f''(x)h'$$

et comme e_h est linéaire : $e'_h(f'(x)) \equiv f'(x)$, et donc

$$g'(x)h' = (f''(x)h')h,$$

qu'on peut noter, cf la remarque ci-dessus,

$$(1.8) \quad g'(x)h' = f''(x)(h', h).$$

Remarque que (1.7) et (1.8) nous donnent une manière de calculer la différentielle seconde en pratique : on calcule d'abord $f'(x)$ suivant un certain vecteur h , c'est l'égalité (1.7), puis on prend le résultat de (1.7) où on considère que h est fixé et on dérive par rapport à x , et on trouve (1.8).

Cas d'un espace produit au départ : on note $\partial_{ij}^2 f(a)$, ou encore parfois $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, la i -ème dérivée partielle de $\partial_j f$ au point a , quand elle existe.

Considérons maintenant (1.6) dans le cas où f est deux fois différentiable en a . En appliquant le résultat de la Remarque 1.6, on différencie le membre de gauche et le membre de droite dans (1.6), pour trouver

$$(f''(x)h')h = \sum_{1 \leq j \leq n} (\partial_i f(x)h_i)'h' = \sum_{1 \leq j \leq n} ((\partial_i f)'(x)h')h_i.$$

On applique maintenant (1.6) à $\partial_i f$:

$$(\partial_i f)'(x)h' = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j(\partial_i f)(x)h_j.$$

Et $\partial_j(\partial_i f)$ est ce qu'on a décidé de noter $\partial_{ji}^2 f$. Donc

$$(\partial_i f)'(x)h' = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_{ji}^2 f(x)h_j.$$

Finalement

$$(1.9) \quad f''(x)(h', h) = \sum_{1 \leq j, i \leq n} (\partial_{ji}^2 f(x)h_j)h_i = \sum_{1 \leq j, i \leq n} \partial_{ji}^2 f(x)(h_j, h_i)$$

Quand l'espace de départ est $E = \mathbb{R}^n$ et que l'espace d'arrivée est $F = \mathbb{R}^p$, les dérivées partielles sont des éléments de $\mathbb{R}^p$, et on note

$$(1.10) \quad f''(x)(h', h) = \sum_{1 \leq j, i \leq n} h_i h_j \partial_{ji}^2 f(x).$$

Proposition 1.7. *Si f est deux fois différentiable en a , alors f'' est bilinéaire symétrique.*

PREUVE. On se donne $h, h' \in E$, et on considère la fonction

$$g(t) = f(a + th + h') - f(a + th) - t f''(a)(h', h).$$

Alors g est différentiable, et

$$g'(t) = (f'(a + th + h') - f'(a + th))h - f''(a)(h', h).$$

Ce qu'on peut réécrire

$$g'(t) = (f'(a) + f''(a)(th + h') + o(th + h') - f'(a) - f''(a)(th) + o(th))h - f''(a)(h', h),$$

et donc

$$g'(t) = o(th + h')h = o(|(h, h')|^2).$$

Donc, par le Théorème 1.2,

$$|g(1) - g(0)| \leq \varepsilon(|h|^2 + |h'|^2),$$

pour ε arbitrairement petit. On calcule finalement

$$g(1) - g(0) = f(a + h + h') - f(a + h) - f''(a)(h', h) - f(a + h') + f(a).$$

Donc $f''(a)(h', h)$ approxime à $\varepsilon(|h|^2 + |h'|^2)$ près la fonction *symétrique* $f(a + h + h') - f(a + h) - f(a + h') + f(a)$. En changeant les rôles de h et h' on a donc

$$|f''(a)(h', h) - f''(a)(h, h')| \leq \varepsilon(|h|^2 + |h'|^2).$$

Comme ε est arbitraire, on a donc $f''(a)(h, h') = f''(a)(h', h)$, ce qu'on voulait. $\square$

Exemple 1.8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$, et pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Alors

$$f(x, 0) \equiv 0, \quad f(0, y) \equiv 0,$$

donc $\partial_1 f(0,0)$ existe, $\partial_2 f(0,0)$ existe, et toutes deux valent 0. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, les dérivées partielles existent aussi et valent

$$g_1(x,y) = \partial_1 f(x,y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \underbrace{\partial_x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)}_{\equiv 0 \text{ en } (0,y)},$$

et

$$g_2(x,y) = \partial_2 f(x,y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \underbrace{\partial_y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)}_{\equiv 0 \text{ en } (x,0)}.$$

Montrons que les dérivées partielles croisées $\partial_{12} f(0,0)$ et $\partial_{21} f(0,0)$ existent et sont distinctes. La fonction

$$g_1(0,y) = -y^3$$

existe et est dérivable en $y = 0$, de dérivée égale à -1 . Cela signifie exactement que $\partial_{21} f(0,0) = -1$. De manière symétrique, $g_2(x,0) = x^3$, et donc $\partial_{12} f(0,0) = +1$.

On a donc

$$(1.11) \quad \partial_{12} f(0,0) \neq \partial_{21} f(0,0).$$

Vérifions que cela ne contredit pas le résultat de la Proposition 1.7. On a précisément

$$g_1(x,y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{yx^4 + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \quad g_2(x,y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On vérifie sans difficulté que g_1 et g_2 sont continues en $(0,0)$. Donc f est C^1 au voisinage de $(0,0)$ (Proposition 1.5). Sa différentielle est l'application

$$f'(x,y)(h_1, h_2) = h_1 g_1(x,y) + h_2 g_2(x,y).$$

La différentielle seconde de f (si elle existe), évaluée au point $(0,0)$ et selon les directions (h'_1, h'_2, h_1, h_2) est la différentielle de $f'(x,y)(h_1, h_2)$ évaluée au point $(0,0)$ et selon la direction (h'_1, h'_2) (cela d'après la Remarque 1.6). Calculons donc $\partial_1 g(0,0)$:

$$g_1(x,0) \equiv 0 \quad \text{donc} \quad \partial_1 g_1(0,0) = 0.$$

On sait déjà que $\partial_2 g_1(0,0) = -1$. Donc, par la formule (1.6), si g_1 était différentiable en $(0,0)$, on aurait

$$g_1(x,y) = -y + o(x,y).$$

On calcule

$$g_1(x,y) + y = \frac{yx^4 + 4x^2 y^3 - y^5 + y(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2yx^4 + 6y^3 x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Mais donc

$$g_1(x,x) + x = 2x \neq o(x).$$

La conclusion est que g_1 n'est pas différentiable en $(0,0)$, donc que f n'est pas deux fois différentiable en $(0,0)$, et donc (1.11) ne contredit pas la Proposition 1.7.

La notion de différentiabilité à l'ordre deux peut être relativement difficile à vérifier ou infirmer, cf l'exemple ci-dessus. La Proposition suivante donne un critère plus maniable d'égalité des dérivées croisées :

Proposition 1.9. *Si $\partial_{ij}f$ et $\partial_{ji}f$ existent et sont continues dans un voisinage de a , alors $\partial_{ij}f(a) = \partial_{ji}f(a)$.*

PREUVE. On reprend le schéma de la preuve de la Proposition 1.7, en posant

$$g(t) = f(a + th + h') - f(a + th) - t\partial_{ji}f(a)(h_j, h_i),$$

avec

$$h = (0, \dots, 0, \underset{(i)}{h_i}, 0, \dots, 0), \quad h' = (0, \dots, 0, \underset{(j)}{h'_j}, 0, \dots, 0).$$

Comme dans la preuve de la Proposition 1.7,

$$(1.12) \quad g'(t) = (\partial_i f(a + th + h') - \partial_i f(a + th))h_i - \partial_{ji}f(a)(h_j, h_i).$$

Le point clé de la preuve de la Proposition 1.7 consistait à écrire

$$f'(a + th + h')h = f'(a)h + f''(a)(th + h', h) + o(|h, h'|^2).$$

Ici il faut procéder autrement, parce qu'on ne sait a priori pas dériver deux fois dans la direction h . C'est là qu'intervient la continuité des dérivées croisées :

$$\partial_i f(a + th + h')h_i = \partial_i f(a + th)h_i + \partial_{ji}f(a + th)(h_j, h_i) + o(|h, h'|^2),$$

et par continuité de $\partial_{ji}f$, on a donc

$$\partial_i f(a + th + h')h_i = \partial_i f(a + th)h_i + \partial_{ji}f(a)(h_j, h_i) + o(|h, h'|^2).$$

En revenant à (1.12), on a donc

$$g'(t) = o(|h, h'|^2).$$

Donc comme dans la preuve de la Proposition 1.7,

$$f(a + h + h') - f(a + h) - f(a + h') + f(a) - \partial_{ji}f(a)(h_j, h_i) = o(|h, h'|^2).$$

Le membre de gauche ci-dessus étant symétrique en h, h' , on a donc

$$\partial_{ij}f(a)(h_i, h_j) - \partial_{ji}f(a)(h_j, h_i) = 0,$$

ce qu'on voulait prouver. □

On note $L_1(E, F) := L(E, F)$ et on définit par récurrence $L_p(E, F) = L(E, L_{p-1}(E, F))$. On dit que f est p fois différentiable en a quand f est $p - 1$ fois différentiable dans un voisinage V de a , et que $x \in V \rightarrow d^{p-1}f(x) \in L_{p-1}(E, F)$ est différentiable en a . On note $d^p f$ ou $f^{(p)}$ ou $D^p f$ la différentielle d'ordre p . On remarque que $d^{p+q}f = d^p(d^q f)$.

Remarque 1.10. *Une remarque qui fait écho à la Remarque 1.6 : si f est $p \geq 2$ fois différentiable en a , alors pour $2 \leq q \leq p$, pour $h_q, \dots, h_p$ fixés, l'application*

$$(h_1, \dots, h_{q-1}) \rightarrow f^{(p)}(a)(h_1, \dots, h_p)$$

est la $(q - 1)$ -ème différentielle en a de l'application

$$x \rightarrow f^{(p-(q-1))}(a)(h_q, \dots, h_p).$$

Par exemple, la différentielle de

$$x \rightarrow f''(x)(h_1, h_2)$$

est

$$x \rightarrow (h_3 \rightarrow f^{(3)}(x)(h_1, h_2, h_3).$$

Proposition 1.11. *Si f est p fois différentiable en a , alors pour tout σ dans le groupe symétrique de $[1, p]$, on a*

$$f^{(p)}(x)(h_1, \dots, h_p) = f^{(p)}(x)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(p)}).$$

En particulier, si $E = \mathbb{R}^n$, alors l'ordre des dérivées partielles n'a pas d'importance.

Par exemple, si f est 3 fois différentiable en $a = (a_1, a_2, a_3)$, alors dérivons d'abord suivant $e_1 = (1, 0, 0)$, puis suivant $e_2 = (0, 1, 0)$ puis suivant $e_3 = (0, 0, 1)$. On obtient $f^{(3)}(a)(e_1, e_2, e_3) = \partial_{123}^3 f(a)$. Si on dérive d'abord suivant e_2 puis suivant e_1 puis suivant e_3 , on obtient

$$f^{(3)}(a)(e_2, e_1, e_3) = \partial_{213}^3 f(a).$$

Ces dérivées partielles sont donc égales. Plus généralement, la dérivée partielle d'ordre p (définie par récurrence) :

$$(1.13) \quad \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(a)$$

ne dépend que (de f et a et) du multi-indice

$$(1.14) \quad m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n,$$

dont la première coordonnée est égale au cardinal de $\{j \in \{1, \dots, p\}, i_j = 1\}$, c'est-à-dire au nombre de fois qu'on dérive dans la première direction d'espace dans (1.13), etc.

Etant donné un multi-indice m comme dans (1.14), on note donc

$$\partial^m f = \partial_1^{m_1} \partial_2^{m_2} \dots \partial_n^{m_n} f.$$

On dit que f est de classe C^p quand f est p fois différentiable et que sa différentielle d'ordre p est continue. La propriété d'être p fois différentiable comme la propriété d'être C^p sont stables par composition.

Proposition 1.12. *Soit $p \geq 1$, et des Banach E, F . Soit U ouvert dans E . On suppose que $f : U \subset E \rightarrow f(U)$ est un homéomorphisme, de classe C^p en a , tel que $f'(a)$ soit bijective. Alors $f^{-1} : f(U) \rightarrow E$ est de classe C^p en a .*

Même énoncé avec p fois différentiable à la place de C^p .

PREUVE. Récurrence à partir de la Proposition 1.1(6). □

On termine cette partie avec un peu de vocabulaire :

- Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, on appelle matrice jacobienne de f en a la matrice de $f'(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. C'est une matrice à p lignes et n colonnes. Quand $n = p$, on appelle Jacobien de f en a le déterminant de $f'(a)$.

On identifie application linéaire et matrice associée (via le choix, presque toujours implicite, de bases au départ et à l'arrivée). Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, on note $f = (f_1, \dots, f_p)$

(on a fait un choix de base à l'arrivée) et alors $f'_j(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$. Via la formule (1.6), si e_i est le i -ème vecteur de base dans $\mathbb{R}^n$ (choix de base au départ) on a donc $f'_j(x)e_i = \partial_i f_j(x) \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire : la j -ème ligne de $f'(x)$ est le vecteur ligne

$$(f'_j(x)e_1 \ f'_j(x)e_2 \ \dots \ f'_j(x)e_n) = (\partial_1 f_j(x) \ \partial_2 f_j(x) \ \dots \ \partial_n f_j(x)).$$

Autrement dit, la matrice jacobienne $f'(x)$ est la matrice $(\partial_j f_i(x))_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq p}$, avec i indice des lignes et j indice des colonnes.

- Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, on appelle *rang* de f en a la dimension de l'image de $f'(a)$. C'est un entier inférieur au min de n et p . On dit que f est une *immersion* en a quand $f'(x)$ est injective. On dit que f est une *submersion* en a quand $f'(x)$ est surjective.

Remarques : le rang (d'une famille continue $M(x)$ d'applications linéaires) est une fonction semi-continue inférieurement. En effet, le rang est la taille du plus grand mineur non nul. Par continuité, si un mineur est non nul en un point x_0 , il est non nul dans un voisinage de x_0 . Donc $\text{rg} M(x) \geq \text{rg} M(x_0)$ pour x dans un voisinage de x_0 .

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une immersion en x_0 , alors $n \leq p$, et $\dim \text{Im } f'(x) = n$, par le théorème du rang. Si f est une submersion en x_0 , alors $p \leq n$, et $\dim \text{Im } f'(x) = p$, par le théorème du rang. En particulier, dans les deux cas, le rang est maximal. Par la remarque précédente, la propriété d'être une immersion ou une submersion est donc locale (par opposition à *ponctuelle*) : si f est une immersion (submersion) en x_0 , alors f est une immersion (submersion) dans un voisinage de x_0 .

- Une application $f : U \rightarrow V$ est dite un C^k -difféomorphisme quand f est C^k , bijective, d'inverse C^k .
- Une application $f : U \rightarrow V$ est dite un C^k -difféomorphisme local au voisinage d'un point $a \in U$ quand il existe un voisinage V de a dans U tel que $f|_V$ soit un C^k -difféomorphisme sur son image.

2. Inversion locale et fonctions implicites

Référence : cours de Frédéric Paulin (Topologie, analyse et calcul différentiel), disponible en ligne.

Théorème 1.13 (Théorème d'inversion locale). *Soit E, F deux Banach et U un ouvert de E . Soit $f : U \rightarrow F$, de classe C^k dans U . Si $f'(a)$ est bijective, alors f est un C^k -difféomorphisme local au voisinage de a .*

PREUVE. L'application linéaire $f'(a)^{-1}$ est linéaire continue $F \rightarrow E$ (car E et F sont complets). On pose

$$g(x) = f'(a)^{-1}(f(x+a) - f(a)).$$

Alors $g : V \rightarrow E$, où V est un voisinage de 0 dans E , satisfait $g(0) = 0$, $g'(0) = \text{Id}$. Si on prouve que g est un C^k -difféomorphisme local dans un voisinage de 0, alors

$$f(x) = f'(a)(g(x-a) + f(a))$$

sera un C^k -difféomorphisme local au voisinage de a . Autrement dit, on s'est ramené au cas $a = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \text{Id}$.

On pose

$$h(x) = g(x) - x.$$

Alors $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. Comme $x \rightarrow h'(x)$ on a donc $|h'(x)| \leq 1/2$ pour x petit, disons $|x| \leq r$. Donc par le TAF (Théorème 1.2),

$$|h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|,$$

pour x, y dans la boule $\bar{B}(0, r)$. En particulier,

$$(1.15) \quad h(\bar{B}(0, r)) \subset \bar{B}(0, r/2).$$

Et donc g est injective dans $\bar{B}(0, r)$, car si $f(x) = f(x')$ alors

$$|x - x'| = |h(x) - h(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|,$$

et donc $x = x'$.

On pose

$$\mathbf{X} = C^0(\bar{B}(0, r/2), \bar{B}(0, r)),$$

les applications continues de la boule $\bar{B}(0, r/2) \subset E$ dans la boule $\bar{B}(0, r) \subset E$. L'espace $\mathbf{X}$ est un complet du Banach $C^0(\bar{B}(0, r/2), E)$ (qui muni de la norme uniforme $|\phi| = \max_{x \in \bar{B}(0, r/2)} |\phi(x)|$ est un Banach car E est complet). L'identité $\text{Id}_{|\bar{B}(0, r/2)}$ est un élément de $\mathbf{X}$. On pose

$$F : \begin{cases} \mathbf{X} \rightarrow C^0(\bar{B}(0, r/2), E) \\ \phi \mapsto \text{Id}_{|\bar{B}(0, r/2)} - h \circ \phi. \end{cases}$$

Alors $F(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$, d'après (1.15). Par ailleurs, F est 1/2-Lipschitz comme h . Donc par le Théorème du point fixe de Banach, F a un unique point fixe ϕ_0 dans $\mathbf{X}$. On a ainsi

$$\text{Id}_{|\bar{B}(0, r/2)} - h \circ \phi_0 = \phi_0, \quad \text{et donc} \quad g \circ \phi_0 = \text{Id}_{|\bar{B}(0, r/2)}.$$

On pose enfin

$$V = g^{-1}(B(0, r/2)) \cap B(0, r).$$

C'est un ouvert par continuité de g . L'application $g|_V : V \rightarrow g(V)$ est continue, injective, d'inverse $\phi_0|_{g(V)}$ qui est continue. Donc $g|_V$ est un homéomorphisme. Comme g est C^k et que $g'(0) = \text{Id}$ est bijective, on conclut avec la Proposition 1.12. $\square$

Remarque 1.14. Dans la preuve précédente, $g(V) = B(0, r/2)$. En effet, soit $x \in B(0, r/2)$. Il existe $y \in B(0, r/2)$ tel que $g(\phi_0(y)) = x$. Mais $\phi_0(y) \in B(0, r)$ car $\phi_0 \in \mathbf{X}$, et $g(\phi_0(y)) \in B(0, r/2)$ nous dit que $\phi_0(y) \in g^{-1}(B(0, r/2))$. Donc $\phi_0|_{g(V)} \equiv \phi_0$.

Remarque 1.15. Il y a une petite imprécision dans la preuve ci-dessus. En dimension infinie, la boule $\bar{B}(0, r/2)$ n'est pas compacte (c'est le Théorème de Riesz). En particulier, les fonctions continues sur la boule $\bar{B}(0, r/2)$ ne sont pas nécessairement bornées dans la boule, et si elles sont bornées le sup n'est pas nécessairement le max. La norme dans $\mathbf{X}$ devrait donc être définie par $|\phi| = \sup_{x \in \bar{B}(0, r/2)} |\phi(x)|$ (sup au lieu de max), mais en fait le sup n'est pas nécessairement fini. On définit une distance, dite distance uniforme, dans $\mathbf{X}$ par

$$d(f, g) = \min \left(1, \sup_{x \in \bar{B}(0, r/2)} |f(x) - g(x)| \right).$$

Alors $C^0(\bar{B}(0, r/2), F)$ est métrique complet pour cette distance d , et $\mathbf{X}$ en est un fermé, donc complet. On peut donc appliquer le Théorème du point fixe de Banach dans $\mathbf{X}$. Si F est de dimension finie, alors il n'y a rien à changer dans la preuve ci-dessus.

Corollaire 1.16. Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ (même contexte que dans le TIL), de classe C^k , telle que $f'(x)$ soit bijective pour tout x . Alors $f(U)$ est un ouvert. Si de plus f est injective, alors f est un C^k -difféomorphisme $U \rightarrow f(U)$.

PREUVE. Au voisinage de tout $x \in U$ il existe $V_x \subset U$ sur lequel f est un difféomorphisme, en particulier $f(V_x)$ est ouvert. Donc

$$f(U) = f\left(\bigcup_{x \in U} V_x\right) = \bigcup_{x \in U} f(V_x)$$

est un ouvert. Si on suppose de plus f injective, alors f est bijective $U \rightarrow f(U)$, C^k , de réciproque C^k au voisinage de tout point par le TIL. Donc f est un C^k -difféo. $\square$

Remarque 1.17. Remarquer que l'image d'un ouvert par un C^k -difféo n'est pas nécessairement un ouvert : cf l'injection $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2, 0)$ qui est un C^∞ -difféo sur son image, mais dont l'image n'est pas ouverte dans $\mathbb{R}^3$. Cette situation (de l'injection $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$) n'est justement PAS celle du TIL, dans lequel on suppose $f'(x_0)$ bijectif, donc $f'(x)$ localement bijectif (f' étant continue et GL ouvert), et donc $f(U)$ ouvert par le Corollaire 1.16, où U est l'ouvert dans lequel on applique le TIL.

Théorème 1.18 (Théorème des fonctions implicites). Soit E, F, G trois Banach, et U un ouvert de $E \times F$. Soit $f : U \rightarrow G$, de classe C^k , $k \geq 1$. Soit $(a, b) \in U$, avec $f(a, b) = 0$. On suppose que $\partial_2 f(a, b)$ est bijective $F \rightarrow G$. Alors

- il existe U' un ouvert contenant (a, b) ,
- il existe V un ouvert contenant a ,
- il existe $g : V \rightarrow F$, de classe C^k , telle que $g(a) = b$,

tels que la proposition

$$(x, y) \in U' \quad \text{et} \quad f(x, y) = 0$$

soit équivalente à la proposition

$$x \in V \quad \text{et} \quad y = g(x).$$

PREUVE. Quitte à translater f , on peut supposer $f(a, b) = 0$. On pose

$$\phi : \begin{cases} U \rightarrow E \times G \\ (x, y) \rightarrow (x, f(x, y)) \end{cases}$$

C'est une application C^k . On calcule

$$\phi'(a, b) = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ \partial_1 f(a, b) & \partial_2 f(a, b) \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse sur f , $\phi'(a, b)$ est donc bijective. Par le TIL : il existe U' un voisinage de (a, b) dans U , tel que $\phi|_{U'} : U' \rightarrow \phi(U')$ soit un C^k -difféo. On note ψ le difféo réciproque. Alors

$$\psi(\phi(x, y)) = \psi(x, f(x, y)) = (x, y), \quad \text{donc} \quad \psi(x, z) = (x, \psi_2(x, z)).$$

On remarque que $f(x, y) = 0$ équivaut à $\phi(x, y) = (x, 0)$. Et si $(x, y) \in U'$, alors $\phi(x, y) = (x, 0)$ équivaut à $\psi(x, 0) = (x, y)$. Donc

$$(x, y) \in U', \quad f(x, y) = 0$$

équivaut à

$$(x, 0) \in \phi(U'), \quad y = \psi_2(x, 0).$$

On pose $V := \{x \in U, (x, 0) \in \phi(U')\}$. C'est un ouvert de E , en tant qu'image réciproque de l'ouvert $\phi(U')$ (ouvert comme conséquence du TIL, cf le Corollaire 1.16 et la Remarque 1.17) par l'application continue $x \rightarrow (x, 0)$. On pose $g(x) = \psi_2(x, 0)$. Alors

$$(x, 0) \in \phi(U'), \quad y = \psi_2(x, 0)$$

équivaut à

$$x \in V, \quad y = g(x)$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 1.19. *En particulier, il existe localement autour de (a, b) des solutions à l'équation $f(x, y) = 0$ qui sont distinctes de (a, b) : tous les points du graphe de la fonction implicite g .*

Une autre façon de formuler le Théorème des fonctions implicites :

Théorème 1.20 (TFI, bis). *Soit E, F, G trois Banach, et U un ouvert de $E \times F$. Soit $f : U \rightarrow G$, de classe C^k , $k \geq 1$. On suppose que $\partial_2 f(a, b)$ est bijective $F \rightarrow G$. Alors*

- *il existe U' un ouvert contenant (a, b) ,*
- *il existe V un ouvert contenant a ,*
- *il existe W un ouvert contenant $f(a, b)$,*
- *il existe $\varphi : V \times W \rightarrow F$, de classe C^k , telle que $\varphi(a, f(a, b)) = b$,*

tels que pour tout $(x, z) \in V \times W$, il existe une unique solution y à l'équation $f(x, y) = z$ telle que $(x, y) \in U'$, et cette solution est donnée par $y = \varphi(x, z)$.

PREUVE. On suit bien sûr la preuve du Th 1.18. On a $\phi|_{U'} : (x, y) \rightarrow (x, f(x, y))$ qui est un difféo, avec $\phi(U')$ ouvert dans G , contenant $(a, f(a, b))$. En particulier, $\phi(U')$ contient un produit $V \times W$, avec V voisinage de a et W voisinage de $f(a, b)$. Soit $(x, z) \in V \times W$, et considérons l'équation (d'inconnue y) : $z = f(x, y)$. Alors $\phi(x, y) = (x, z) \in \phi(U')$, donc $\phi^{-1}(x, z) = (x, \psi_2(x, z)) = (x, y)$, c'est-à-dire $y = \psi_2(x, z)$. Donc $\varphi = \psi_2$ convient. $\square$

Théorème 1.21 (Forme normale des immersions). *soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, de classe C^k , $k \geq 1$. On suppose que f est une immersion en x_0 . Alors il existe ψ un C^k -difféomorphisme local dans un voisinage de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que*

$$\psi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0),$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ proche de x_0 .

Donc localement, $f = \psi^{-1} \circ \iota$, où ι est l'injection canonique $\iota : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par $\iota(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$. Autrement dit, localement et à un difféomorphisme près dans l'espace d'arrivée, f est l'injection canonique $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

PREUVE. A un changement de notation près,

$$\text{Im } f'(x_0) = \text{vect } \{e_1, \dots, e_n\}.$$

On pose

$$g(x_1, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_p),$$

définie dans un voisinage de $(x_0, 0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-n}$. On a $g(x_0, 0) = f(x_0)$. C'est une application C^k comme f . On remarque que $\text{Im } g'(x_0)$ contient les e_i pour $1 \leq i \leq n$, et aussi les e_j pour $n+1 \leq j \leq p$. Donc $g'(x_0)$ est surjective, donc bijective. On note ψ le difféomorphisme réciproque donné par le TIL, défini dans un voisinage de $f(x_0)$. Alors $\psi \circ g = \text{Id}$ dans un voisinage de $(x_0, 0)$, donc en particulier

$$\psi \circ g(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \equiv (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

pour $(x_1, \dots, x_n)$ dans un voisinage de x_0 . C'est ce qu'on voulait prouver. $\square$

Théorème 1.22 (Forme normale des submersions). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une submersion C^k en x_0 . Alors il existe ϕ un C^k -difféomorphisme local dans un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$(1.16) \quad f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p).$$

Autrement dit, si on note π la projection canonique $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par

$$\pi : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_p),$$

alors localement autour de x_0 on a $f = \pi \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} est un C^k -difféo dans un voisinage de x_0 . Autrement dit : à un difféomorphisme près dans l'espace de départ, f est (localement) la projection canonique $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

PREUVE. On peut trouver une famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ de p vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ tels que l'image de $f'(x_0)$ soit engendrée par les $f'(x_0)e_i$. A un changement de notation près (dans $\mathbb{R}^p$), on a donc

$$(1.17) \quad f'(x_0) \text{vect } \{e_1, \dots, e_p\} = \text{vect } \{e'_1, \dots, e'_p\},$$

où les e'_j sont les p premiers vecteurs de base dans $\mathbb{R}^p$. On pose

$$g(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1, \dots, x_n), x_{p+1}, \dots, x_n).$$

C'est une application C^k comme f , et

$$g'(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) & \dots & \partial_p f(x_0) & \star \\ 0 & \dots & 0 & \text{Id}_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Et $\partial_j f(x_0) = f'(x_0)e_j$, donc le rang des p premières lignes de $g'(x_0)$ est p . Donc $g'(x_0)$ est bijective. Par le TIL, on note ϕ le difféomorphisme réciproque. Alors

$$g \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (f \circ \phi(x_1, \dots, x_n), \phi_{p+1}(x), \dots, \phi_n(x)) = (x_1, \dots, x_n),$$

et donc (1.16). $\square$

Les Théorèmes 1.21 et 1.22 sont généralisables aux applications de rang constant, cf exercice 1.12 page 53.

3. Equations différentielles

Référence : mon cours d'EDO en L3, disponible en ligne.

On se limite à $y' = f(y)$, avec $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et U ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Une solution de l'équation différentielle $y' = f(y)$ est une application y dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $t \in I$, $y'(t) = f(y(t))$.

3.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Définition d'un problème de Cauchy associé à une équation différentielle $y' = f(y)$: c'est la donnée du système d'équations

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec y_0 dans le domaine de définition de f .

Théorème 1.23. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et localement Lipschitzienne, tout problème de Cauchy associé à

$$y' = f(y)$$

a une solution dans un intervalle fermé.

C'est-à-dire, sous l'hypothèse portant sur f dans l'énoncé du théorème, pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times U$, il existe $T > 0$ et une solution du problème de Cauchy

$$(1.18) \quad \begin{cases} y' = f(y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz :

- première étape : formulation intégrale de l'équation.
- deuxième étape : point fixe dans $C^0([t_0 - T, t_0 + T], \bar{B}(y_0, r))$.
- troisième étape (contenue dans le Corollaire plus bas) : une solution sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ prend ses valeurs dans $\bar{B}(y_0, r)$.

Remarque sur un cas “facile” : on suppose $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, globalement Lipschitz, avec une constante de Lipschitz K . On passe alors en revue les trois étapes de la preuve de Cauchy-Lipschitz :

- Etape zéro : pour toute boule fermée $\bar{B} \subset \mathbb{R}^d$, pour tout $T > 0$, l'espace $C^0([-T, T], \bar{B})$ muni de la norme uniforme est complet dans l'e.v.n. $C^0([-T, T], \mathbb{R}^n)$.
- Formulation intégrale : une fonction $y : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, dérivable est solution de $y' = f(y)$ sur $[-T, T]$ si et seulement si y est continue et

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(y(t')) dt', \quad \text{pour tout } t \in [-T, T].$$

- Deuxième étape : on pose

$$F : C^0([-T, T], B(y_0, r)) \rightarrow C^0([-T, T], \mathbb{R}^d)$$

définie par

$$F : y \rightarrow \left(t \rightarrow y_0 + \int_0^t f(y(t')) dt' \right).$$

On cherche T et r tels que l'image par F de $C^0([-T, T], B(y_0, r))$ soit incluse dans $C^0([-T, T], B(y_0, r))$. Il suffit de majorer :

$$|F(y)(t) - y_0| \leq \int_0^t |f(y(t'))| dt',$$

et comme f est K -Lipschitz :

$$|f(y(t'))| \leq |f(y_0)| + |f(y_0) - f(y(t'))| \leq |f(y_0)| + K|y_0 - y(t')| \leq |f(y_0)| + Kr.$$

Donc il suffit d'avoir

$$(|f(y_0)| + Kr)T \leq r.$$

– Troisième étape : on cherche r et T tels que F soit contractante :

$$|F(y_1)(t) - F(y_2)(t)| \leq \int_0^t |f(y_1(t')) - f(y_2(t'))| dt',$$

et donc

$$|F(y_1)(t) - F(y_2)(t)| \leq KT \sup_{[-T, T]} |y_1 - y_2|,$$

et donc F est contractante dès que $KT < 1$.

- Application du Théorème du point fixe de Banach : avec ce qui précède, on conclut que dès que r et T sont tels que $|f(y_0)| + KrT \leq r$ et $KT < 1$, l'application F a un unique point fixe dans $C^0([-T, T], \bar{B}(y_0, r))$.
- Cela ne prouve pas tout à fait l'unicité de la solution de l'équation différentielle : en effet, l'unicité a lieu dans l'espace $C^0([-T, T], \mathbb{R}^d)$, beaucoup plus grand que $C^0([-T, T], \bar{B}(y_0, r))$. Voir le Corollaire 1.25 plus bas.

Version “quantitative” de Cauchy-Lipschitz :

Remarque 1.24 (Cauchy-Lipschitz quantitatif). Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tels que dans $B(y_0, r) \subset U$, on ait (1) $|f| \leq M$, pour un certain $M > 0$, et (2) f globalement k -Lipschitz pour un certain $k > 0$. Alors en notant

$$T = \min \left(\frac{1}{2k}, \frac{r}{M} \right),$$

le Théorème (1.23) affirme qu'il existe une unique solution sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Corollaire 1.25. Sous les hypothèses du Théorème 1.23, il existe une unique solution au problème de Cauchy dans $[t_0 - T, t_0 + T]$, où T est donné dans la preuve du Théorème 1.23 (cf la Remarque 1.24).

Par la preuve du Théorème 1.23, on avait unicité dans le “petit” espace $C^0([t_0 - T, t_0 + T], \bar{B}(y_0, r))$. Le Corollaire 1.25 nous donne unicité dans l'espace beaucoup plus grand $C^0([t_0 - T, t_0 + T], U)$. La preuve du Corollaire 1.25 consiste à vérifier que les solutions à valeur dans la boule $\bar{B}(y_0, r)$ ne peuvent pas quitter la boule dans l'intervalle $[t_0 - T, t_0 + T]$.

On appellera dans la suite “Cauchy-Lipschitz” le résultat du Théorème 1.23 et du Corollaire 1.25.

3.2. Les trois corollaires fondamentaux du Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Corollaire 1.26. *On peut toujours prolonger une solution de sorte à ce qu'elle soit définie sur un ouvert. Précisément : si $J \subset I$ et $y : J \rightarrow U$ une solution (du problème de Cauchy (1.18)), alors il existe $\tilde{J}$ ouvert contenant J et $\tilde{y} : \tilde{J} \rightarrow U$ solution (du problème de Cauchy (1.18)) telle que $\tilde{y}|_J = y$.*

Preuve : soit y une solution définie sur J fermé, donnée par Cauchy-Lipschitz. Il suffit de considérer le problème de Cauchy en $t_\star = \sup J$, avec la donnée $y(t_\star)$. Cela fournit un prolongement à droite de $t_\star$.

Corollaire 1.27 (Unicité forte). *Si deux trajectoires (d'une même équation différentielle) se croisent, elles sont égales sur l'intersection de leur ensemble de définition. Précisément : si $y_1 : J_1 \rightarrow U$ et $y_2 : J_2 \rightarrow U$ sont solutions de $y' = f(y)$, et si $y_1(\underline{t}) = y_2(\underline{t})$ pour un certain $\underline{t} \in J_1 \cap J_2$, alors $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$.*

Preuve : par connexité. On vérifie que $\{t \in J_1 \cap J_2, y_1(t) = y_2(t)\}$ est ouvert et fermé dans $J_1 \cap J_2$.

Le Corollaire 1.27 décrit une propriété très forte de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle.

Corollaire 1.28. *Notion de solution maximale d'un problème de Cauchy, qui est unique.*

On note

$$\mathcal{J} := \{J \text{ intervalle ouvert contenant } t_0 \text{ et tel qu'il existe } y : J \rightarrow U \text{ solution sur } J\}.$$

La solution maximale $y_\star$ est définie sur $J_\star := \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$, par $y_\star(t) = y(t)$, pour n'importe quel y solution sur J , pour n'importe quel $J \in \mathcal{J}$ qui contient t .

Vocabulaire : la solution maximale est dite globale si $J_\star = \mathbb{R}$.

3.3. Autour du temps d'existence. On appelle temps d'existence (sous-entendu, vers le futur) le réel $T_\star > 0$ tel que $t_0 + T_\star = \sup J_\star$, où $J_\star$ est l'intervalle de définition de la solution maximale définie au paragraphe précédent. Le temps d'existence $T_\star$ dépend de f bien sûr, et aussi de y_0 . Il ne dépend pas de t_0 , car l'équation est autonome (c'est-à-dire : f indépendant de t). On note $T_\star = T_\star(f, y_0)$.

La Remarque 1.24 implique que le temps d'existence est localement uniformément minoré :

Proposition 1.29. *Soit $y_0 \in U$. Il existe un voisinage V de y_0 dans U tel que pour tout $y_1 \in V$, on ait $T_\star(f, y_1) \geq \alpha$.*

PREUVE. On va vérifier que $V = B(y_0, r/3)$ convient, avec r le rayon de la Remarque 1.24. En effet, si $(t_1, y_1) \in V$, alors $\bar{B}(y_1, r/3) \subset \bar{B}(y_0, r)$. Donc $|f| \leq M$ et f est k -Lipschitz en y dans V . Par la Remarque 1.24, cela implique $T_\star(f, y_1) \geq \min\left(\frac{r}{3M}, \frac{1}{2k}\right) \geq T_\star(f, y_0)/3$.

□

3.4. Comportement des solutions au bord de leur intervalle de définition.

Proposition 1.30 (Sortie des compacts). *Soit $y_\star : J_\star \rightarrow U$ la solution maximale d'un problème de Cauchy. Si $\sup J_\star < \mathbb{R}$, alors $y_\star$ sort de tout compact de U au voisinage de $\sup J_\star$. Précisément : pour tout K compact inclus dans U , il existe t_K tel que $y_\star([t_K, \sup J_\star[) \cap K = \emptyset$.*

PREUVE. Supposons donc que $\beta = \sup J_\star < \mathbb{R}$, et que $y_\star$ visite un compact donné $K \subset U$ le long d'une suite (t_n) qui tend vers β : on a $y_\star(t_n) \in K$ pour tout n . De la suite $y_\star(t_n)$, on peut extraire une sous-suite convergente par compacité. Notons encore $y_\star(t_n)$ cette sous-suite, et ℓ sa limite.

Alors $\ell \in U$, car $\ell \in K$. On applique la Proposition 1.29 : il existe un voisinage V de ℓ et α tel que les problèmes de Cauchy associés à tous les points de V ont un temps d'existence au moins égal à α .

Soit maintenant n_0 assez grand, de sorte que $y_\star(t_{n_0}) \in V$, et aussi $\beta - t_{n_0} < \alpha$. On peut trouver un tel n_0 par convergence de (t_n) vers β et convergence de $(y_\star(t_n))$ vers ℓ . Considérons le problème de Cauchy en $(t_{n_0}, y_\star(t_{n_0}))$. Son temps d'existence est au moins égal à α . Notons z la solution de ce problème de Cauchy.

On pose

$$z_\star(t) := \begin{cases} y_\star(t), & t \in [t_0, t_{n_0}], \\ z(t), & t \in]t_{n_0}, t_{n_0} + \alpha[. \end{cases}$$

Exactement comme dans la preuve du Corollaire 1.26, on vérifie que $z_\star$ est une solution du problème de Cauchy associé à $(0, y_0)$, le problème de Cauchy dont $y_\star$ est une solution maximale, et on vérifie aussi que $z_\star$ est un prolongement de $y_\star$, puisque $\beta < t_{n_0} + \alpha$. Mais cela contredit la définition de $y_\star$ comme solution maximale.

On est arrivé à une contradiction. On en déduit qu'il était absurde de supposer que $y_\star$ ne quitte pas K . □

Corollaire 1.31. *Si $U = \mathbb{R}^n$, alors une solution maximale qui n'est pas globale n'est pas bornée au voisinage des extrémités de son intervalle de définition.*

Preuve : il suffit de choisir $K = \bar{B}(0, R)$, pour tout $R > 0$.

Observation importante : le Corollaire 1.31 nous dit que le comportement de la solution maximale de $y' = y^2$ est universel.

3.5. Lemme de Gronwall. Cadre : transformer une inégalité implicite en une inégalité explicite.

Lemme 1.32 (Gronwall). *Soit $t_0 \leq t_1$, une constante $c \geq 0$, et trois fonctions continues $y \geq 0, a \geq 0, C \geq 0$, définies sur $[t_0, t_1]$.*

Première version :

$$\left(\forall t \in [t_0, t_1], \quad y(t) \leq c + \int_{t_0}^t a(s)y(s)ds \right) \implies \left(\forall t \in [t_0, t_1], \quad y(t) \leq c \exp \left(\int_{t_0}^t a(s)ds \right) \right).$$

Deuxième version :

$$\begin{aligned} (\forall t \in [t_0, t_1], \quad y(t) \leq C(t) + \int_{t_0}^t a(s)y(s)ds) \\ \implies (\forall t \in [t_0, t_1], \quad y(t) \leq C(t) + \int_{t_0}^t C(t')a(t') \exp\left(\int_{t'}^t a(s)ds\right) dt'.) \end{aligned}$$

Preuve : considérer la fonction $t \rightarrow \exp\left(-\int_{t_0}^t a\right) \int_{t_0}^t ay$.

3.6. Critères d'existence globale. Vocabulaire : on dit qu'une solution maximale est globale si son intervalle de définition est $\mathbb{R}$ tout entier.

On utilise le Corollaire 1.31 et le Lemme de Gronwall pour en déduire des conditions suffisantes d'existence globale :

Proposition 1.33. *Pour une équation différentielle $y' = f(y)$, avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, chacune des conditions suivantes implique que toutes les solutions maximales sont globales :*

- (1) *il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leq C(1 + |x|)$.*
- (2) *L'application f est linéaire : $f(y) = Ay$, avec A une matrice.*
- (3) *L'application f est globalement Lipschitzienne en y : il existe $k > 0$ tel que pour tout y_1, y_2 , $|f(y_1) - f(y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$.*

“Toutes” les solutions maximales : on parle ici de *tous* les problèmes de Cauchy pour l'équation $y' = f(t, y)$.

3.7. Autour du temps d'existence (suite). Notation : on note $J_*(y_0)$ l'intervalle d'existence de la solution maximale du problème de Cauchy $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$. Noter bien qu'ici le temps de départ est fixé à $t = 0$. Voici maintenant une propriété beaucoup plus forte que la Proposition 1.29 :

Proposition 1.34. *Pour tout $t_0 \in J_*(y_0)$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in \bar{B}(y_0, r)$, l'intervalle d'existence de la solution maximale du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(0) = z_0$ contient t_0 .*

Pour prouver la Proposition 1.34, on aura besoin de la remarque suivante :

Remarque 1.35. *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement Lipschitz. Soit K un compact connexe de U . Il existe un voisinage ouvert V de K et $k > 0$ tels que f est k -Lipschitz en dans V .*

Vérification. Sinon, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k > 0$, dans le voisinage $V = \{x \in U, d(x, K) \leq \varepsilon\}$, on pourrait trouver $x_{\varepsilon, k}$ et $y_{\varepsilon, k}$ tels que $|f(x_{\varepsilon, k}) - f(y_{\varepsilon, k})| \geq k|x_{\varepsilon, k} - y_{\varepsilon, k}|$. La suite $(x_{\varepsilon, k})_\varepsilon$ est bornée (car à distance ε d'un borné), donc converge à une sous-suite près. Sa limite x_k appartient à K car K est fermé. (Et puisque l'application $d(\cdot, F)$ est continue si F est fermé dans un espace localement compact.) De même pour $(y_{\varepsilon, k})_\varepsilon$. A extraction près, on a donc $x_{\varepsilon, k} \rightarrow x_k$, $y_{\varepsilon, k} \rightarrow y_k$ et $x_k, y_k \in K$. Mais alors par continuité $|f(x_k) - f(y_k)| \geq k|x_k - y_k|$. On considère maintenant (x_k) et (y_k) : elles convergent à extraction près. Comme f est bornée dans K , on a nécessairement $x = y = \lim x_k = \lim y_k$. Soit k_0 une constante de Lipschitz locale en x et $r > 0$ un rayon associé. Alors pour k assez grand, on a $x_k, y_k \in B(x, r)$, et $k \geq k_0$. Alors $|f(x_k) - f(y_k)| \geq k|x_k - y_k|$ fournit une contradiction.

Vérification directe : On prouve d'abord qu'une application qui est localement bornée est globalement bornée dans un voisinage de tout compact. Cela se fait directement par extraction d'un sous-recouvrement d'un recouvrement associée à la propriété de borne locale.

Passons au caractère Lipschitz. Soit F définie dans $K \times K$ par

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}, & \text{si } x \neq y, \\ 1, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Vérifions que F est localement bornée. Pour tout x_0 , soit $r_0 > 0$ un rayon et $k_0 > 0$ une constante de Lipschitz associés à la propriété " f localement Lipschitz". C'est-à-dire : pour tout $x, x' \in \bar{B}(x_0, r_0)$, on a

$$|f(x) - f(x')| \leq k_0 |x - x'|.$$

Dans l'espace produit $U \times U$, on utilise la norme $|(x, y)| = \max(|x|, |y|)$. Les fonctions r_0 , et k_0 dépendent bien sûr de (t_0, x_0) , mais on se donne maintenant $(x_0, y_0) \in K \times K$, fixé une fois pour toutes.

Premier cas : si $|x_0 - y_0| \leq r_0/2$, vérifions que F est bornée dans $\bar{B}_0$, avec $\bar{B}_0 = \bar{B}((x_0, y_0), r_0/2)$.

Si $(x, y) \in \bar{B}((x_0, y_0), r_0/2)$, alors

$$|y - y_0| \leq r_0/2, \quad |x_0 - y_0| \leq r_0/2, \quad \text{donc} \quad |x - y_0| \leq r_0.$$

Donc

$$|f(x) - f(y)| \leq k_0 |x - y|.$$

Autrement dit : dans $\bar{B}_0$, on a $F \leq \max(1, k_0)$.

Deuxième cas : si $|x_0 - y_0| \geq r_0/2$. Alors F est bornée dans $\bar{B}_1$, avec $\bar{B}_1 = \bar{B}((x_0, y_0), r_0/8)$.

En effet, pour tous $(x, y) \in \bar{B}_1$,

$$|x - x_0| \leq r_0/8, \quad |y - y_0| \leq r_0/8, \quad |x_0 - y_0| \geq r_0/2, \quad \text{donc} \quad |x - y| \geq r_0/4.$$

Donc

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \frac{8M}{r_0},$$

avec M un majorant de $|f|$ dans un voisinage de K . Donc $F \leq \max(1, 8M/r_0)$ dans $\bar{B}_1$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.34. On utilise les notations du paragraphe 3.3. La solution maximale du problème de Cauchy $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$ est notée y_* . Son intervalle d'existence est $J_*(y_0)$. La borne supérieure de J_* est notée $T_*(f, 0, y_0)$, ou simplement $T_*(y_0)$.

L'intervalle $J_*(y_0)$ est ouvert, et contient t_0 par hypothèse, donc contient un $[0, t_0 + \alpha]$, pour un certain $\alpha > 0$. L'ensemble $[0, t_0 + \alpha] \times y([0, t_0 + \alpha])$ est compact (par continuité de y), donc f est k -Lipschitz (en y , unif en t) dans un voisinage ouvert V de $[0, t_0 + \alpha] \times y([0, t_0 + \alpha])$, d'après la Remarque 1.35.

La fonction distance à un fermée est continue, donc $t \rightarrow d(y_*(t), U^c)$ est une fonction continue de t . Elle est strictement positive pour tout $t \in [0, t_0 + \alpha]$, donc son minimum β sur le compact $[0, t_0 + \alpha]$ est positif. Soit $0 < \varepsilon < \beta/4$.

Soit l'ensemble

$$W_{\varepsilon_0} := \{(t, z) \in [0, t_0 + \alpha] \times U, |z - y_\star(t)| \leq \varepsilon_0\}.$$

Alors pour ε_0 assez petit, on a $W_{\varepsilon_0} \subset V$. En effet, on aurait sinon $(t_{\varepsilon_n}, z_{\varepsilon_n})$ une suite de W_{ε_n} , avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$, qui satisferait $(t_{\varepsilon_n}, z_{\varepsilon_n}) \notin V$. A extraction près, on a $t_{\varepsilon_n} \rightarrow t_\infty \in [0, t_0 + \alpha]$, d'où par continuité $y(t_{\varepsilon_n}) \rightarrow y(t_\infty)$, et, par définition de W_{ε_n} , cela implique $z_{\varepsilon_n} \rightarrow y(t_\infty)$. Le point $(t_\infty, y(t_\infty))$ appartiendrait donc à l'adhérence du complémentaire de V , c'est-à-dire au complémentaire de V . Mais il appartiendrait aussi évidemment à $[0, t_0 + \alpha] \times y([0, t_0 + \alpha])$, ce qui fournit une contradiction.

Soit $0 < r \leq \varepsilon$, et $z_0 \in \bar{B}(y_0, r)$. On choisira plus tard r encore plus petit que ε . Soit

$$X_\varepsilon := \{t \in]0, t_0 + \alpha[, \quad t \in J_\star(z_0) \text{ et } \forall t' \in]0, t[, \quad |z_\star(t') - y_\star(t')| < \varepsilon\},$$

où $z_\star$ est la solution maximale issue de z_0 et $J_\star(z_0)$ son intervalle d'existence.

On remarque que si $r \leq \varepsilon/2$, alors pour h assez petit on a $]0, h[\subset X_\varepsilon$, par continuité de $|y - z|$. On va montrer que X_ε est ouvert et fermé dans $[0, t_0 + \alpha]$, si ε est assez petit. Cela prouvera par connexité $X_\varepsilon = [0, t_0 + \alpha]$, et donc en particulier $t_0 \in J_\star(z_0)$, ce qu'on voulait prouver.

Soit $s \in X_\varepsilon$. Si $s = t_0 + \alpha$, alors en fait $X_\varepsilon =]0, t_0 + \alpha]$ et on a fini. Sinon, puisque $(s, z(s)) \in V$, on peut résoudre le problème de Cauchy localement en ce point, et donc prolonger z , jusqu'à $s + \delta$, pour un certain $\delta > 0$. On majore :

$$|z_\star(s) - y_\star(s)| \leq r + \int_0^s |f(z_\star(t')) - f(y_\star(t'))| dt'.$$

Comme $(z_\star(t'))$ et $y_\star(t')$ appartiennent à V pour tout $t' \in [0, s]$, puisque $W_\varepsilon \subset V$, on peut utiliser le caractère Lipschitz de f dans V : pour un certain $k > 0$, on a

$$|f(z_\star(t')) - f(y_\star(t'))| \leq k|z_\star(t') - y_\star(t')|,$$

et donc par Gronwall

$$|z_\star(s) - y_\star(s)| \leq r e^{Ks}.$$

Il suffit donc de choisir ε de sorte que $r e^{k(t_0 + \alpha)} \leq \varepsilon/2$. Alors X_ε est ouvert.

Soit (t_n) une suite de X_ε , qui converge vers $t_\infty \in [0, t_0 + \alpha]$. Si $t_\infty \in J_\star(z_0)$, alors soit $t' < t_\infty$. On peut trouver n tel que $t' < t_n \leq t_\infty$. Comme $t_n \in X_\varepsilon$, on a donc $|y(t') - z(t')| < \varepsilon$. Cela prouve $t_\infty \in X_\varepsilon$.

Supposons donc que $t_\infty \notin J_\star(z_0)$. Alors $t_\infty = \sup J_\star(z_0)$, puisque pour tout $t' < t_\infty$, on a $t' \in J_\star(z_0)$. Mais alors la solution maximale $z_\star$ n'est pas globale, et satisfait pour tout $t' < t_\star(z_0)$ la condition $|z_\star(t') - y_\star(t')| < \varepsilon$. En particulier, $z_\star$ prend ses valeurs dans le compact $\bar{B}(y(t_\infty), R)$, pour un certain $R > 0$ tel que $\bar{B}(y(t_\infty), R) \subset U$, et pour t' dans un voisinage à gauche de $t_\star(z_0)$. Cela contredit la Proposition de sortie des compacts. Il était absurde de supposer $t_\infty \notin J_\star(z_0)$. Finalement X_ε est fermé, ce qui conclut la preuve. $\square$

Définition 1.36. Une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *semi-continue inférieurement au temps* t_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|t - t_0| < \alpha$, alors $g(t) \geq g(t_0) - \varepsilon$.

Exemple : la fonction caractéristique d'un intervalle ouvert est semi-continue inférieurement. La fonction caractéristique d'un intervalle fermé n'est pas semi-continue inférieurement.

On note $\Omega = \bigcup_{y_0 \in U} J_*(y_0) \times \{y_0\}$ et $T_*(y_0) = T_*(f, 0, y_0) = \sup J_{y_0}$. On définit la fonction

$$\phi : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, y_0) \rightarrow y(t), \end{cases}$$

où $y(t)$ est la valeur en temps t de l'unique solution maximale relative au problème de Cauchy $(0, y_0)$. On dit que ϕ est le *flot* de l'équation différentielle $y' = f(y)$.

Corollaire 1.37. *L'ensemble Ω est ouvert, T_* est semi-continue inférieurement, et ϕ est localement Lipschitz dans Ω .*

PREUVE. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Comme $J_*(t_0)$ est ouvert, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $t_0 + \delta \in J_*(y_0)$. D'après la Proposition 1.34, on peut trouver $r > 0$ tel que $t_0 + \delta \in J_*(z_0)$, pour tout $z_0 \in B(y_0, r)$. Finalement $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \bar{B}(y_0, r)$ est un voisinage de (t_0, y_0) qui est inclus dans Ω . Donc Ω est ouvert.

Soit $y_0 \in U$, et $\varepsilon > 0$. On cherche $r > 0$, tel que pour tout $z_0 \in B(y_0, r)$, on ait $T_*(z_0) \geq T_*(y_0) - \varepsilon$. Comme $T_*(y_0) - \varepsilon/2 \in J_*(y_0)$, il existe $r > 0$ tel que $T_*(y_0) - \varepsilon/2 \in J_*(z_0)$ pour tout $z_0 \in B(y_0, r)$. Ce r convient.

Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. On cherche un voisinage W de (t_0, y_0) dans Ω et $C > 0$ tels que pour tout $(t_1, z_1), (t_2, z_2) \in W$, on ait

$$|\varphi(t_1, z_1) - \varphi(t_2, z_2)| \leq C(|t_1 - t_2| + |z_1 - z_2|).$$

On reprend les notations de la preuve de la Proposition 1.34. On a vu que pour tout $\alpha > 0$ tel que $t_0 + \alpha \in J_{y_0}$, pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, on peut trouver $r > 0$ tel que pour tout $z_0 \in \bar{B}_E(y_0, r)$, la solution (J_{z_0}, z) satisfait $(t, z(t)) \in W_{\varepsilon_0} \subset V$ pour tout $t \leq t_0 + \alpha$.

On va montrer que $W = [t_0 - \alpha/2, t_0 + \alpha/2] \times \bar{B}_E(y_0, r)$ convient. En effet, pour ce choix de W , pour tous couples $(t_1, z_1), (t_2, z_2)$ de W , on a $\varphi(t', z_1) \in V$, pour tout $t' \in [0, t_1]$, et de même $\varphi(t', z_2) \in V$, pour tout $t' \in [0, t_2]$, donc si $t_1 \leq t_2$:

$$|\varphi(t_1, z_1) - \varphi(t_1, z_2)| \leq |z_1 - z_2| + \int_0^{t_1} K |\varphi(t', z_1) - \varphi(t', z_2)| dt',$$

avec K constante de Lipschitz de f dans K . Par Gronwall, on a donc

$$|\varphi(t_1, z_1) - \varphi(t_1, z_2)| \leq |z_1 - z_2| e^{K t_1} \leq |z_1 - z_2| e^{K(t_0 + \alpha/2)}.$$

Par ailleurs, $|\varphi'(t, z_2)| \leq M$, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, car $|f| \leq M$ dans V . Donc par le théorème des accroissements finis,

$$|\varphi(t_1, z_2) - \varphi(t_2, z_2)| \leq M |t_2 - t_1|,$$

Donc W convient, avec la constante de Lipschitz $C = M + e^{K(t_0 + \alpha/2)}$. $\square$

On note $\varphi_t(\cdot)$ ou $\varphi(t, \cdot)$ le flot d'une équation différentielle de la forme $y' = f(y)$.

Proposition 1.38. *Propriété de flot : $\varphi_t \circ \varphi_{t_0} = \varphi_{t+t_0}$.*

PREUVE. On peut commencer par vérifier (première observation) que si (J, y) est une solution, alors pour tout t_0 , $(J - t_0, y(\cdot + t_0))$ est encore une solution. On pose à cet effet $z = y(\cdot + t_0)$, qui est bien définie sur $J - t_0$, et on calcule, pour $t \in J - t_0$:

$$z'(t) = y'(t + t_0) = f(y(t + t_0)) = f(z(t)).$$

C'est dans la deuxième égalité qu'on a utilisé l'hypothèse d'autonomie du flot.

Ensuite (deuxième observation) on vérifie que si $(J, y) \leq (J', z)$, alors $(J + t_0, y(\cdot - t_0)) \leq (J' + t_0, z(\cdot - t_0))$. En effet, les deux termes de l'inégalité à prouver sont bien des solutions d'après ce qui précède, on a bien $J + t_0 \subset J' + t_0$, et si $t \in J + t_0$, alors on écrit $t = t_1 + t_0$, avec $t_1 \in J$, et donc $z(t - t_0) = z(t_1) = y(t_1)$, puisque $t_1 \in J$. Donc $z(t - t_0) = y(t - t_0)$.

La propriété de flot découle de ces remarques. En effet (par la première observation) $(J_x - t_0, \varphi(\cdot + t_0, x))$ est une solution du problème de Cauchy $(t_0, \varphi_{t_0}(x))$, donc une restriction de la solution maximale :

$$(1.19) \quad (J_{x_0} - t_0, \varphi(\cdot + t_0, x_0)) \leq (J_{\varphi(t_0, x_0)}, \varphi(\cdot, \varphi(t_0, x_0))) = (J, y).$$

On obtient par la deuxième observation :

$$(1.20) \quad (J_{x_0}, \varphi(\cdot, x_0)) \leq (J_{\varphi(t_0, x_0)} + t_0, \varphi(\cdot - t_0, \varphi(t_0, x_0))),$$

et l'inégalité ne peut pas être stricte, sinon on aurait un prolongement strict de la solution maximale du problème de Cauchy (t_0, x_0) . D'où l'égalité dans (1.20), qui donne l'égalité dans (1.19) $\square$

Théorème 1.39. *Régularité du flot : $f \in C^k \implies \varphi \in C^k$.*

PREUVE. On note $\mathbf{X} := C^0([t_0 - 1, t_0 + 1], U)$ et on pose

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \times U \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} \\ (\alpha, z, y) \rightarrow \left(t \mapsto y(t) - \left(z + \int_0^t \alpha f(y(t')) dt' \right) \right), \end{cases}$$

qui est une application aussi régulière que f .

Si $F(0, y_0, y) = 0$, l'application y est constante égale à y_0 .

Si $F(\alpha, y_0, y) = 0$ avec $\alpha \neq 0$, alors $y_\alpha(t) = y(t/\alpha)$, qui est définie sur $[-\alpha, \alpha]$, satisfait

$$y_\alpha(t) = y_0 + \int_0^t f(y_\alpha(t')) dt',$$

et donc $([-\alpha, \alpha], y_\alpha)$ est une restriction de la solution maximale du problème de Cauchy $(0, y_0)$.

On remarque que (trivialement)

$$(1.21) \quad \partial_y F(0, y_0, \bar{y}_0) = \text{Id}_{\mathcal{L}(\mathbf{X})}.$$

Donc par $F(0, y_0, \bar{y}_0) = 0$ et le théorème des fonctions implicites :

- il existe un voisinage U de $(0, y_0, \bar{y}_0)$ dans $\mathbb{R} \times U \times \mathbf{X}$,
- il existe un voisinage V de $(0, y_0)$ dans $\mathbb{R} \times U$,
- il existe une application $\Phi \in C^p : V \rightarrow \mathbf{X}$

tels que

$$(1.22) \quad ((\alpha, y_0, y) \in U, \quad F(\alpha, y_0, y) = 0) \iff ((\alpha, y_0) \in V \quad \text{et} \quad \Phi(\alpha, y_0) = y).$$

Soit $\delta > 0$ et $r > 0$ tels que $[-\delta, \delta] \times \bar{B}(y_0, r) \subset V$. Soit $z_0 \in \bar{B}(y_0, r)$. Pour tout $\alpha \leq \delta$, par (1.22) on a

$$F(\alpha, z_0, \Phi(\alpha, z_0)) = 0.$$

Donc, par ce qui précède, l'application $t \rightarrow \Phi(\alpha, z_0)(t/\alpha)$, qui est définie sur $[-\alpha, \alpha]$, est une restriction de $(J_{z_0}, \varphi(\cdot, z_0))$, la solution maximale du problème de Cauchy $(0, z_0)$. On a en particulier l'identité

$$(1.23) \quad \Phi(t, z_0)(1) = \varphi(t, z_0), \quad \text{pour tout } 0 < |t| < \delta, \quad z_0 \in \bar{B}(y_0, r),$$

et aussi pour $t = 0$, puisque $\Phi(0, z_0)(1) = z_0$. On déduit donc de la régularité de Φ la régularité locale (au sens : pour les temps petits) de φ .

On a donc prouvé pour tout $x \in U$ l'existence d'un voisinage de $(0, x)$ dans $I \times U$ dans lequel φ est C^k . Il s'agit maintenant de propager cette régularité, c'est-à-dire de trouver pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$ un voisinage de (t_0, x_0) sur lequel $\varphi \in C^k$.

Soit r_0 et $\delta_0 > 0$ tel que le flot est C^k dans $(-\delta_0, \delta_0) \times B(\varphi(t_0, x_0), r_0)$, et aussi dans $(-\delta_0, \delta_0) \times B(x_0, r_0)$. (Un tel $r_0 > 0$ et un tel $\delta_0 > 0$ existent en vertu de ce qui précède.) Soit $\alpha > 0$ tel que $t_0 + \alpha \in J_*(x_0)$. Le flot étant localement Lipschitz (Corollaire 1.37), il est globalement Lipschitz sur le compact $[0, t_0 + \alpha] \times \bar{B}(x_0, r_0)$. Soit K une constante de Lipschitz. Alors pour $y, z \in B(x_0, r_0)$ et pour $t \leq t_0 + \alpha$:

$$(1.24) \quad |\varphi(t, y) - \varphi(t', z)| \leq K(|y - z| + |t - t'|).$$

On peut supposer $K \geq 1$. Soit maintenant $r = r_0/(2K)$. On pose

$$I := \{t \in (0, t_0 + \alpha], \quad \varphi \in C^k((0, t) \times B(x_0, r))\},$$

Alors I est non vide : $\delta \in I$. Si $\sup I > t_0$, alors on a fini. Sinon, on a donc $\sup I \leq t_0$. On note t_1 le réel $\sup I$. Soit t_2 dans l'intérieur de I , tel que $t_2 < t_1 < t_2 + \delta$, avec δ tel que $K(\delta + r) < r_0$, et $\delta < \delta_0$. On peut trouver un tel t_2 par définition de la borne supérieure de I . Pour $y \in B(x_0, r)$ et $h \in (0, \delta)$:

$$(1.25) \quad \varphi(t_2 + h, y) = \varphi_h(\varphi(t_2, y)),$$

et on observe que $\varphi(t_2, y) \in B(\varphi(t_0, x_0), r_0)$. En effet, d'après (1.24) :

$$(1.26) \quad |\varphi(t_2, y) - \varphi(t_0, x_0)| \leq K(\delta + r) \leq r_0.$$

Résumons : on note ψ_0 l'application

$$\psi_0 : (h, z) \in (0, \delta_0) \times B(\varphi(t_0, x_0), r_0) \rightarrow \psi_0(h, z) = \varphi_h(z).$$

Alors $\psi_0 \in C^k$. On note ψ_1 l'application

$$\psi_1 : (t, z) \in (t_2 - \delta_1, t_2 + \delta_2) \times B(x_0, r) \rightarrow \psi_1(t, z) = \varphi_t(z),$$

avec δ_2 assez petit de sorte que $(t_2, t_2 + \delta_2) \subset I$. Alors non seulement ψ_1 est C^k , mais aussi l'image de ψ_1 est incluse dans le domaine de ψ_0 (précisément dans la deuxième composante

du domaine de ψ_0 , si δ_2 est assez petit, par (1.26)). Donc on peut réécrire (1.25) sous la forme

$$\varphi_{t_2+h}(y) = \psi_0(h, \psi_1(t_2, y)),$$

et φ apparaît comme la composée de deux applications C^k , pour h petit et y proche de x_0 . En particulier, le flot est régulier jusqu'en $t_2 + \delta$, donc au-delà de $t_1 = \sup I$. Finalement, il était absurde de supposer $\sup I \leq t_0$, et donc le flot est régulier au voisinage de (t_0, x_0) , ce qu'on voulait prouver. $\square$

Proposition 1.40. *Soit un champ $f \in C^k$ globalement Lipschitz, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ou n'importe quel champ qui garantit l'existence globale pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $(\varphi_t(\cdot))$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes C^k de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$. Les trajectoires forment une partition de $\mathbb{R}^n$.*

PREUVE. Dans ce contexte, $J_*(x) = \mathbb{R}$, pour tout x . Alors de la propriété de flot, on déduit $\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \text{Id}$. Donc φ_t est une bijection $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^k , dont la réciproque est C^k . Le fait que les trajectoires forment une partition de $\mathbb{R}^n$ découle simplement de l'unicité forte. En effet, par définition, la trajectoire issue de x est $T_x = \{\varphi(t, x), t \in \mathbb{R}\}$. On a donc $x \in T_x$, si bien que $\mathbb{R} \subset \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} T_x$. Enfin si $\varphi_{t_1}(x_1) = \varphi_{t_2}(x_2)$, alors par la propriété de flot on a $\varphi_{t_1-t_2}(x_1) = x_2$, et donc $x_2 \in T_{x_1}$, ce qui implique $T_{x_2} \subset T_{x_1}$ (à nouveau par la propriété de flot), et la réciproque est donc aussi vraie par symétrie. $\square$

4. Partitions de l'unité

Références : Rudin Theorem 6.20 ; pour Urysohn : Folland Lemma 4.15.

Lemme 1.41 (Urysohn). *Soit K un compact inclus dans V ouvert, dans $\mathbb{R}^n$. Il existe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que $\phi \equiv 1$ dans K , ϕ supportée dans V , et $0 \leq \phi \leq 1$.*

PREUVE. On pose $\delta = d(K, V^c) = \inf_{x \in K} d(x, V^c)$. Alors $\delta > 0$ car K est compact et la fonction distance à un fermé est continue. On pose $U = \{x \in \mathbb{R}^n, d(x, K) \leq \delta/3\}$. Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que $\int \psi = 1$ et $\psi \equiv 0$ pour $|x| \geq \delta/3$. (Une telle fonction existe!) Montrons que $\phi = \mathbf{1}_U \star \psi$ convient. On a $\phi \in C^\infty$ par propriété de la convolution, et $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi \equiv 1$ dans K , et $\text{supp } \phi \subset \{x \in \mathbb{R}^n, d(x, K) \leq 2\delta/3\} \subset U$. $\square$

Théorème 1.42. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et un recouvrement de Ω par des ouverts :*

$$\Omega \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Il existe une famille dénombrable $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que

- *pour tout j , le support de ϕ_j est inclus dans un U_i , avec $i \in I$,*
- *pour tout $x \in \Omega$, $1 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \phi_j(x)$;*
- *pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un voisinage V de K , $m \geq 1$ tels que pour tout $x \in V$, $1 = \sum_{1 \leq j \leq m} \phi_j(x)$.*

PREUVE. Soit Q un ensemble dénombrable dense dans Ω . Soit $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des boules centrées en un élément de Q , de rayon dénombrable, et qui sont chacune incluse dans un U_i . Soit B'_j la boule de même centre que B_j et de rayon deux fois plus petit. Alors $\Omega \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B'_j$. En effet, si $x \in \Omega$, alors $x \in U_i$ pour un certain i . Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit,

il existe un élément y de Q tels que $y \in B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Alors si ε est assez petit, on peut trouver un rationnel $r > 0$ tel que $x \in B(y, r/2) \subset U_i$. La boule $B(y, r/2)$ appartient à la collection des B'_j .

Par le Lemme d'Urysohn, on peut trouver $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi_j \equiv 1$ dans B'_j , et $\psi_j \equiv 0$ dans le complémentaire de B_j . On définit par récurrence

$$\phi_1 = \psi_1, \quad \phi_2 = (1 - \psi_1)\psi_2, \quad \phi_{i+1} = (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_i)\psi_{i+1}.$$

Alors le support de ϕ_i est inclus dans le support de ψ_i , donc dans B_i , donc dans un des U_j . On vérifie par récurrence que

$$(1.27) \quad \phi_1 + \cdots + \phi_n = 1 - \prod_{1 \leq i \leq n} (1 - \psi_i).$$

Soit maintenant $x \in \Omega$. Ce x tombe dans une B'_{i_0} , et par définition $\psi_{i_0}(x) = 1$. Donc par définition des ϕ_j , pour tout $j \geq i_0 + 1$, on a $\phi_j(x) = 0$. Et par (1.27),

$$(1.28) \quad \sum_{1 \leq j \leq i_0} \phi_j(x) = 1 - \underbrace{(1 - \psi_{i_0}(x))}_{=0} \cdot \prod_{1 \leq j \leq i_0-1} (1 - \psi_j(x)) = 1.$$

Cela prouve le deuxième point. Finalement, si K est compact, alors K est recouvert par un nombre fini des B'_i . En particulier, il existe $m_K \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset V = \bigcup_{1 \leq j \leq m_K} B'_j$. Soit $x \in V$, et soit i_0 le plus grand indice tel que $x \in B'_{i_0}$. Alors $\phi_j(x) = 0$ si $j \geq i_0$, et (1.28) implique donc que $1 \equiv \sum_{1 \leq j \leq m_K} \phi_j$ dans V . $\square$

CHAPITRE 2

Variétés différentielles

Références : Berger-Gostiaux (PUF), chapitre 2. Cours de Frédéric Paulin (Géométrie différentielle), disponible en ligne. John Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer.

1. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

1.1. Définition. On note $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, et on identifie parfois $\mathbb{R}^m$ avec son image $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ par l'injection canonique $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. On note x un point générique de $\mathbb{R}^n$, et on note en général $x' \in \mathbb{R}^m$ sa première composante suivant la décomposition $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$. On note souvent $\pi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la projection sur la première composante dans la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, définie par $\pi_1(x) = \pi_1(x', x'') = x'$. On note souvent π_2 la projection sur la deuxième composante $\pi_2(x', x'') = x'' \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Tout ce qui porte un “prime”, comme dans x', y', U', V' se rapporte à $\mathbb{R}^m$, le “petit” espace auxquelles les sous-variétés dont on va parler sont localement homéomorphes, par opposition au grand espace $\mathbb{R}^n$ dans lequel les sous-variétés sont incluses, qui contiendra x, y, U, V .

Définition 2.1. On dit qu'une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension m et de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ quand pour tout $x \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant x , et φ un C^k -difféomorphisme $U \rightarrow \varphi(U)$, avec $\varphi(U)$ ouvert, tel que $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Remarque 2.2. Dans la Définition 2.1, on peut remplacer la condition

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$$

par la condition a priori plus faible

$$(2.1) \quad \varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}), \quad V \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n.$$

La condition (2.1) signifie que l'image par un difféomorphisme d'un ouvert de M (pour la topologie induite par la topologie de $\mathbb{R}^n$) est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ (vu comme une partie de $\mathbb{R}^n$).

En effet, supposons avoir (2.1) (localement au voisinage de chaque point $x \in M$), avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x . Alors V contient $\varphi(x)$, donc par continuité de φ contient $\varphi(W)$, pour W un ouvert contenant x , et on peut supposer $W \subset U$. Donc $\varphi(U \cap M) \supset \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, et alors $\varphi(W \cap M) = \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, car d'une part $\varphi(W \cap M) \subset \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, et d'autre part si $y \in \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, alors $y = \varphi(z)$, avec $z \in U \cap M$, mais aussi $y = \varphi(w)$ avec $z' \in W$, et donc $z = w$ par injectivité de φ .

Exemple 2.3. L'exemple “canonique” de sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$ est donc, d'après la Définition, le sous-espace $\mathbb{R}^m \times \{0\}$.

Remarque 2.4. Par définition, tout ouvert (au sens de la topologie induite) d'une sous-variété est une sous-variété, de même régularité et de même dimension.

1.2. Caractérisations des sous-variétés : submersions, graphes, paramétrages.

Théorème 2.5 (Sous-variétés : le point de vue submersion). Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. La propriété suivante :

- pour tout $x \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant x et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ submersion de classe C^k telle que $f^{-1}(\{0\}) = U \cap M$

équivaut à

- M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension m .

PREUVE. Étant donnée une submersion f , et un ouvert associé U , par le théorème de forme normale des submersions il existe un C^k -difféomorphisme ψ (d'un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ vers un ouvert $\psi(V) \subset U$, avec $x \in \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$) tel que dans V on ait l'égalité $f \circ \psi = \pi_2$, où π_2 est la projection canonique sur la deuxième composante $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$. Autrement dit, $f|_{\psi(V)} = \pi_2 \circ \psi^{-1}$.

On veut maintenant vérifier $\psi^{-1}(V \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, ce qui correspond à $\psi^{-1}(f^{-1}(\{0\}) \cap \psi(V)) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Mais $\psi^{-1}(f^{-1}(\{0\}) \cap \psi(V)) = V \cap (\psi^{-1}(f^{-1}(\{0\}))) = V \cap (f \circ \psi)^{-1}(\{0\})$, et $f \circ \psi^{-1} = \pi_2$ dans V , et $\pi_2^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ bien sûr.

Réciproquement, si M est une sous-variété, on pose $f = (\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n)$. Alors $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ est une submersion. Si $x \in U \cap M$, alors $\varphi(x) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$, et donc $f(x) = 0$. Cela prouve $U \cap M \subset f^{-1}(\{0\})$. Réciproquement, si $x \in U$ satisfait $f(x) = 0$, alors $\varphi(x) \in \varphi(U) \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}) = \varphi(U \cap M)$, et donc $x \in U \cap M$. Donc $f^{-1}(\{0\}) = U \cap M$. $\square$

Remarque 2.6. On pourrait remplacer la condition $f^{-1}(\{0\}) = U \cap M$ par la condition a priori plus faible " $U \cap M$ est un ouvert de $f^{-1}(\{0\})$ ". En effet, s'il existe V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $U \cap M = V \cap f^{-1}(\{0\})$, alors en posant $g = f|_V$, g est une submersion, et $g^{-1}(\{0\}) = (f|_V)^{-1}(\{0\}) = V \cap f^{-1}(\{0\}) = U \cap M$.

Exemple 2.7. Les sphères donnent des exemples très simples de sous-variétés définies par des submersions : on pose $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 \in \mathbb{R}$. Alors $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{S}^{n-1}$.

Noter que dans le point de vue submersion, la dimension de l'espace d'arrivée de f correspond au nombre d'équations qui définissent la sous-variété. On appelle ce nombre d'équations la *codimension* de la sous-variété. Par exemple, les sphères sont de codimension 1. Dans $\mathbb{R}^3$, les droites sont de codimension 2.

Théorème 2.8 (Sous-variétés : le point de vue graphe). Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. La propriété suivante :

- pour tout $x \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant $x = (x_1, \dots, x_n)$, un ouvert $U' \subset \mathbb{R}^m$ contenant $x' = (x_1, \dots, x_m)$, et une application $h : U' \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ telle que $U \cap M = \{(y, h(y)), y \in U'\}$

équivaut à

- M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

PREUVE. On va vérifier que le point de vue submersion est équivalent au point de vue graphe. Cela prouvera le résultat, via le Théorème 2.5.

Soit M vue localement comme un graphe autour de x . On pose $f : (y', z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow z - h(y') \in \mathbb{R}^{n-m}$. Alors f est une submersion en $x = (x', x'')$, car $f'(x) = \begin{pmatrix} -h'(x') & \text{Id}_{\mathbb{R}^{n-m}} \end{pmatrix}$ est une matrice $(n-m) \times n$, et les $n-m$ dernières colonnes sont libres. Donc le rang de $f'(x)$ est au moins $n-m$, et il ne peut pas être plus grand que $n-m$. Soit $z \in U \cap M$. Alors, par hypothèse, $z = (y', h(y'))$, avec $y' \in U'$. Donc $f(z) = 0$. Réciproquement, si $z \in U$ est tel que $f(z) = 0$, alors en notant $z = (z', z'')$ on a $z'' = h(z')$, donc $z = (z', h(z'))$, et donc z appartient au graphe de h au-dessus de U' .

Réciproquement, on voit $U \cap M$ comme $f^{-1}(\{0\})$, avec $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ qui est submersion en x , définie dans U . Dans la matrice $f'(x)$, de taille $(n-m) \times n$, un mineur de taille $n-m$ est non nul. On peut supposer qu'il s'agit du bloc de taille $n-m$ en bas à droite (cela revient à un changement de notation dans $\mathbb{R}^n$; précisément, à composer par un isomorphisme, ce qui préserve la propriété de submersion), c'est-à-dire qu'en notant $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, l'application linéaire $\partial_2 f(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^{n-m}$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe

- V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x , et inclus dans U ,
- V' un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant x' ,
- une application φ aussi régulière que f , avec $\varphi : V' \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$,

tels que

$$(y = (y', y'') \in V, \quad f(y) = 0) \iff (y' \in V', \quad y'' = \varphi(y')).$$

Autrement dit, $(f|_V)^{-1}(\{0\}) = \{(y', \varphi(y')), \quad y' \in V'\}$, et donc $V \cap M$ est le graphe de φ . $\square$

Remarque 2.9. Dans la dernière partie de la preuve précédente, on est parti du point de vue submersion et on est arrivé au point de vue graphe, via le TFI. C'est ce qu'on fait dans la pratique quand on passe du point de vue équations au point de vue graphe. Par exemple, dans le cas d'une sphère : $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, on pose (près du pôle nord) $\varphi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, et alors localement la sphère est le graphe de φ .

Théorème 2.10 (Sous-variétés : le point de vue paramétrage). Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. La propriété suivante :

- pour tout $x \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant x , un ouvert $V' \subset \mathbb{R}^m$ contenant 0, et un homéomorphisme $g' : V' \rightarrow U \cap M$ avec $g'(V') = U \cap M$, $g'(0) = x$ et $g'(0)$ injective

équivalent à

- M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

PREUVE. On va montrer que le point de vue paramétrage est équivalent au point de vue graphe. Cela prouvera le résultat, avec le Théorème 2.8.

Soit M vue localement comme le graphe de h . On pose $g(y') = (y', h(y'))$. Alors par hypothèse $g(U') = U \cap M$. Comme $g'(y') = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbb{R}^m} \\ h'(y') \end{pmatrix}$, l'application $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion. Par ailleurs, g est continue, et sa réciproque est la projection π sur la première coordonnée : $\pi(y', y'') = y'$, qui est continue. Donc g est un homéomorphisme.

Réciproquement, soit g un paramétrage : $U \cap M = g(V')$. L'application linéaire $g'(0)$ est de rang m , et on peut supposer que $g'(0)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ (à nouveau, cela revient à un changement de base, donc à composer par un isomorphisme). Soit π_1 la projection sur la

première coordonnée dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Alors $(\pi_1 \circ g)'(0)(\mathbb{R}^m) = \pi_1 \circ g'(0) = \mathbb{R}^m$. Donc par TIL, $\pi_1 \circ g$ est un difféomorphisme local. On va vérifier que la deuxième composante (celle qui appartient à $\mathbb{R}^{n-m}$) de $h := g \circ (\pi_1 \circ g)^{-1}$ convient. (Ici il y a un joli dessin dans Berger-Gostiaux.)

On note donc $h = (h_1, h_2)$, avec $h_2 = \pi_2 \circ h$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-m}$. Soit $W' \subset V'$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant 0 sur lequel $\pi_1 \circ g$ est inversible. Comme g est un homéomorphisme, $g(W')$ est ouvert dans $U \cap M$, autrement dit $g(W') = V \cap M$, avec V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On cherche à vérifier l'égalité $\{(y', h_2(y'), y' \in \pi \circ g(W'))\} = V \cap M$. Soit $y' \in \pi_1 \circ g(W')$. On note $y' = \pi \circ g(z')$, et alors

$$(y', h_2(y')) = (\pi \circ g(z'), \pi_2 \circ h \circ \pi_1 \circ g(z')) = (\pi_1 \circ g(z'), \pi_2 \circ g(z')) = g(z').$$

Donc le graphe de h sur W' est inclus dans $g(W') = V \cap M$. Réciproquement, si $y \in V \cap M = g(W')$, on note $y = g(w') = (\pi_1 \circ g(w'), \pi_2 \circ g(w'))$, et $\pi_2 \circ g(w') = \pi_2 \circ h(\pi_1 \circ g(w'))$, par définition de h . Donc $V \cap M$ est inclus dans le graphe de h sur W' . $\square$

Remarque 2.11. Comparer la deuxième partie de la preuve précédente et la preuve du théorème de forme normale des immersions.

Remarque 2.12. Remarquer que chacune dans les preuves des Théorèmes 2.5, 2.8, 2.10, une implication est presque triviale. Précisément : la définition implique directement le point de vue submersion. Pour la réciproque, il faut un argument non trivial, qui est le théorème de forme normale des submersions, basé sur le TIL. Le point de vue graphe implique trivialement le point de vue submersion. Pour la réciproque on utilise le TFI. Le point de vue graphe implique trivialement le point de vue paramétrage. Pour la réciproque, on utilise le TIL.

On a donc prouvé les équivalences

$$\text{déf sous-var} \xLeftrightarrow{\text{Théorème 2.5}} \text{submersion} \xLeftrightarrow{\text{Théorème 2.8}} \text{graphe} \xLeftrightarrow{\text{Théorème 2.10}} \text{paramétrage}.$$

Dans l'exercice 2.1 page 55, on vérifie directement que le point de vue paramétrage est équivalent à la définition. À nouveau, une implication est triviale, et l'autre implication utilise le TIL.

1.3. Exemples et contre-exemples. Cf TD2, page 55.

1.4. Changement de paramétrage.

Proposition 2.13. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, et g_1 et g_2 deux paramétrages locaux au voisinage d'un même point x sur la sous-variété. Alors $g_2^{-1} \circ g_1$ a la même régularité que M .

PREUVE. On va montrer que $g_2^{-1} \circ g_1$ est C^k dans un voisinage de zéro, avec $g_1(0) = g_2(0) = x$. Soit φ et U un voisinage de x tels que $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. On peut supposer que $\varphi(x) = 0$. Comme U est ouvert, et g_1 et g_2 continues, on peut trouver V'_1 et V'_2 des voisinages de zéro tels que $g_1(V'_1) \subset U \cap M$, et $g_2(V'_2) \subset U \cap M$. En particulier, $\varphi \circ g_1$ est bien définie sur V'_1 , et $\varphi \circ g_1(V'_1) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$. De même, $\varphi \circ g_2(V'_2) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$.

L'ensemble $V' = V'_1 \cap g_1^{-1}(g_2(V'_2))$ est un voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^m$ (car g_2 ouverte et g_1 continue). On a

$$g_2^{-1} \circ g = g_2^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ g_1 \quad \text{dans } V'.$$

L'application $\varphi \circ g_1$ est C^k comme composée d'applications C^k . Par ailleurs la différentielle de $\varphi \circ g_2 : V'_2 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \{0\}$ est de rang m en $x = 0$. Donc par le TIL, $\varphi \circ g_2$ est un C^k -difféomorphisme dans un voisinage W'_2 de zéro, et l'image par $\varphi \circ g_2$ de W'_2 est un ouvert. En particulier, $(\varphi \circ g_2)^{-1}$ est C^k dans $\varphi \circ g_2(W'_2)$, qui est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m \times \{0\}$. Finalement, $g_2^{-1} \circ g_1$ est C^k dans $V' \cap (\varphi \circ g_1)^{-1}(\varphi \circ g_2)(W'_2)$. $\square$

Exemple 2.14. *Projections stéréographiques de la sphère. On définit $p_N(x)$ pour x appartenant à un voisinage de l'hémisphère sud sur la sphère $\mathbb{S}^2$, voisinage contenant l'équateur, comme l'intersection avec le plan de l'équateur de la droite qui passe par N (le pôle nord) et x . On définit de même p_S . On vérifie à la main que le changement de carte est régulier.*

Précisément, on note $x = (x_1, \dots, x_n)$ sur la sphère, non égal au pôle nord, et $p_N(x)$ est alors défini comme l'intersection de l'hyperplan $\{x_n = 0\}$ avec la droite affine $(Np_N(X))$. Cette droite affine admet la représentation paramétrique

$$\{(0, \dots, 0, 1) + t(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - 1), \quad t \in \mathbb{R}\},$$

et l'intersection avec l'hyperplan de l'équateur a donc lieu pour t tel que $1 + t(x_n - 1) = 0$. On vient de vérifier que

$$p_N(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Calculons la réciproque p_N^{-1} , définie dans $p_N(\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\})$. On pose la forme a priori

$$p_N^{-1}(x'_1, \dots, x'_n) = (\alpha x'_1, \dots, \alpha x'_n, \beta).$$

Alors

$$p_N(\alpha x'_1, \dots, \alpha x'_{n-1}, \beta) = \frac{\alpha}{1 - \beta}(x'_1, \dots, x'_{n-1}, 0).$$

Donc $\alpha = 1 - \beta$. Par ailleurs, $p_N^{-1}(x')$ appartient à $\mathbb{S}^{n-1}$. Donc

$$\beta^2 |x'|^2 + (1 - \beta)^2 = 1.$$

La solution triviale $\beta = 0$ correspond à l'hémisphère nord. L'autre solution est $\beta = \frac{2}{1 + |x'|^2}$.

Donc

$$p_N^{-1}(x') = \left(\frac{2x'_1}{1 + |x'|^2}, \dots, \frac{2x'_{n-1}}{1 + |x'|^2}, \dots, \frac{-1 + |x'|^2}{1 + |x'|^2} \right).$$

En particulier, on vérifie que les points qui appartiennent à la trace de la sphère sur l'hyperplan sont des points fixes de p_N^{-1} , comme prévu. Enfin, on calcule

$$p_S \circ p_N^{-1}(x', 0) = \frac{(x', 0)}{|x'|^2},$$

qui est bien C^∞ comme prévu par la Proposition 2.13.

2. Variétés

On rappelle qu'une *topologie* d'un ensemble E est la donnée d'une famille de parties de E qui contient l'ensemble vide et E et est stable par intersections finies et par union. Les *éléments* d'une topologie sont appelés *ouverts*. Les *fermés* sont par définition les complémentaires des ouverts.

On ne considère que des espaces topologiques *séparés* (en Anglais : Hausdorff space), c'est-à-dire pour lesquels deux points distincts ont des voisinages distincts. C'est implicite dans toute la suite.

2.1. Définition.

Définition 2.15 (Atlas). Soit M un espace topologique et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{A} = (U_i, g_i)_{i \in I}$ avec U_i ouverts de M et g_i homéomorphisme de U_i vers $g_i(U_i)$ ouvert de $\mathbb{R}^m$. On dit que $\mathcal{A}$ est un atlas C^k de M quand

- la famille d'ouverts (U_i) est un recouvrement de M ,
- les applications de “changement de paramétrage” $g_i \circ g_j^{-1}$ sont des C^k -difféomorphismes.

L'application $g_i \circ g_j^{-1}$ est définie dans l'ouvert $g_j(U_j \cap U_i)$. Si $U_j \cap U_i$ est vide, alors bien sûr l'hypothèse de régularité est vide. Si $U_j \cap U_i$ est non vide, alors c'est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et son image par g_j est donc un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

On voit donc les g_i^{-1} comme des paramétrages locaux de M , au sens du paragraphe 1. Noter qu'on ne saurait pas définir “les applications g_i sont C^k ” puisqu'on ne sait pas (pas pour le moment) dériver une application définie sur M (on sait le faire seulement quand M est un ouvert d'un espace vectoriel topologique). Noter aussi le lien très fort entre la Définition 2.15 et la Proposition 2.13 : la définition 2.15 est là précisément parce que les changements de paramétrage sur une sous-variété sont C^k . Autrement dit : on modèle la définition de variété “abstraite” à partir de ce qu'on a compris des surfaces de $\mathbb{R}^n$.

Les couples (U_i, g_i) sont appelés “cartes locales” de M . Une application $g_i \circ g_j^{-1}$ est appelée “changement de carte”.

Exemple 2.16. Sur la sphère $\mathbb{S}^2$ incluse dans $\mathbb{R}^3$, un atlas est donné par

$$\{(H_N, p_N), (H_S, p_S)\},$$

avec H_N un voisinage du pôle nord qui contient strictement l'hémisphère nord, et p_N la projection stéréographique à partir du pôle nord. De même symétriquement pour H_S et p_S . On vérifie que c'est un atlas lisse : il suffit de vérifier que $p_N \circ p_S^{-1}$ et $p_S \circ p_N^{-1}$ sont C^∞ . C'est ce qu'on a vérifié dans l'Exemple 2.14.

Définition 2.17 (Compatibilité de deux atlas). Deux atlas de M sont dits compatibles quand tous les changements de carte possibles sont des C^k -difféomorphismes, autrement dit quand la réunion des deux atlas est un atlas.

La relation de compatibilité entre deux atlas est une relation d'équivalence : elle est trivialement réflexive et symétrique. Elle est aussi transitive : soit g_i et g_j'' dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}''$. A-t-on $g_i \circ (g_j'')^{-1} \in C^k$? La question ne se pose que si $U_i \cap U_j''$ est non vide. Alors tout point x

de $U_i \cap U_j''$ appartient à un ouvert U'_k de l'atlas $\mathcal{A}'$. On écrit $g_i \circ (g_j'')^{-1} = g_i \circ (g'_k)^{-1} \circ g'_k \circ (g_j'')^{-1}$ et la régularité est préservée par composition.

On quotiente donc l'ensemble des atlas d'un espace topologique donné M par cette relation d'équivalence. Autrement dit : on identifie un atlas donné et sa classe d'équivalence.

Définition 2.18 (Variété). *Soit M un espace topologique. Une structure de variété C^k sur M est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas C^k .*

On dira donc “soit M une variété C^k ” pour dire “soit M et un atlas C^k de M , ou n'importe quel atlas équivalent”.

2.2. Exemples. L'espace $\mathbb{R}^n$ est une variété de dimension n (et de régularité C^∞). Un atlas est donné par $\{(\mathbb{R}^n, \text{Id})\}$. Un autre atlas, compatible avec le précédent, est donné par $\{(B(x, 1), \text{Id}_{B(x, 1)})\}_{x \in \mathbb{R}^n}$.

Sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, on connaît un atlas, cf Exemple 2.16. Voici un autre atlas : On note U_i l'ensemble des points de la sphère de i -ème coordonnée strictement positive. On pose $g_i(x) = \hat{x}^i$, le point de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. La famille $(U_i, g_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un atlas, compatible avec le précédent. (Cf exercice 2.14 page 56.)

Deux atlas non compatibles : dans $\mathbb{R}$, on considère l'atlas $(\mathbb{R}, \varphi = \text{Id})$ et l'atlas $(\mathbb{R}, \psi : x \rightarrow x^3)$. Ces atlas ne sont pas compatibles, car $\varphi \circ \psi^{-1}(x) = x^{1/3}$ n'est pas C^1 .

On fabrique des variétés par restriction : un ouvert U d'une variété M est une variété (choisir comme ouverts de l'atlas les ouverts de carte qui sont inclus dans U), et par produit : un produit de variétés est une variété (vérification triviale).

On fabriquera des variétés par quotient dans un moment. On va voir tout de suite que les sous-variétés sont des variétés.

2.3. Les sous-variétés sont des variétés.

Théorème 2.19 (Les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ sont des variétés). *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. La famille de toutes les réciproques de paramétrages locaux de M est un atlas.*

PREUVE. Pour tout x de M , il existe un ouvert V'_x de $\mathbb{R}^m$, un ouvert U_x de $\mathbb{R}^n$ et g_x un homéomorphisme de V'_x vers $g_x(V'_x) = U_x \cap M$. C'est ce que nous dit le Théorème 2.10. Posons donc $\mathcal{A} = (U_x \cap M, g_x^{-1})_{x \in M}$. Est-ce un atlas ? Les $U_x \cap M$ sont des ouverts de M par définition de la topologie induite. Les g_x^{-1} sont des homéomorphismes, d'image V'_x , par le Théorème 2.10. Les $U_x \cap M$ recouvrent bien sûr M . Les changements de carte sont réguliers : c'est la Proposition 2.13. Ce sont donc des homéomorphismes C^k . La réciproque d'un changement de carte est encore un changement de carte. Donc les changements de carte sont des difféomorphismes C^k . $\square$

Plus tard on prouvera que toute variété de dimension m peut être vue comme une sous-variété d'un certain $\mathbb{R}^n$ avec $n = n(m)$ (Théorème de Whitney).

2.4. Propriétés topologiques. Les variétés sont des espaces topologiques

- localement compacts
- localement connexes
- connexe $\iff$ connexe par arcs

Ce sont des propriétés héritées de la structure locale de $\mathbb{R}^n$. Cf exercice 2.13 page 56.

2.5. Applications différentiables entre variétés. On notera souvent $M, N, \dots$ des variétés. Leur dimension est $m, n, \dots$. Un atlas de M sera souvent noté (U_i, g_i) . Un atlas de N sera noté (V_i, h_i) . On suit donc l'ordre alphabétique : $M \sim (U_i, g_i)$, $N \sim (V_i, h_i)$, $P \sim (W_i, k_i)$. (on se refuse à noter i ou j une application).

On veut donner un sens à “ $f : M \rightarrow N$ est C^k ”, quand M et N sont deux variétés C^k . Remarquons que f différentiable en x_0 , qui s'écrit

$$(2.2) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h)$$

utilise une structure d'év au départ $(x_0 + h)$ et à l'arrivée $(f(x_0 + h) - f(x_0))$. Si $f : M \rightarrow N$ est une application entre deux variétés M et N , on n'a bien sûr pas de structure d'év, ni au départ ni à l'arrivée, en général. On dira qu'une telle application est C^k quand elle est C^k dans les cartes, c'est-à-dire qu'on remplacera (2.2) par

$$\underbrace{h \circ f \circ g^{-1}(\underbrace{g(x_0) + h}_{\text{addition dans } \mathbb{R}^n}) - h \circ f \circ g^{-1}(g(x_0))}_{\text{addition dans } \mathbb{R}^p} = L(x_0)h + o(h),$$

si $\dim M = n$ et $\dim N = p$, avec g carte en x_0 et h carte en $f(x_0)$. Précisément :

Définition 2.20. Soit M et N deux variétés. Une application continue $f : M \rightarrow N$ est dite C^k en x quand $h_i \circ f \circ g_j^{-1}$ est C^k en $g_j(x)$, pour tous i, j .

Quels sont les i, j pour lesquels la condition de la définition a un sens ? Il faut bien sûr que (g_j, V_j) soit une carte en x , et par composition il faut que (h_i, W_i) soit une carte en $f(x)$.

Quel est le domaine de $h_i \circ f \circ g_j^{-1}$? Le couple (U_j, g_j) est une carte de M . Un vecteur x' de $g_j(U_j)$ est envoyé sur M par g_j^{-1} , puis sur N par f , puis sur $\mathbb{R}^m$ par h_j . Donc l'application

$$h_i \circ f \circ g_j^{-1} : g_j(U_j \cap f^{-1}(V_i)) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow h_i(f(U_j \cap f^{-1}(V_i))) \subset \mathbb{R}^n$$

est une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ vers une partie de $\mathbb{R}^n$. Parler de son caractère C^k a un sens. Remarquons ici que f est supposée continue. On n'a besoin que de savoir que M et N sont des espaces topologiques pour donner un sens à la continuité de f . En particulier, $f^{-1}(V_i)$ est ouvert dans M . Donc $U_j \cap f^{-1}(V_i)$ est ouvert dans M , et son image par g_j est un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Un critère simple pour vérifier qu'une application est C^k :

Proposition 2.21. Il suffit de trouver une carte au départ et une carte à l'arrivée telles que $h_{i_0} \circ f \circ g_{j_0}^{-1}$ soit C^k en $g_{j_0}(x)$, pour que f soit C^k .

PREUVE. Cela repose simplement sur le fait que les changements de carte sont C^k . Soit x sur M et $(U, g), (V, h)$ des cartes, et on cherche à montrer que $h \circ f \circ g^{-1}$ est C^k en $g(x)$. On sait qu'il existe (U_{j_0}, g_{j_0}) une carte en x sur M et (V_{i_0}, h_{i_0}) une carte en $f(x)$ sur N telles que $h_{i_0} \circ f \circ g_{j_0}^{-1}$ soit C^k en $g_{j_0}(x)$. On utilise les changements de carte pour écrire

$$h \circ f \circ g^{-1} = \underbrace{h \circ h_{i_0}^{-1}}_{\substack{\in C^k \\ \text{chgt carte sur } N}} \circ \underbrace{h_{i_0} \circ f \circ g_{j_0}^{-1}}_{\substack{\in C^k \\ \text{par hypothèse}}} \circ \underbrace{g_{j_0} \circ g^{-1}}_{\substack{\in C^k \\ \text{chgt carte sur } M}}$$

qui est donc C^k en $g(x)$. En effet, il suffit de vérifier *ponctuellement* la propriété C^k :

- $g_{j_0} \circ g^{-1}$ est C^k au point $g(x)$, et envoie $g(x)$ sur $g_{j_0}(x)$,
- $h_{i_0} \circ f \circ g_{j_0}^{-1}$ est C^k au point $g_{j_0}(x)$, qui est envoyé sur $h_{i_0}(f(x))$,
- $h \circ h_{i_0}^{-1}$ est C^k au point $h_{i_0}(f(x))$, car $f(x) \in V_{i_0}$.

□

Cas particulier d'une application $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors pour vérifier le caractère C^k de f en x , il suffit de vérifier que $f \circ \varphi^{-1}$ est C^k en $\varphi(x)$, où φ est une carte sur M en x . On utilise ici l'atlas trivial $\{(\mathbb{R}^n, \text{Id})\}$ de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.22. *L'injection de la sphere $\mathbb{S}^{n-1}$ vers l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$ est une application lisse. En effet, on la regarde dans les cartes $g_i : x \rightarrow \hat{x}^i$. Le domaine de g_i est U_i^+ ou U_i^- . C'est l'ensemble des points $(x_1, \dots, x_n)$ de la sphere avec $x_i > 0$ ou $x_i < 0$. En particulier l'image de g_i est inclus dans $\{|x'| < 1\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, car si $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ avec $x_i \neq 0$, alors $|\hat{x}_i| < 1$. On utilise le cas particulier juste au-dessus. Il suffit donc de considérer les applications $i \circ g_i^{-1}$. On calcule*

$$\begin{aligned} i \circ g_i^{-1}(x') &= i \circ g_i^{-1}(x'_1, \dots, x'_{n-1}) = i(x'_1, \dots, x'_{i-1}, \sqrt{1 - |x'|^2}, x'_i, \dots, x'_{n-1}) \\ &= (x'_1, \dots, x'_{i-1}, \sqrt{1 - |x'|^2}, x'_i, \dots, x'_{n-1}) \end{aligned}$$

qui est lisse dans $\{|x'| < 1\}$.

Cas particulier d'une restriction à l'arrivée : application à valeurs dans une sous-variété : soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$, avec M sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Alors pour vérifier que f est C^k , il suffit de vérifier que f est C^k en tant qu'application $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Cas particulier d'une restriction au départ : restriction du domaine à une sous-variété : si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow N$ est C^k , alors la restriction de f à toute sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est C^k . (Toute sous-variété C^k , bien sûr.)

Proposition 2.23. *Tout se passe bien : la Définition 2.20 donne une théorie qui fonctionne. Par exemple :*

- Stabilité du caractère C^k par composition.
- Cas particulier d'un espace produit au départ : les projections $X \times Y \rightarrow X$ sont lisses.
- Cas particulier d'un espace produit à l'arrivée : une application à valeur dans une variété produit est C^k si et seulement si ses composantes sont C^k .

2.6. Difféomorphismes. La Définition 2.20 permet de définir une notion de difféomorphismes entre variétés. Discussion intéressante dans Lee, pages 26-27 :

- deux variétés distinctes sont-elles difféomorphes ?
- deux structures distinctes de variété sur un même espace topologique sont-elles difféomorphes ?

2.7. Revêtements et quotients.

Définition 2.24. *Soit X, Y des variétés et une application $p : X \rightarrow Y$, de classe C^k . On dit que p est un revêtement quand pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage V de y dans B et*

des ouverts $(U_i)_{i \in I}$ deux à deux disjoints de X tels que $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$, et tels que $p|_{U_i}$ est un C^k -difféomorphisme de U_i vers $p(U_i) = V$, pour tout i .

Formellement un revêtement est un triplet (X, Y, p) (espace total, base, projection), mais on dira “le revêtement p ”. Pour $y \in Y$, l’ensemble $p^{-1}(\{y\})$ est la *fibres* de y . Si le cardinal des fibres est fini et constant égal à $m \in \mathbb{N}$, on dit que p est un revêtement à m feuillets.

Dans un cadre topologique (X, Y) espaces topologiques, on considère des revêtements seulement *continus* et on impose la condition $p|_{\dots}$ est un *homéomorphisme* de $\dots$ vers $\dots$.

Exemple 2.25. L’application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ qui à t associe $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ est un revêtement. En effet, p est continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$. Soit $(\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{S}^1$. On pose $V = p((\theta - 1/3, \theta + 1/3))$. C’est un ouvert de $\mathbb{S}^1$. (Les applications $\cos$ et $\sin$ sont localement ouvertes.) L’image réciproque $p^{-1}(V)$ est l’union des intervalles $(\theta - 1/3 + k, \theta + 1/3 + k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Ces intervalles sont disjoints. Ce sont des ouverts de $\mathbb{R}$. La restriction de p à chacun de ces intervalles est un difféomorphisme lisse d’image V .

Exemple 2.26. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tend vers l’infini à l’infini et est étale (c’est-à-dire $f'(x)$ inversible pour tout x), alors f est un revêtement. Cf exercice 2.19 page 57.

Exemple 2.27. Un homéomorphisme local dont le cardinal des fibres est constant est un revêtement. Cf exercice 2.18 page 57.

Exemple 2.28. Spectre d’une matrice dont toutes les valeurs propres sont simples. Perturbation du spectre. La projection est un revêtement.

Soit $y \in Y$, tel que $\text{card } p^{-1}(\{y\})$ est fini égal à m . Soit V comme dans la définition, et $U_1, \dots, U_m$ chacun contenant un antécédent x_j de y . Alors

$$(2.3) \quad p^{-1}(V) = \bigcup_{1 \leq j \leq m} U_j.$$

En effet, si un des U_i avec $i \notin \{1, \dots, m\}$ était non vide, alors y aurait un antécédent dans U_i , puisque p est un homéomorphisme de U_i vers V . L’égalité (2.3) nous dit que tout point z de V a exactement m antécédents. L’application $y \in Y \rightarrow \text{card } p^{-1}(\{y\}) \in \mathbb{N}$ est une application localement constante.

En particulier, si Y est connexe, et tous les points de Y ont une fibre finie, alors l’application $y \rightarrow \text{card } p^{-1}(\{y\})$ est constante. En effet, une application localement constante et à valeurs dans $\mathbb{N}$ est constante dans un espace connexe. Alors p est un revêtement à m feuillets, avec $m = \text{card } p^{-1}(\{y\})$.

Vérification : Soit $x_0 \in Y$, et m_0 le cardinal de la fibre de x_0 . Alors Y_{m_0} défini comme l’ensemble des points de Y dont la fibre a pour cardinal m_0 est non vide et ouvert. Les Y_m , pour $m \in \mathbb{N}$, sont aussi ouverts (éventuellement vides), par le même argument que ci-dessus. L’union des Y_m est une partition ouverte de Y . Cette partition ne peut contenir qu’un seul élément, par connexité de Y . Cet élément est nécessairement Y_{m_0} .

L'ensemble des difféomorphismes $\text{Diff}(M)$ d'une variété M est un groupe (par composition). Ce groupe agit sur M par

$$(\varphi, x) \in \text{Diff}(M) \times M \rightarrow \varphi(x) \in M.$$

C'est une action de groupe : $\text{Id}(x) = x$, $\varphi_1(\varphi_2(x)) = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(x)$, par définition de la composition. Tout sous-groupe de $\text{Diff}(M)$ agit sur M par restriction de l'action ci-dessus. On note $G \cdot x$ l'orbite d'un point x de M sous l'action d'un sous-groupe de $\text{Diff } M$.

On dit qu'un sous-groupe G de $\text{Diff}(M)$ agit sur M de façon :

- *libre* quand pour tout $x \in M$, il existe un voisinage V de x dans M tel que pour tout $\varphi \in G$, $\varphi V \cap V$ est vide si $\varphi \neq \text{Id}$,
- *propre* quand pour tous $x, y \in M$, si $y \notin G \cdot x$, alors il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tels que $\varphi U \cap V$ est vide, pour tout $\varphi \in G$.

Exemple 2.29. Pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, k est identifié à l'application $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow k + x \in \mathbb{R}^n$, qui est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$. L'application $(k, x) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow k + x \in \mathbb{R}^n$ est une action de groupe. Cette action est libre : il suffit de choisir $V = B(x, 1/3)$, avec la norme sup des coordonnées. En effet, si $z \in B(x, 1/2)$ et si $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, alors $k + z \notin B(x, 1/3)$, car sinon pour tout j , on aurait $|k_j + z_j - x_j| < 1/3$, et donc $|z_j - x_j| \geq 1 - 1/3$. Cette action est propre : pour tous x, y , l'ensemble des k de $\mathbb{Z}^n$ tels que $x + k \in \bar{B}(y, 1)$ est fini. Donc la distance de y à $x + \mathbb{Z}^n$, l'orbite de x , est positive, puisqu'elle est égale à $\min_{k, x+k \in \bar{B}(y, 1)} |x + k - y| > 0$. Soit ε cette distance. Alors $U = B(x, \varepsilon/2)$ et $V = B(y, \varepsilon/2)$ conviennent.

Exemple 2.30. Soit $\{\text{Id}, -\text{Id}\} \subset \text{Diff}(\mathbb{S}^{n-1})$. L'action de ce sous-groupe sur la sphère est libre : la distance (au sens de l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$) de x à $-x$ est un diamètre d , et les boules $B(x, d/3) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ et $B(-x, d/3) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ sont disjointes. L'action est propre : si $y \notin \{x, -x\}$, alors pour $\varepsilon = \frac{1}{3} \min(|x - y|, |x + y|)$, on a $B(y, \varepsilon) \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset$, $B(y, \varepsilon) \cap B(-x, \varepsilon) \cap \emptyset$.

Si G agit sur M , la relation $x \in G \cdot y$ (c'est-à-dire : x appartient à l'orbite de y) est une relation d'équivalence. On note M/G l'espace quotient.

Théorème 2.31. Soit M une variété et G un sous-groupe de $\text{Diff}(M)$ agissant librement et proprement sur M . Alors

- l'espace quotient M/G est séparé,
- la projection canonique $p : M \rightarrow M/G$ est un revêtement,
- M/G est une variété.

Par définition, la topologie de M/G est la topologie quotient : une partie V de M/G est ouverte si et seulement si (par définition) $p^{-1}V$ est ouvert dans M .

On remarque que

$$(2.4) \quad p^{-1}pU = \bigcup_{g \in G} gU, \quad \text{pour tout } U \text{ ouvert dans } M.$$

(Les deux inclusions sont immédiates.)

En particulier, p est ouverte, puisque $p^{-1}(p(U))$ est une union d'ouverts de M . (Les éléments de g sont des homéomorphismes de M , donc des applications ouvertes.)

La régularité de M/G est celle de M et G (ou le minimum des deux si les régularités sont distinctes.) La dimension de M/G est celle de M , cf preuve plus bas. (On construit l'atlas de M/G à partir de l'atlas de M .)

PREUVE. *L'espace quotient est séparé* : ici la structure de variété ne joue pas, simplement le caractère propre de l'action de G . Soit $\dot{x}$ et $\dot{y}$ distincts dans M/G . Soit $x \in \dot{x}$ et $y \in \dot{y}$. Il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tel que $gU \cap V = \emptyset$ pour tout $g \in G$, car l'action est propre. Alors $p(U)$ et $p(V)$ sont ouverts dans M/G . Montrons qu'ils conviennent : si $p(U) \cap p(V)$ est non vide, alors $p^{-1}pU \cap p^{-1}pV$ est non vide. Donc, via (2.4), $\bigcup_{g \in G} gU \cap \bigcup_{g' \in G} g'V$ est non vide. Soit donc g, g' tel que $gU \cap g'V \neq \emptyset$. Alors $(g')^{-1}gU \cap V \neq \emptyset$, contradiction.

La projection est un revêtement : Soit $\dot{x} \in M/G$, et $x \in \dot{x}$. Soit U un voisinage de x tel que $U \cap gU = \emptyset$, pour tout $g \neq \text{Id}$ dans G . (L'action est libre.) Alors $p|_U$ est un homéomorphisme. En effet, $p|_U : U \rightarrow p(U)$ est continue, et pour tout $\dot{y} \in p(U)$, soit y un antécédent dans U . S'il existait un autre antécédent $g(y)$ dans U , alors cela contredirait $U \cap g(U) = \emptyset$. Donc $(p|_U)^{-1}$ est bien définie. Comme $p|_U$ est ouverte comme p , la réciproque est donc continue. Le même argument vaut pour $p|_{gU} : gU \rightarrow p(gU) = p(U)$, pour tout $g \in G$. Finalement, $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$, union disjointe d'ouverts de M , et $p(gU) = p(U)$.

Un atlas de M/G : Pour tout $\dot{x}$ dans M/G , on a vu qu'on peut trouver U un ouvert de M tel que $\dot{x} \in p(U)$ et $p|_U$ est un homéomorphisme sur $p(U)$. On peut supposer que U est inclus dans un ouvert de carte sur M . Soit φ la carte correspondante. On va montrer que $\{(p(U), \varphi \circ (p|_U)^{-1})\}_{\dot{x} \in M/G}$ est un atlas de M/G .

Il est clair que les $p(U)$, quand $\dot{x}$ parcourt M/G , recouvrent M/G , puisque chaque $\dot{x}$ appartient à son $p(U)$. Les $p(U)$ sont des ouverts du quotient car p est ouverte. Par définition, les cartes $\varphi \circ (p|_U)^{-1}$ sont des homéomorphismes.

Il reste à vérifier que les changements de carte sont réguliers. Soit $(p(V), \psi \circ (p|_V)^{-1})$ et $(p(U), \varphi \circ (p|_U)^{-1})$ deux cartes qui se voient, au sens où $p(U) \cap p(V) \neq \emptyset$. Considérons

$$\psi \circ (p|_V)^{-1} \circ p|_U \circ \varphi^{-1},$$

de domaine $\varphi \circ (p|_U)^{-1}(p(U) \cap p(V)) = \varphi(U \cap p^{-1}pV)$. Donc on doit calculer

$$(p|_V)^{-1} \circ p|_U, \quad \text{dans } U \cap p^{-1}pV.$$

Soit $x \in U \cap p^{-1}pV = U \cap (\bigcup_{g \in G} gV)$. L'union des gV étant disjointe (action libre et définition des ouverts de carte), on a donc $x = g(y)$ pour un unique g dans G et un unique y dans V . On fait agir $(p|_V)^{-1} \circ p|_U$ sur x , c'est-à-dire qu'on projette $x \rightarrow \dot{x}$, puis on cherche l'élément de V qui appartient à l'orbite de x . Cet élément est $g^{-1}x$, car $x = g(y)$. Donc

$$(p|_V)^{-1} \circ p|_U(x) = g^{-1}(x).$$

Si x_1 est proche de x dans $U \cap p^{-1}pV$, alors $g^{-1}(x_1)$ est un élément de V , par continuité de g^{-1} et du fait du caractère ouvert de V . Donc $y_1 = g^{-1}(x_1)$ est l'unique élément de V qui appartient à l'orbite de x_1 . Autrement dit, $(p|_V)^{-1} \circ p|_U(x_1) = g_1^{-1}(x_1)$, et on vient de vérifier que le difféo g ne dépend pas de x dans un petit voisinage de x contenu dans $U \cap p^{-1}pV$. Finalement,

$$(p|_V)^{-1} \circ p|_U = g^{-1}, \quad \text{dans un petit voisinage de } x \text{ contenu dans } U \cap p^{-1}pV.$$

Donc le changement de carte est localement

$$\psi \circ g^{-1} \circ \varphi^{-1},$$

et c'est une application C^k en tant que composée d'applications C^k .

Régularité de p : c'est automatique via la définition de l'atlas de M/G . En effet, soit $x \in M$. On cherche à vérifier la régularité de p en x . Soit (U, φ) une carte en x , avec U assez petit de sorte que $gU \cap U = \emptyset$ pour $g \neq \text{Id}$. Alors $(p(U), \varphi \circ p|_U^{-1})$ est une carte en $p(x)$. Il s'agit donc de vérifier que

$$(2.5) \quad \varphi \circ (p|_U)^{-1} \circ p \circ \varphi^{-1}$$

est régulière en $\varphi(x)$. Mais pour y proche de $\varphi(x)$, on a $\varphi^{-1}(y) \in U$, et donc (2.5) est l'identité au voisinage de x . $\square$

Exemple 2.32. *Le tore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est une variété de dimension n , et $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ un revêtement, via l'exemple 2.29 et le Théorème 2.31.*

Exemple 2.33. *L'espace projectif $P^{n-1}(\mathbb{R}) := \mathbb{S}^{n-1}/\{\text{Id}, -\text{Id}\}$ est une variété de dimension $n-1$, via l'Exemple 2.30.*

Exemple 2.34. *Bouteille de Klein. Berger-Gostiaux page 73 (édition en anglais).*

3. Fibré tangent

Il existe d'autres définitions que celle qu'on va donner ici : voir Lee chapitre 3, et en particulier le paragraphe "alternative definitions of the tangent space" p55.

3.1. Espace tangent en un point à une sous-variété. Soit M une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est tangent à M en x s'il existe une courbe $\gamma : I \rightarrow M$, de classe C^1 , définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0, telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = u$. On note $T_x M$ l'ensemble des vecteurs tangents en M au point x .

On remarque que l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathbb{R}^m$ en $x \in \mathbb{R}^m$ est $\mathbb{R}^m$. (En effet : toute courbe dessinée sur $\mathbb{R}^m$ aura une dérivée en 0 qui appartient à $\mathbb{R}^m$. Réciproquement, si $u \in \mathbb{R}^m$, alors la courbe $x + tu$ convient.) Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, l'ensemble des vecteurs tangents à U en $x \in U$ est $\mathbb{R}^m$. (Vérification identique).

De même l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ est $\mathbb{R}^m \times \{0\}$. L'ensemble des vecteurs tangents à $V \times (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, est $\mathbb{R}^m \times \{0\}$.

Proposition 2.35. *L'ensemble $T_x M$ est un espace vectoriel de dimension m , et*

$$T_x M = \varphi'(x)^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}),$$

avec φ un difféomorphisme comme dans la Définition 2.1 : $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$.

PREUVE. Soit $u \in T_x M$, et γ une courbe tracée sur M avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = u$. On peut supposer que I est assez petit de sorte que $\gamma(I) \subset U \cap M$. Alors $\varphi \circ \gamma$ est une courbe $I \rightarrow V \cap \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Sa dérivée en 0 appartient donc à $\mathbb{R}^m \times \{0\}$. Par ailleurs $(\varphi \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Donc $u \in \varphi'(x)^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Réciproquement, si $u = \varphi'(x)^{-1}v$, avec $v \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$, on veut voir u comme un vecteur de $T_x M$. Soit $\gamma_0 : I \rightarrow V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ une courbe telle

que $\gamma_0(0) = \varphi(x)$ et $\gamma'_0(0) = v$. (Cf remarque ci-dessus.) Alors $\varphi^{-1} \circ \gamma_0 : I \rightarrow U \cap M$, et $\varphi^{-1} \circ \gamma_0(0) = x$, et $(\varphi^{-1} \circ \gamma_0)'(0) = (\varphi^{-1})'(\varphi(x))v$, et comme $\varphi'(x)^{-1} = (\varphi^{-1})'(\varphi(x))$ (cf première partie du cours), on a $u = (\varphi \circ \gamma_0)'(0)$, et donc $u \in T_x M$. $\square$

Les autres points de vue (submersion, paramétrage, graphe) donnent des descriptions équivalentes de l'espace tangent en un point :

- *submersion* : Soit f submersion $U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ telle que $f^{-1}(\{0\}) = U \cap M$. Soit γ une courbe tracée sur M , telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = u$. Alors $f \circ \gamma(t) \equiv 0$. En particulier, $f'(\gamma(0))\gamma'(0) = 0$, et donc $x \in \ker f'(x)$. On vient de prouver $T_x M \subset \ker f'(x)$. Par le théorème du rang, $\dim \ker f'(x) = m$. Donc $T_x M = \ker f'(x)$, par la Proposition 2.35.
- *graphe* : cf exercice 3.3 page 59.
- *paramétrage* : Soit U, V' et g comme dans le Théorème 2.10, de sorte que $g(V') = U \cap M$, avec $g(0) = x$. Soit γ_0 une courbe tracée sur V' , avec $\gamma_0(0) = 0$. Alors $g \circ \gamma_0$ est une courbe tracée sur M . Et $(g \circ \gamma_0)'(0) = g'(0)\gamma'_0(0) \in T_x M$. Donc $T_x M$ contient $\text{Im } g'(0)$. Par égalité des dimensions (g est une immersion $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$), $T_x M = \text{Im } g'(0)$.

Exemple 2.36. *Sphère.* L'espace tangent $T_x \mathbb{S}^{n-1} = \ker f'(x)$, avec $f(x) = |x|^2$. Donc $T_x \mathbb{S}^{n-1} = x^\perp$, l'orthogonal de x pour le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

On verra en TD (exercice 3.5) que localement au voisinage de $x \in M$, la sous-variété M est un graphe au-dessus de $T_x M$, ce qu'on voit bien dans l'exemple ci-dessus dans le cas de la sphère.

3.2. Fibré tangent à une sous-variété. On appelle *fibré tangent* l'ensemble

$$TM = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M$$

des points de M au-dessus desquels on colle l'espace tangent correspondant.

Proposition 2.37. *Le fibré tangent TM est une sous-variété de dimension $2m$ de $\mathbb{R}^{2n}$, de régularité C^{k-1} . (Ici $k \geq 2$ est la régularité de M .)*

PREUVE. Soit $(x, u) \in TM$. On cherche (via le Théorème 2.10) un paramétrage local au voisinage de (x, u) , c'est-à-dire une immersion $G : \mathbf{V}' \rightarrow \mathbf{U} \cap TM$, avec $\mathbf{V}'$ ouvert de $\mathbb{R}^{2m}$ et $\mathbf{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$, tels que $G(0) = (x, u)$ et G soit un homéomorphisme. Comme M est une sous-variété, il existe V' ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $g : V' \rightarrow U \cap M$ immersion et homéomorphisme, avec $g(0) = x$ et U voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$. On pose $\mathbf{V}' = V' \times \mathbb{R}^m$ et $G(x', v) = (g(x'), g'(x')v)$. Alors $G(V' \times \mathbb{R}^m) = (U \times \mathbb{R}^n) \cap TM$, par la description plus haut de l'espace tangent via un paramétrage. Par ailleurs, G est une immersion :

$$G'(x', v) = \begin{pmatrix} g'(x') & g''(x')(v) \\ 0 & g'(x') \end{pmatrix},$$

matrice de rang $2m$, égal à la dimension de l'espace de départ. Enfin, G est un homéomorphisme : étant donné $(x, u) \in (U \times \mathbb{R}^n) \cap TM$, on a $x \in U$ et $u \in T_x M$, donc $x = g(0)$ et $u = g'(0)v$, si bien que $G^{-1}(x, u) = (0, v) = (g^{-1}(x), g'(g^{-1}(x))^{-1}u)$, avec $g'(g^{-1}(x))^{-1} : \text{Im } g'(g^{-1}(x)) = T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Donc G^{-1} est continue par régularité de g . $\square$

3.3. Changement de paramétrage. Soit g_1 et g_2 deux paramétrages en un point $x \in M \subset \mathbb{R}^n$. Soit $u \in T_x M$. Il existe donc $u_1 \in \mathbb{R}^m$ et $u_2 \in \mathbb{R}^m$ tels que $u = (g'_1)(0)u_1 = (g'_2)(0)u_2$. En particulier, u_1 et u_2 donnent lieu au même vecteur de $T_x M$, et satisfont

$$(2.6) \quad u_1 = (g'_1)(0)^{-1} g'_2(0) u_2 = (g_1^{-1} \circ g_2)'(0) u_2.$$

3.4. Fibré tangent à une variété. Soit M une variété de dimension m (et de régularité C^k). On considère des quadruplets

$$(2.7) \quad (U, g, x, v) : \begin{cases} (x, v) \in M \times \mathbb{R}^m \\ (U, g) \text{ carte autour de } x \end{cases}$$

On définit une relation binaire pour de tels quadruplets :

$$(2.8) \quad (U_1, g_1, x_1, v_1) \sim (U_2, g_2, x_2, v_2) \iff \left(x_2 = x_1, \quad v_2 = (g_2 \circ g_1^{-1})'(g_1(x)) v_1 \right).$$

Pourquoi la relation portant sur v_1 et v_2 dans (2.8) ? Elle est à comprendre comme la copie de (2.6). Voir aussi la preuve du Lemme 2.38. La relation (2.8) est une relation d'équivalence (vérification sans histoire).

Par ailleurs, on considère des courbes $\gamma : I \rightarrow M$, de classe C^1 , comme dans le cadre “concret” des sous-variétés. On dit que deux courbes γ_1 et γ_2 sont équivalentes quand

$$(2.9) \quad \gamma_1(0) = \gamma_2(0), \quad (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0),$$

avec φ carte au voisinage de $\gamma_1(0)$. La dérivée a bien un sens : comme φ est une carte, l'existence de cette dérivée signifie précisément que les courbes γ_1 et γ_2 , qui sont tracées sur M , sont différentiables en 0.

Remarquons que si $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow M$ satisfont $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$, alors si g est une autre carte en $x = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, alors $(g \circ \gamma_1)'(0) = (g \circ \gamma_2)'(0)$, car

$$(g \circ \gamma_1)'(0) = (g \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_1)'(0) = (g \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x)) (\varphi \circ \gamma_1)'(0),$$

et tous les termes ont un sens car $g \circ \varphi^{-1}$ est lisse.

La relation $\gamma_1 \sim \gamma_2$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des courbes C^1 tracées sur M , qui ne dépend donc pas de la carte dans (2.9).

Lemme 2.38. *L'ensemble des classes d'équivalence de quadruplets (U, g, x, v) (2.7) pour la relation (2.8) est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence de courbes tracées sur M pour la relation (2.9).*

On identifie ces deux ensembles dans la suite. On note TM , et on appelle *fibré tangent* à M , chacun des ces deux ensembles.

PREUVE. Considérons l'application qui à (U, g, x, v) associe la classe d'équivalence de la courbe

$$\gamma : t \in I \rightarrow \gamma(t) = g^{-1}(g(x) + tv),$$

avec I un petit intervalle ouvert contenant 0. Alors $\gamma(0) = x$ et $(g \circ \gamma)'(0) = v$. Cette application passe au quotient. En effet, si (U_1, g_1, x, v_1) est un quadruplet équivalent, et γ_1

une courbe telle que $\gamma_1(0) = x$, $(g_1 \circ \gamma_1)'(0) = v_1$, alors il s'agit de vérifier que $(g \circ \gamma_1)'(0) = (g \circ \gamma)'(0)$. On calcule :

$$\begin{aligned} (g \circ \gamma_1)'(0) &= (g \circ g_1^{-1} \circ g_1 \circ \gamma_1)'(0) = (g \circ g_1^{-1})'(g_1(x))(g_1 \circ \gamma_1)'(0) \\ &= (g \circ g_1^{-1})'(g_1(x))v_1, \end{aligned}$$

et par (2.8), on a donc

$$(g \circ \gamma_1)'(0) = (g \circ g_1^{-1})'(g_1(x))v_1 = v,$$

ce qu'on voulait vérifier. On a donc une application

$$\overline{(U, g, x, v)} \longrightarrow \overline{t \rightarrow g^{-1}(g(x) + tv)}.$$

L'application réciproque associe à la classe de $\gamma : I \rightarrow M$ la classe du quadruplet

$$(U, g, \gamma(0), (g \circ \gamma)'(0)),$$

où (U, g) est une carte locale en $\gamma(0)$. □

On note

$$p : \overline{(U, g, x, v)} \in TM \rightarrow x \in M$$

la projection canonique de TM vers M . On appelle *espace tangent* en x à M la fibre $p^{-1}(\{x\})$, qu'on note $T_x M$.

Théorème 2.39. *Le fibré tangent TM est une variété de dimension $2m$ et de régularité C^{k-1} .*

PREUVE. La structure de variété qu'on met sur TM est héritée (càd définie à partir) de la structure de variété de M . Soit (U, φ) une carte de M , et l'application

$$(x, v) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \overline{(U, \varphi, \varphi^{-1}(x), v)} \in p^{-1}(U),$$

où $p : TM \rightarrow M$ est la projection canonique. Cette application est bijective malgré les apparences : la réciproque associe en effet à la classe de (U, φ, x, v) le vecteur $(\varphi(x), v)$. On a ainsi une réciproque bien définie, *puisque la carte (U, φ) est fixée*. On note $\tilde{\varphi}$ cette réciproque.

Les ensembles $p^{-1}(U)$ recouvrent TM . On cherche à vérifier que $(p^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ est un atlas de TM . L'application de changement de carte

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^m$$

est

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1}(x, v) = \tilde{\varphi}_1 \left(\overline{(U_2, \varphi_2, \varphi_2^{-1}(x), v)} \right).$$

Comme $x \in \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, son image $\varphi_2^{-1}(x)$ est dans $U_1 \cap U_2$. Donc par définition des classes d'équivalences,

$$(U_1, \varphi_1, \varphi_2^{-1}(x), (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})'(x)v) \in \overline{(U_2, \varphi_2, \varphi_2^{-1}(x), v)}.$$

Et donc, par définition de $\tilde{\varphi}_1$,

$$\tilde{\varphi}_1 \left(\overline{(U_2, \varphi_2, \varphi_2^{-1}(x), v)} \right) = (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x), (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})'(x)v).$$

L'application de changement de carte est donc l'application de classe C^{k-1} :

$$(x, v) \longrightarrow (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x), (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})'(x)v),$$

si bien qu'on a un atlas C^{k-1} sur TM , avec des cartes qui définissent des bijections vers des ouverts de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

Il reste à définir une *topologie* sur TM . On admet qu'il existe une (unique) topologie sur TM qui fait des applications de carte des homéomorphismes. Cf remarque ci-dessous. $\square$

Remarque 2.40. Voir Paulin remarque 2.6 page 14 du fichier pdf, pour la définition d'une topologie sur un ensemble muni d'un atlas.

Théorème 2.41. L'espace tangent $T_x M$ en M à x (défini juste au-dessus du Théorème 2.39 comme la fibre $p^{-1}(\{x\})$) est un espace vectoriel de dimension m .

PREUVE. Soit $x_0 \in M$, et (U, φ) une carte en x_0 . On considère la restriction $\tilde{\varphi}_{x_0} = \tilde{\varphi}|_{p^{-1}(x_0)}$ à la fibre $p^{-1}(x_0)$ de l'application $\tilde{\varphi}$ de $p^{-1}U$, vue dans la preuve précédente :

$$\tilde{\varphi}_{x_0} : \overline{U, \varphi, x_0, v} \in p^{-1}\{x_0\} \rightarrow (\varphi(x_0), v) \in \{\varphi(x_0)\} \times \mathbb{R}^m.$$

C'est une bijection. En effet, la réciproque envoie (x_0, v) sur la classe de (U, φ, x_0, v) . Donc $p^{-1}(\{x_0\})$ hérite de la structure d'espace vectoriel de dimension m de $\{\varphi(x_0)\} \times \mathbb{R}^m$ (càd de celle de $\mathbb{R}^m$), via

$$\lambda z + z' = \tilde{\varphi}_{x_0}^{-1}(\lambda \tilde{\varphi}_{x_0}(z) + \tilde{\varphi}_{x_0}(z')),$$

c'est-à-dire

$$(2.10) \quad \lambda \left(\overline{U, \varphi, x_0, v_1} \right) + \left(\overline{U, \varphi, x_0, v_2} \right) \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{U, \varphi, x_0, \lambda v_1 + v_2}.$$

Cette structure ne dépend pas de la carte choisie : en effet, soit (V, ψ) une autre carte en x . Il s'agit alors de vérifier qu'on peut identifier

$$\tilde{\varphi}_{x_0}^{-1}(\lambda \tilde{\varphi}_{x_0}(z) + \tilde{\varphi}_{x_0}(z')) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_{x_0}^{-1}(\lambda \tilde{\psi}_{x_0}(z) + \tilde{\psi}_{x_0}(z'))$$

ce qui revient à identifier les vecteurs de

$$(2.11) \quad \lambda \tilde{\varphi}_{x_0}(z) + \tilde{\varphi}_{x_0}(z') \in \{\varphi(x_0)\} \times \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_{x_0} \circ \tilde{\varphi}_{x_0}^{-1}(\lambda \tilde{\psi}_{x_0}(z) + \tilde{\psi}_{x_0}(z')) \in \{\varphi(x_0)\} \times \mathbb{R}^m$$

On a comme dans la preuve du Théorème 2.39 :

$$\tilde{\varphi}_{x_0} \circ \tilde{\psi}_{x_0}^{-1}(x_0, v) = \left(x_0, (\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1})'(\psi(x_0))v \right),$$

et $(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1})'(\psi(x_0))$ est un isomorphisme. Donc l'identification dans (2.11) est légitime : elle correspond à un changement de base. $\square$

Il s'agit maintenant de faire la synthèse du paragraphe 3.2 et de ce paragraphe : une sous-variété est une variété. On dispose donc de deux définitions de TM et $T_x M$. Il s'agit de vérifier qu'elles coïncident. Il n'y a aucune difficulté particulière. Voir par exemple Proposition 3.3 dans Paulin.

3.5. Application tangente. Soit $f : M \rightarrow N$, régulière. On définit l'application linéaire tangente à f :

$$Tf : TM \rightarrow TN,$$

par son action sur les fibres :

$$Tf|_{T_x M} = T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N,$$

définie par

$$T_x f : \bar{\gamma} \in T_x M \rightarrow \overline{f \circ \gamma} \in T_{f(x)} N,$$

en notant $\bar{\gamma}$ la classe d'équivalence d'une courbe tracée sur M . Alors

- (1) L'application Tf est bien définie : la classe de $f \circ \gamma$ ne dépend que de la classe de γ .
- (2) L'application $T_x f$ est linéaire de $T_x M$ vers $T_{f(x)} N$.
- (3) Si $f \in C^k$, alors $Tf \in C^{k-1}$.

Vérification :

(1) Soit γ_1 et γ_2 deux courbes tracées sur M , qui sont équivalentes. On veut prouver que $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ sont équivalentes. Pour cela il suffit de prouver que $\psi \circ f \circ \gamma_1$ et $\psi \circ f \circ \gamma_2$ ont même dérivée en 0, pour une carte donnée en $f(x)$. On utilise une carte φ de M en x :

$$\begin{aligned} (\psi \circ f \circ \gamma_1)'(0) &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_1)'(0) \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))(\varphi \circ \gamma_1')(0), \end{aligned}$$

et $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ car $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

(2) Soit l'application (encore notée $T_{x_0} f$) :

$$(2.12) \quad T_{x_0} f : \overline{U, \varphi, x_0, v} \in T_{x_0} M \longrightarrow \overline{V, \psi, f(x_0), (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))v} \in T_{f(x_0)} N.$$

Nous allons vérifier que

- (a) $T_{x_0} f$ ne dépend pas du choix des cartes.
- (b) $T_{x_0} f$ est linéaire.
- (c) Cette définition est cohérente avec la précédente.

Vérification :

- (a) Soit $(U_1, \varphi_1, x_0, v_1)$ dans la classe de (U, φ, x_0, v) dans $T_{x_0} M$. Il s'agit de vérifier que si (V_1, ψ_1) est une carte en $f(x_0)$, alors $(V_1, \psi_1, f(x_0), (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})'(\varphi_1(x))v_1)$ est dans la classe d'équivalence de $T_{x_0} f(\overline{U, \varphi, x_0, v})$. On note

$$w = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))v, \quad w_1 = (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})'(\varphi_1(x))v_1.$$

Il s'agit de vérifier que

$$w_1 = (\psi_1 \circ \psi^{-1})'(\psi(f(x)))w.$$

Comme $(U_1, \varphi_1, x_0, v_1)$ appartient à la classe de (U, φ, x_0, v) , on a

$$v_1 = (\varphi_1 \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))v.$$

Donc

$$w_1 = (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})'(\varphi_1(x))(\varphi_1 \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))v = (\psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))v,$$

si bien que

$$w_1 = (\psi_1 \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))v = (\psi_1 \circ \psi^{-1})'(\psi(f(x)))w,$$

ce qu'on voulait vérifier.

(b) Cela découle directement de la description de la structure d'év de l'espace tangent dans (2.10) et de la linéarité de $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))$.

(c) Soit γ une courbe dont on identifie la classe d'équivalence avec celle de (U, φ, x_0, v) . Il s'agit de vérifier qu'on peut identifier la classe d'équivalence de $f \circ \gamma$ avec celle de $(V, \psi, f(x_0), w)$, où $w = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x_0))v$. On revient par exemple à la preuve du Lemme 2.38 pour la définition de l'identification entre classe de courbes et classe de quadruplets. On voit alors qu'il s'agit de vérifier qu'en posant

$$\gamma_f(t) = \psi^{-1}(\psi(f(x_0)) + t(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x_0))v),$$

on a $\gamma_f \sim f \circ \gamma$, c'est-à-dire $\gamma_f(0) = f \circ \gamma(0)$, qui est vrai (tous les deux égaux à $f(x_0)$), et $(\psi \circ \gamma_f)'(0) = (\psi \circ f \circ \gamma)'(0)$, qui est vrai aussi, car

$$(\psi \circ \gamma_f)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x_0))v,$$

et comme $v = (\varphi \circ \gamma)'(0)$,

$$(\psi \circ \gamma_f)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x_0))(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ f \circ \gamma)'(0).$$

(3) La régularité de Tf se voit dans les cartes, par définition (Cf Proposition 2.21). Soit $x \in M$ et (U, φ) une carte de M en x et (V, ψ) une carte de N en $f(x)$. Les applications de carte correspondantes en $T_x M$ et $T_{f(x)} N$ sont notées $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$, comme dans la preuve du Théorème 2.39. On a alors

$$(2.13) \quad \tilde{\psi} \circ Tf \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}, (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'),$$

et la régularité C^{k-1} est claire.

Vérification de (2.13) : cela découle simplement de la définition de Tf via les quadruplets (2.12) et la définition des cartes $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ dans les fibrés tangents :

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x, v) = \overline{U, \varphi, \varphi^{-1}(x), v},$$

puis

$$\begin{aligned} Tf(\overline{U, \varphi, \varphi^{-1}(x), v}) &= T_{\varphi^{-1}(x)} f(\overline{U, \varphi, \varphi^{-1}(x), v}) \\ &= \overline{V, \psi, \underbrace{f \circ \varphi^{-1}(x)}_{=:y}, \underbrace{(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))v}_{=:w}}, \end{aligned}$$

et enfin

$$\tilde{\psi}(\overline{V, \psi, y, w}) = (\psi(y), w).$$

La théorie serait bancaire sans la proposition suivante, dont la vérification est sans histoire :

Proposition 2.42. *Stabilité du caractère C^k par composition, et formule de dérivation des fonctions composées :*

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf, \quad \text{c'est-à-dire} \quad T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_xf.$$

On dit que $f : M \rightarrow N$ est une *immersion* quand T_xf est une immersion (c'est la seule définition possible, par cohérence avec le cas $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.) De même pour submersion. On a vu en TD (exercice 3.7 page 59) que cela revient à dire que f est une immersion (submersion) *dans les cartes*.

Les résultats de nature locale dans $\mathbb{R}^n$ s'étendent naturellement aux variétés, comme par exemple :

Théorème 2.43. *TIL pour les applications entre deux variétés.*

PREUVE. L'hypothèse est bien sûr que $T_{x_0}f : T_{x_0}M \rightarrow T_{f(x_0)}N$ est un difféomorphisme. On utilise (2.13) : le domaine de $\tilde{\varphi}^{-1}$ est $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$. Soit donc $(\varphi(x_0), v) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$. On a alors, par (2.13) :

$$\tilde{\psi} \circ Tf \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(x_0), v) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(x_0))), (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x_0))v).$$

Comme $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(x_0), v) \in T_{x_0}M$, on a donc

$$\tilde{\psi} \circ Tf \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(x_0), v) = \tilde{\psi} \circ T_{x_0}f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(x_0), v) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(x_0))), (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x_0))v).$$

L'application

$$v \in \mathbb{R}^m \rightarrow \tilde{\psi} \circ T_{x_0}f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(x_0), v)$$

est linéaire (cf expression ci-dessus) et bijective (par hypothèse). C'est donc un isomorphisme. Donc $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x_0))$ est un isomorphisme. Par le TIL, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est donc un difféomorphisme local. Mais alors $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ est un difféo local, ce qu'on voulait prouver. $\square$

4. Sous-variétés

4.1. Définition.

Définition 2.44. *Soit M une variété de dimension m et $N \subset M$. On dit que N est une sous-variété de dimension $p \leq m$ de M quand pour tout $x \in N$, il existe une carte locale (U, φ) en x telle que $\varphi(U \cap N)$ soit une sous-variété de dimension p de $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.*

Une sous-variété est munie naturellement d'une structure de variété. En effet, pour tout $x \in N$, soit (U, φ) une carte de M en x telle que $\varphi(U \cap N)$ est une sous-variété de dimension p de $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$. Cela signifie qu'il existe U' un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et ψ un difféomorphisme : $U' \rightarrow \psi(U')$, avec $\psi(U')$ ouvert de $\mathbb{R}^m$, tels que $\psi(U' \cap \varphi(U \cap N)) = \psi(U') \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. Donc on a

$$\psi \circ \varphi : U \cap \varphi^{-1}(U') \cap N \rightarrow \text{ouvert de } \mathbb{R}^p \times \{0\} \sim \mathbb{R}^p,$$

et la famille des $(U \cap \varphi^{-1}(U') \cap N, \psi \circ \varphi)$, quand x parcourt N , est un atlas de N . En effet :

- les $U \cap \varphi^{-1}(U') \cap N$ recouvrent bien sûr N , et $U \cap \varphi^{-1}(U')$ est un ouvert de M , donc son intersection avec N est un ouvert de N ,
- les applications de carte $\psi \circ \varphi$ sont des difféomorphismes (donc les changements de carte sont bien sû réguliers).

Remarquons qu'en rajoutant à l'atlas de M la carte $(U \cap \varphi^{-1}(U'), \psi \circ \varphi)$, on a un nouvel atlas compatible avec le précédent (simplement parce que ψ est un difféomorphisme). On peut donc reformuler une partie de ce qui précède en disant que si $N \subset M$ est une sous-variété de M de dimension p , alors pour tout $x \in N$, il existe une carte (U, φ) de M en x telle que $\varphi(U \cap N)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 2.45. *Une sous-variété d'une sous-variété est une sous-variété.*

PREUVE. Soit donc $P \subset N \subset M$, avec pour dimensions $p \leq n \leq m$. On veut vérifier que P est une sous-variété de M . Soit $x \in P$ et U un ouvert de M . Il suffit de vérifier que $\varphi(U \cap P)$ est une sous-variété de $\varphi(U)$, pour un difféomorphisme φ .

En utilisant la remarque précédente, on peut choisir pour φ une carte de M telle que $\varphi(U \cap N)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^m$. Comme φ est une carte de M , $\varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. On a donc

$$\varphi(U \cap P) \subset (\text{ouvert de } \mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^{m-n}}\}) \subset (\text{ouvert de } \mathbb{R}^m).$$

On note (x, y) les points de $\mathbb{R}^m$ (l'espace total, qui est l'espace d'arrivée de φ) dans la décomposition $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m-n}$. On a donc $\varphi(U \cap P) = P_0 \times \{0_{\mathbb{R}^{m-n}}\}$, $\varphi(U \cap N) = V \times \{0_{\mathbb{R}^{m-n}}\}$, avec V ouvert de $\mathbb{R}^n$ et P_0 sous-variété de V . Il existe donc ψ un difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\psi(P_0)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\} \subset \mathbb{R}^n$. On prolonge ψ en posant

$$\tilde{\psi}(x, y) = (\psi(x), y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^{m-n}.$$

Alors $\tilde{\psi}$ est un difféomorphisme (local) d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et

$$\tilde{\psi} \circ \varphi(U \cap P) = \tilde{\psi}(P_0 \times \{0\}) = \psi(P_0) \times \{0\} = (\text{ouvert de } \mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}) \times \{0_{\mathbb{R}^{m-n}}\}.$$

Comme $\tilde{\psi} \circ \varphi$ est une application de carte pour M , et qu'un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$, on a fini. $\square$

La régularité C^k passe bien à la restriction à une sous-variété, au départ comme à l'arrivée :

- Si $f : M \rightarrow N$ est C^k , et si M' est une sous-variété de M , alors $f|_{M'}$ est C^k .
- Si $f : M \rightarrow N$ est telle que son image $f(M)$ est incluse dans N' une sous-variété de N , alors f est C^k si et seulement si l'application $f : M \rightarrow N'$ est C^k .

4.2. Plongements.

Définition 2.46. *Une application $f : M \rightarrow f(M) \subset N$ entre deux variétés est un plongement quand f est une immersion et un homéomorphisme sur son image.*

Théorème 2.47. *L'image par un plongement d'une variété est une sous-variété.*

PREUVE. Pour tout $f(x) \in f(M)$, on cherche une carte (V, ψ) de N en $f(x)$ telle que $\psi(V \cap f(M))$ soit une sous-variété de $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$. Soit (V, ψ) une carte en $f(x)$. Alors $f^{-1}(V \cap f(M))$ est ouvert dans M . On peut supposer que c'est un ouvert de carte U , pour une carte (U, φ) . Alors l'application $f|_U : U \rightarrow V \cap f(M)$ lue dans les cartes est

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V \cap f(M)) \subset \mathbb{R}^n.$$

L'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est un plongement comme f . Son ensemble de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. C'est ce qu'on a appelé un paramétrage. Le Théorème 2.10 nous dit que son image $\psi(V \cap f(M))$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, ce qu'on voulait prouver. $\square$

Théorème 2.48. *Si $f : M \rightarrow f(M)$ est un plongement alors c'est un difféomorphisme de M sur $f(M)$.*

PREUVE. On a vu que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est un paramétrage de $\psi(V \cap f(M))$, avec ψ carte à l'arrivée, φ carte au départ, et V ouvert à l'arrivée. Soit donc ψ_1 un difféomorphisme de $\psi(V \cap f(M))$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Alors $\psi_1 \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une immersion et un homéomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^m$. C'est donc un difféomorphisme. Donc f est un difféomorphisme (cf fin de la preuve du Théorème 2.43). $\square$

Exemple 2.49. Voir TD : exemples de variétés difféomorphes (exercices 3.8, 3.14 et 3.15).

On en arrive au cas compact du théorème de Whitney :

Théorème 2.50. *Toute variété compacte est difféomorphe à une sous-variété d'un $\mathbb{R}^n$.*

PREUVE. On commence par prouver l'existence de fonctions *plateau* sur une variété. Cela découle de l'existence de fonctions lisses à support compact dans $\mathbb{R}^m$.

En effet : soit g une fonction plateau : $g \equiv 1$ dans $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$, g à support dans $B(0, 2)$, et $0 \leq g \leq 1$, avec $g \in C^\infty$. On peut fabriquer explicitement une telle fonction, à partir de la fonction C^∞ :

$$g_0 : t \rightarrow \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

dont tous les termes du développement en série entière en $t = 0$ sont nuls. (Donc en particulier, g_0 n'est pas analytique.)

Soit $x \in M$, et (U, φ) une carte en x . On peut supposer que $\varphi(U)$ contient la boule $B(0, 3) \subset \mathbb{R}^m$. (Exercice : le vérifier en détail.) On pose $f_x = g \circ \varphi$. C'est une fonction régulière (aussi régulière que M), définie dans U , telle que $0 \leq f_x \leq 1$. L'ensemble $\varphi^{-1}(B(0, 1))$ est un ouvert de M qui contient x . On le note W_x . L'ensemble $\varphi^{-1}(B(0, 2))$ est un ouvert de M qui contient W_x . On le note V_x . On a $f_x \equiv 1$ dans W_x , et $f_x \equiv 0$ dans $U \setminus V_x$. On peut prolonger f_x par zéro en dehors de U . On a ainsi une fonction f_x globalement définie sur M .

Par compacité de M , un nombre fini des W_x recouvre M . Soit p tel que $\bigcup_{1 \leq i \leq p} W_{x_i} = M$.

On pose

$$F : x \in M \rightarrow (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_p}(x), f_{x_1}(x)\varphi_1(x), \dots, f_{x_p}(x)\varphi_p(x)),$$

où φ_j est une application de carte associée à x_j , à partir de laquelle f_{x_j} est définie. Les ouverts associés sont $W_{x_j} \subset V_{x_j} \subset U_j$.

Montrons que F est un plongement :

- *injectivité* : si $F(x) = F(y)$, alors en notant $x \in W_{x_{i_0}}$, on a $f_{i_0}(x) = 1$, donc $f_{i_0}(y) = 1$. Donc de $f_{x_{i_0}}(x)\varphi_{i_0}(x) = f_{x_{i_0}}(y)\varphi_{i_0}(y)$, on tire $\varphi_{i_0}(x) = \varphi_{i_0}(y)$, et donc l'injectivité de F par injectivité de φ_{i_0} .

- *immersion* : on calcule

$$Tf = (Tf_{x_1}, \dots, Tf_{x_p}, T(f_{x_1}\varphi_1), \dots, T(f_{x_p}\varphi_p)).$$

Soit $x \in M$. Ce x tombe dans un $W_{x_{i_0}}$. En particulier $f_{x_{i_0}} \equiv 1$ au voisinage de x . Donc $T_x(f_{x_{i_0}}\varphi_{i_0}) = T_x\varphi_{i_0}$. De l'injectivité de $T_x\varphi_{i_0}$ (puisque φ_{i_0} est un difféo) découle donc l'injectivité de T_xF .

- on a donc une immersion injective définie sur une variété compacte. C'est automatiquement un plongement. En effet, il suffit de vérifier que la réciproque de F est continue. Mais une application continue bijective définie sur un compact est un homéomorphisme. (L'image réciproque d'un fermé par l'application réciproque est l'image directe d'un fermé, donc d'un compact, donc un compact, donc fermé.)

□

Remarque 2.51. (Voir Paulin, p26 :) Le cas général (d'une variété non compacte) est encore vrai sous une hypothèse de séparabilité (base dénombrable d'ouverts). Le n optimal est $n = 2 \dim M$. Il existe des variétés de dimension 2 qui ne se plongent pas dans $\mathbb{R}^3$, comme $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

CHAPITRE 3

Feuilles de TD

1. TD1 : calcul différentiel

1.1. Différentielles.

1.1. Prouver l'unicité de la différentielle.

1.2. Donner un exemple d'homéomorphisme différentiable dont la réciproque n'est pas différentiable. Comparer avec un résultat du cours.

1.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$, et $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Comparer avec un résultat du cours.

1.4. Soit E un espace de Banach et l'application

$$\text{inv} : \begin{cases} GL(E) \rightarrow GL(E) \\ u \rightarrow u^{-1}. \end{cases}$$

On utilisera le lemme suivant :

Lemme. Dans un Banach E , si $h \in L(E)$ satisfait $|h| < 1$, alors $\text{Id} - h$ est inversible, d'inverse $\sum_{n \geq 0} h^n$.

a) Montrer que $GL(E)$ est ouvert dans $L(E)$.

b) Montrer que inv est différentiable en tout point $u \in GL(E)$ et calculer sa différentielle.

1.5. Calculer la différentielle en $A \in GL_n(\mathbb{C})$ de l'application déterminant : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \det(M) \in \mathbb{C}$.

1.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$, et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Montrer que les dérivées croisées $\partial_{12}f(0,0)$ et $\partial_{21}f(0,0)$ existent et donner leur valeur. Comparer avec un résultat du cours.

1.7. Calculer la différentielle d'ordre p d'une application p -linéaire. Calculer la différentielle d'ordre $p+1$ d'une application p -linéaire.

1.2. Inversion locale et fonctions implicites.

1.8. Décrire $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage de $(0, 0)$ et $(-1, 0)$.

1.9. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 , telle que $x \rightarrow f(x) - x$ soit k -contractante, avec $0 < k < 1$. Montrer que f est un C^1 difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

1.10. *Le théorème de Hadamard-Lévy*

Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne $|\cdot|$. On note aussi $|\cdot|$ la norme subordonnée dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On prouve ici le résultat suivant :

Théorème (Hadamard-Lévy). *Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$, telle que $f(0) = 0$. On suppose que*

$$(3.1) \quad f'(z) \text{ est inversible en tout } z \in \mathbb{R}^n,$$

et qu'il existe des constantes $A \geq 0$, $B \geq 0$, telles que

$$(3.2) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, \quad |f'(z)^{-1}| \leq A|z| + B,$$

Alors

$$(3.3) \quad f \text{ est un } C^k\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ vers } \mathbb{R}^n.$$

- 1) Donner un exemple pour montrer que (3.1) n'implique pas (3.3).
- 2) Etant donné $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f'(y)^{-1}x, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

est globale.

- 3) En déduire l'existence d'une application continue $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f \circ g = \text{Id}$.
- 4) Soit X un espace connexe, et $\phi : X \rightarrow Y$, continue et localement injective, telle qu'il existe $\psi : Y \rightarrow X$, continue, telle que $\phi \circ \psi = \text{Id}_Y$.
 - a) Montrer que l'image de ψ est ouverte.
 - b) Montrer que l'image de ψ est fermée.
 - c) En déduire que ϕ est un homéomorphisme.
 En déduire que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.
- 5) Conclure.

1.11. Soit $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, de classe C^∞ . On suppose que pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, $\text{sp } M(x_0) \subset \mathbb{R}$, et on note P le polynôme caractéristique de $M : P(x, \lambda) := \det(\lambda \text{Id} - M(x))$. On se donne $\lambda_0 \in \text{sp } M(x_0)$. On suppose que λ_0 est une valeur propre double, au sens algébrique, c'est-à-dire

$$P(x_0, \omega_0) = 0, \quad \partial_\lambda P(x_0, \lambda_0) = 0.$$

On suppose de plus

$$\partial_x P(x_0, \lambda_0) \partial_\lambda^2 P(x_0, \lambda_0) > 0.$$

Décrire le spectre de M au voisinage de (x_0, λ_0) .

1.12. Forme normale des applications de rang constant

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, où U est un ouvert contenant 0. On suppose que f est C^k , que $f(0) = 0$ et que f est de rang constant r au voisinage de 0. Prouver qu'il existe deux C^k -difféomorphismes ϕ et ψ au voisinage de 0, ϕ dans $\mathbb{R}^q$ et ψ dans $\mathbb{R}^p$, avec $\psi(0) = 0$, $\phi(0) = 0$, tels que

$$\psi \circ f \circ \phi(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

1.13. Montrer que le sous-ensemble $A = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas l'image de $\mathbb{R}$ par une immersion C^1 . Donner un exemple d'une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ dont l'image est A .

1.14. Soient U, V, W des ouverts d'espaces de Banach E, F, G respectivement, et $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ deux applications. Si f et g sont des immersions, submersions ou applications de rang constant, que peut-on dire de $g \circ f$?

1.15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de rang identiquement égal à un, et telle que $f(x, 0) \equiv (x, 0)$. Montrer que tout point de l'axe des abscisses contient un voisinage dans $\mathbb{R}^2$ qui est envoyé sur $\mathbb{R} \times \{0\}$.

1.3. Equations différentielles.

1.16. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ globalement Lipschitz. Montrer que les solutions maximales de $y' = f(y)$ sont globales.

1.17. Oscillations et amplification.

On considère la famille d'équations dans $\mathbb{C}$:

$$y' + i\alpha y = y^2,$$

où α est un paramètre réel. Les solutions maximales sont-elles globales ?

1.18. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localement Lipschitz, et y, z définies et dérivables sur un ouvert I de $\mathbb{R}$ et telles que

$$y'(t) < f(y(t)), \quad \text{et} \quad z'(t) = f(z(t)).$$

On suppose que pour un certain $t_0 \in I$, $y(t_0) < z(t_0)$.

a) Prouver que pour tout $t \in I \cap [t_0, +\infty[$, $y(t) < z(t)$, par un argument de connexité.

b) Exemple : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , et telle que $f > 0$. Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 + f(x), \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

n'est pas globale.

1.19. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et le problème de Cauchy, posé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x' = (x+1)(x-1), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

- 1) Si $x_0 \in]-1, 1[$, montrer que la solution maximale est globale, et converge vers ∓ 1 en $\pm\infty$.
- 2) Montrer que si $x_0 > 1$, alors l'intervalle d'existence de la solution maximale est borné supérieurement.

1.20. Soit E un espace de Banach, et $f : E \rightarrow E$, localement Lipschitzienne. On note, comme dans le cours, $T_*(y_0)$ la borne supérieure de l'intervalle d'existence de la solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si K est compact dans E , la fonction temps d'existence est-elle uniformément minorée dans E ? C'est-à-dire : a-t-on $\inf_{y_0 \in K} T_*(y_0) > 0$? Même question dans la boule unité $B_E(0, 1)$, ou dans n'importe quelle boule.

2. TD2 : sous-variétés, variétés, revêtements et quotients**2.1. Sous-variétés.**

2.1. Prouver directement que l'image d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ par un paramétrage est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$, et vice versa, en utilisant simplement la définition d'un paramétrage et la définition d'une sous-variété, sans passer par le point de vue graphe ou le point de vue submersion.

2.2. Soit M une sous-variété de dimension m et de régularité C^k de $\mathbb{R}^n$ et N une sous-variété de dimension p et de régularité $C^{k'}$ de $\mathbb{R}^q$. Montrer que $M \times N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$. Quelle est sa dimension ? Quelle est sa régularité ?

2.3. Montrer que les sous-variétés de *codimension* 0 de $\mathbb{R}^n$ sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

2.4. Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Quelle est sa régularité ?

2.5. Montrer que

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 - x = 0\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Quelle est sa régularité ?

2.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$. Quels ensembles de niveau de f définissent des sous-variétés de $\mathbb{R}^2$?

2.7. *Un premier contre-exemple : un 8 dessiné dans le plan.* Soit $\gamma : (-\pi/2, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $\gamma(t) = (\sin(2t), \cos(t))$.

- Trouver $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(\{0\}) = \gamma(-\pi/2, 3\pi/2)$ et dessiner cet ensemble.
- Vérifier que γ est une immersion injective.
- Montrer que γ n'est pas un homéomorphisme sur son image.
- Montrer que $\gamma(-\pi/2, 3\pi/2)$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

2.8. *Un deuxième contre-exemple : une courbe non lisse dans le plan.* Soit

$$A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x < 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y < 1\}.$$

- Montrer que A n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. (Indication : utiliser le point de vue submersion.)
- Montrer que A est l'image d'une application injective lisse de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$.

2.9. Soit le tore de dimension deux : $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

- Montrer que $\mathbb{T}^2$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$.
- Soit $g(\varphi, \theta) = ((2 + \cos \varphi) \cos \theta, (2 + \cos \varphi) \sin \theta, \sin \varphi)$. Donner une équation de $g(\mathbb{R}^2)$, faire un dessin, et montrer que $g(\mathbb{R}^2)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
L'exercice 3.15 montre que $g(\mathbb{R}^2)$ et $\mathbb{T}^2$ sont difféomorphes.

2.10. *Un troisième contre-exemple : une courbe dense dessinée sur le tore $\mathbb{T}^2$.*

- Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$ définie par $\gamma(t) = (e^{2i\pi ct}, e^{2i\pi ct})$, avec $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $\gamma(0)$ est un point d'accumulation de $\gamma(\mathbb{Z})$.

- b) En déduire que γ n'est pas un homéomorphisme sur son image.
- c) Montrer que $\gamma(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{T}^2$.
- d) Montrer que $\gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^4$.

2.11. Dans $L(\mathbb{R}^n)$, on note $GL(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isomorphismes, $SL(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isomorphismes de déterminant 1, et $O(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isomorphismes u tels que ${}^t u \cdot u = \text{Id}$. Montrer que $GL(\mathbb{R}^n)$, $SL(\mathbb{R}^n)$ et $O(\mathbb{R}^n)$ sont des sous-variétés de $L(\mathbb{R}^n)$, et calculer leurs dimensions.

2.12. On montre dans cet exercice que l'ensemble des matrices de rang r est une sous-variété de l'ensemble des matrices de taille $n \times m$.

- a) Soit $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ de taille $n \times m$, avec le bloc A de taille $r \times r$ inversible. Montrer que l'ensemble de ces matrices est un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
- b) On se donne $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$ et on pose $P(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & \text{Id}_{m-r} \end{pmatrix}$. Donner une condition pour que $\mathcal{A}P(\mathcal{A})$ soit de rang r . Montrer que $\mathcal{A}$ est de rang r si et seulement si $\mathcal{A}P(\mathcal{A})$ est de rang r .
- c) En déduire que $\mathcal{U} \cap \{\text{matrices de rang } r\}$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
- d) En déduire que l'ensemble des matrices de rang r est une sous-variété de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

2.2. Variétés.

2.13. Prouver qu'une variété est un espace localement compact, localement connexe, et qu'une variété est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.

2.14. Deux atlas compatibles dans $\mathbb{S}^{n-1}$.

- a) Vérifier que $\{(H_N, p_N), (H_S, p_S)\}$ est un atlas de la sphère, où p_N, p_S sont les projections stéréographiques, H_N contient strictement l'hémisphère sud et H_S contient strictement l'hémisphère nord.
- b) Vérifier que $\{(U_i^+, g_i^+)_{1 \leq i \leq n}, (U_i^-, g_i^-)_{1 \leq i \leq n}\}$ est un atlas de la sphère, où $U_i^+ = \{x \in \mathbb{S}^{n-1}, x_i > 0\}$, $U_i^- = \{x \in \mathbb{S}^{n-1}, x_i < 0\}$, $g_i^\pm(x) = \hat{x}^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.
- c) Vérifier que ces atlas sont compatibles.

2.15. Vérifier en détail que la relation binaire "deux atlas sont équivalents quand leur réunion est un atlas" est transitive, et donc une relation d'équivalence.

2.16. Soit $\mathcal{C}$ le cylindre défini par l'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^3$.

- a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
- b) On note $\mathcal{C}_x^+ := \mathcal{C} \cap \{x > 0\}$, de même $\mathcal{C}_x^-$, et $\mathcal{C}_y^\pm$. Définir un atlas sur $\mathcal{C}$ dont les ouverts de carte sont $\mathcal{C}_x^\pm$ et $\mathcal{C}_y^\pm$.

- c) Soit $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = (x + 1)^2 + y^2 + z^2$. Donner l'expression de f dans les cartes de l'atlas ci-dessus.

2.17. Fibration de Hopf. Soit l'application $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, définie par $h(u, v) = (2u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2)$.

- Montrer que h est lisse et calculer $p_N \circ h$ (projection stéréographique).
- Montrer que pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{S}^2$ et $\psi : U \times \mathbb{S}^1 \rightarrow h^{-1}(U)$ lisse telle que $h \circ \psi = \text{Id}_{U \times \mathbb{S}^1}$.

2.3. Revêtements.

2.18. Soit $f : X \rightarrow Y$, un homéomorphisme local, c'est-à-dire une application continue $X \rightarrow Y$, telle que pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $U \subset X$ contenant x tel que $f|_U$ est un homéomorphisme $U \rightarrow f(U)$, avec $f(U)$ ouvert dans Y .

On suppose de plus que $\text{card } f^{-1}(y) = m$, pour tout $y \in Y$, pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Montrer que p est un revêtement à m feuillets.

2.19. On prouve dans cet exercice que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est étale et propre, alors f est un revêtement.

On dit que f est étale quand $f'(x)$ est un difféomorphisme pour tout x .

On dit que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est propre quand $|f(x)| \rightarrow \infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$.

- Montrer que l'image réciproque par f d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est compact.
- En utilisant un argument de connexité, montrer que f est surjective.
- Montrer que tout point de $\mathbb{R}^n$ a un nombre fini d'antécédents par f .
- Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note $x_1, \dots, x_m$ ses antécédents. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f^{-1}(V_\varepsilon) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} B(x_i, \varepsilon)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que localement autour de x , tous les points ont le même nombre d'antécédents.
- Montrer que f est un revêtement.

2.20. Soit M une variété compacte, N une variété connexe, et $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme local au voisinage de tout point. Montrer que f est un revêtement.

2.21. Soit M_1, M_2, N trois variétés, $p : M_1 \rightarrow M_2$ un revêtement et $f : M_2 \rightarrow N$. Montrer que f est régulière si et seulement si $f \circ p : M_1 \rightarrow N$ est régulière.

2.22. Soit M_1 un espace topologique, M_2 une variété lisse, et $f : M_1 \rightarrow M_2$ un revêtement continu. Montrer qu'il existe une structure de variété lisse sur M_1 telle que f soit lisse.

2.4. Quotients.

2.23. *Atlas de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.* Soit la relation d'équivalence $\sim$ dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ définie par $x \sim y$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $x = ky$.

- a) Montrer que $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim = \mathbb{S}^n / \{\text{Id}, -\text{Id}\} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. On note p la projection canonique $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
- b) A partir des applications $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow p(x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$, définir un atlas de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

3. TD3 : fibré tangent, sous-variétés et plongements

3.1. Soit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x+1)^2 + 2y^2 = 1\}$. Décrire TM . Soit $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$. Décrire $T(M \cap N)$.

3.2. Calculer l'espace tangent en Id à des sous-variétés simples de l'espace des matrices carrées.

3.3. Donner une description de $T_x M$ via la représentation locale de la sous-variété $M \subset \mathbb{R}^n$ comme un graphe.

3.4. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension m . On a vu en cours que TM est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$, de dimension $2m$, en utilisant le point de vue paramétrage. Retrouver ce résultat via le point de vue submersion.

3.5. Montrer qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est localement un graphe au-dessus de son espace tangent.

Précisément : soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe C^k et de dimension $m \leq n$. Montrer que pour tout $x \in M$, on peut trouver un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x , un ouvert V' de 0 dans $T_x M$ tel que $U \cap M$ soit le graphe de $g : V' \rightarrow E$, de classe C^k , où E est un supplémentaire de $T_x M$ dans $\mathbb{R}^n$.

3.6. Soit $p : M \rightarrow B$ une application C^k entre deux variétés M, B de classe C^k . On dit que (p, M, B) est un *fibré vectoriel*, ou souvent que p est un fibré vectoriel, quand

- pour tout $b \in B$, la fibre $p^{-1}(\{b\})$ est un espace vectoriel, et
- pour tout $b \in B$, il existe un ouvert U de B contenant b , un espace vectoriel F de dimension finie, et un C^k -difféomorphisme $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ p \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

avec π_1 la projection sur la première composante $U \times F \rightarrow U$,

- et $\pi_2 \circ \varphi|_{p^{-1}(\{y\})} : p^{-1}(\{y\}) \rightarrow F$ est un isomorphisme linéaire de chaque fibre $p^{-1}(\{y\})$ avec $y \in U$ vers l'espace F , où $\pi_2 : U \times F \rightarrow F$ est la deuxième projection.

- a) Comparer cette définition avec la définition de revêtement.
- b) Montrer que la projection $p : TM \rightarrow M$ définit un fibré vectoriel, pour toute sous-variété M de $\mathbb{R}^n$.
- c) On dit qu'un fibré vectoriel est *trivialisable* quand on peut choisir $U = B$. Montrer qu'un fibré est trivialisable si et seulement s'il existe m sections globales linéairement indépendantes, de classe C^k , où m est la dimension de B .
- d) Montrer que le fibré tangent à $\mathbb{S}^1$ est trivialisable.

3.7. On dit que $f : M \rightarrow N$ est une *immersion* en $x_0 \in M$ quand $T_{x_0} f : T_{x_0} M \rightarrow T_{f(x_0)} N$ est une immersion. Vérifier que cela revient à dire que f lue dans les cartes est une immersion.

3.8. Un plongement de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^6$.

- Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}zy) \in \mathbb{R}^6$. Montrer que $f(\mathbb{S}^2)$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^6$.
- Montrer que f se factorise en une application $\underline{f} : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^6$.
- Montrer que $\underline{f}$ est injective.
- Montrer que $\underline{f}$ est une immersion.
- Montrer qu'une immersion injective d'une variété compacte vers une variété est un plongement (c'est-à-dire une immersion qui est un homéomorphisme sur son image).
- En déduire que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ se plonge dans $\mathbb{R}^6$.

3.9. Montrer que si $f : M \rightarrow N$ est un plongement, alors $Tf : TM \rightarrow TN$ est un plongement.

3.10. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On note $\psi : M \rightarrow T_x M$ la projection orthogonale sur $T_x M$. Calculer $T_x \psi$.

3.11. Soit $f : M_1 \rightarrow M_2$, et N une sous-variété de M_2 . On suppose que f est *transverse* à N , au sens où, pour tout $x \in M_1$ tel que $f(x) \in N$, on ait

$$T_x f(T_x M_1) + T_{f(x)} N = T_{f(x)} M_2.$$

Montrer que $f^{-1}(N)$ est une sous-variété de M_1 , et calculer sa dimension.

3.12. Soit M, N deux variétés et $f : M \rightarrow N$. On suppose que f est de rang constant dans un voisinage de $f^{-1}(\{y\})$, avec $y \in f(M)$.

- Montrer que $f^{-1}(\{y\})$ est une sous-variété de M et calculer sa dimension.
- Montrer que $T_x(f^{-1}(\{y\})) = \ker T_x f$.
- On suppose que f est une submersion (au voisinage de tout point). Soit S une sous-variété de N . Montrer que $f^{-1}(S)$ est une sous-variété de M et calculer sa dimension.

3.13. Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. On lui associe le Hamiltonien $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$H(x, y) = \frac{1}{2}|y|^2 + V(x)$$

- Montrer que c est une valeur régulière de H si et seulement si c est une valeur régulière de V .

On appelle *valeur régulière* d'une application $f : M \rightarrow N$ tout y tel que $f^{-1}(\{y\})$ est composé entièrement de points x tels que f soit une submersion en x (en particulier, si $f^{-1}(\{y\})$ est vide alors y est une valeur régulière).

- Soit c une valeur régulière de H , et $M = H^{-1}(\{c\})$. Montrer que

$$T_{(x,y)} M = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; \langle y, \eta \rangle + \langle \nabla V(x), \xi \rangle = 0\},$$

où $\langle x, y \rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

- (c) On suppose que V est propre, c'est-à-dire que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$. Montrer que les solutions maximales de

$$y'' = \nabla V(y)$$

sont globales.

3.14. Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{S}^1$ sont difféomorphes. Montrer que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ sont difféomorphes.

3.15. *Plongement de $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.* L'exercice 2.9 montre que

- (a) le produit $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$.
- (b) L'image $g(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ de g définie par $g(\varphi, \theta) = ((2 + \cos \varphi) \cos \theta, (2 + \cos \varphi) \sin \theta, \sin \varphi)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, d'équation

$$(2 - (x^2 + y^2)^{1/2})^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Montrer que $\mathbb{T}^2$ et $g(\mathbb{R}^2)$ sont difféomorphes.

3.16. *Ruban de Möbius.*

- (a) On définit une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ par $n \cdot (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$. Montrer que cette action est libre et propre.
- (b) Montrer que la variété quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ est un fibré (en sens de l'exercice 3.6) au-dessus de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de dimension 1.
- (c) Montrer que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est pas un fibré trivial, donc non isomorphe au fibré tangent de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

CHAPITRE 4

Corrections partielles des feuilles de TD

1. TD1

1.7. Calculer la différentielle d'ordre p d'une application p -linéaire. Calculer la différentielle d'ordre $p + 1$ d'une application p -linéaire.

Il va être pratique de noter les composantes d'un vecteur par des exposants : $x = (x^1, \dots, x^p)$. Si f est bilinéaire $f : E \times E \rightarrow F$,

$$f'(x)h_1 = f(x^1, h_1^2) + f(h_1^1, x^2), \quad x = (x^1, x^2), \quad h_1 = (h_1^1, h_1^2).$$

Donc par différentiation

$$(4.1) \quad f''(\underbrace{x}_{\in E^2})(\underbrace{h_1}_{\in E^2}, \underbrace{h_2}_{\in E^2}) = f(\underbrace{h_2^1, h_1^2}_{\in E^2}) + f(h_1^1, h_2^2).$$

On devine donc la formule, pour f k -linéaire :

$$(4.2) \quad f^{(k)}(\underbrace{x}_{\in E^k})(\underbrace{h_1, \dots, h_k}_{\in E^k \times k}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} f(\underbrace{h_{\sigma(1)}^1, \dots, h_{\sigma(k)}^k}_{\in E^k}),$$

en notant $\mathcal{S}_k$ le groupe symétrique d'ordre k . Prouvons (4.2) par récurrence : pour $k = 2$, c'est (4.1). Supposons (4.2) vraie pour $k = p - 1$. Alors pour f p -linéaire, par différentiation,

$$(4.3) \quad f'(x)h_p = f'(x)(h_p^1, \dots, h_p^p) = \sum_{1 \leq i \leq p} g_{h_p^i}(\hat{x}^i), \quad \hat{x}^i := (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^p),$$

en notant

$$g_{h_p^i}(\hat{x}^i) = f(x^1, \dots, x^{i-1}, h^i, x^{i+1}, \dots, x^p).$$

Quand on dérive une fois f puis qu'on dérive $p - 1$ fois le résultat, on a dérivé p fois f (cf cours), et donc en dérivant (4.3) suivant $(h_1, \dots, h_{p-1})$, on trouve

$$f^{(p)}(x)(\underbrace{h_1, \dots, h_p}_{\in E^{p \times p}}) = \sum_{1 \leq i \leq p} (g_{h_p^i})^{(p-1)}(\hat{x}^i)(\underbrace{\hat{h}_1^i, \dots, \hat{h}_{p-1}^i}_{\in E^{(p-1) \times (p-1)}}).$$

On applique l'hypothèse de récurrence à $g_{h_p^i}$ qui est $(p - 1)$ -linéaire. Notons

$$(4.4) \quad (k_1, \dots, k_{p-1}) := (\hat{h}_1^i, \dots, \hat{h}_{p-1}^i).$$

Alors

$$(g_{h_p^i})^{(p-1)}(\hat{x}^i)(\underbrace{\hat{h}_1^i, \dots, \hat{h}_{p-1}^i}_{\in E^{(p-1) \times (p-1)}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p-1}} g_{h_p^i}(k_{\sigma(1)}^1, \dots, k_{\sigma(p-1)}^{p-1}).$$

Donc

$$f^{(p)}(x)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{1 \leq i \leq p} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p-1}} f(k_{\sigma(1)}^1, \dots, k_{\sigma(i-1)}^{i-1}, h_p^i, k_{\sigma(i)}^i, \dots, k_{\sigma(p-1)}^{p-1}).$$

Considérons maintenant les coordonnées d'indice $j \leq i-1$ des k_ℓ . On a $k_\ell^j = h_\ell^j$. Et pour $j \geq i$, on a $k_\ell^j = h_\ell^{j+1}$. Donc finalement

$$f^{(p)}(x)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{1 \leq i \leq p} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p-1}} f(h_{\sigma(1)}^1, \dots, h_{\sigma(i-1)}^{i-1}, h_p^i, h_{\sigma(i)}^{i+1}, \dots, h_{\sigma(p-1)}^p).$$

Si $\sigma \in \mathcal{S}_{p-1}$, on définit un élément $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_p$ en posant

$$\tilde{\sigma}(j) := \begin{cases} \sigma(j), & j \leq i \\ p, & j = i, \\ \sigma(j-1), & i+1 \leq j \leq p. \end{cases}$$

On définit ainsi une bijection de $\mathcal{S}_p$ vers $\{1, \dots, p\} \times \mathcal{S}_{p-1}$. Donc

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p-1}} f(h_{\sigma(1)}^1, \dots, h_{\sigma(i-1)}^{i-1}, h_p^i, h_{\sigma(i)}^{i+1}, \dots, h_{\sigma(p-1)}^p) = \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_p} f(h_{\tilde{\sigma}(1)}^1, \dots, h_{\tilde{\sigma}(p)}^p),$$

et la récurrence est achevée. On en déduit directement le fait que la dérivée $(p+1)$ -ème d'une application p linéaire est nulle.

1.10. Le théorème de Hadamard-Lévy

Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne $|\cdot|$. On note aussi $|\cdot|$ la norme subordonnée dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On prouve ici le résultat suivant :

Théorème (Hadamard-Lévy). Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$, telle que $f(0) = 0$. On suppose que

$$(4.5) \quad f'(z) \text{ est inversible en tout } z \in \mathbb{R}^n,$$

et qu'il existe des constantes $A \geq 0$, $B \geq 0$, telles que

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \quad |f'(z)^{-1}| \leq A|z| + B,$$

Alors

$$(4.6) \quad f \text{ est un } C^k\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ vers } \mathbb{R}^n.$$

1) Donner un exemple pour montrer que (4.5) n'implique pas (4.6).

Dans $\mathbb{R}^2$, la fonction $(x, y) \rightarrow e^x(\cos y, \sin y)$ est un difféomorphisme local au voisinage de tout point, mais pas injective.

2) Etant donné $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f'(y)^{-1}x, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

est globale.

Cf cours sur les équations différentielles : le champ est globalement Lipschitz.

3) En déduire l'existence d'une application continue $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f \circ g = \text{Id}$.

Si on note φ le flot de la question 2), alors $g = \varphi(1, x)$ convient. (Note : $\varphi(t, x)$ est la valeur au temps t de l'unique solution maximale de l'équation différentielle de la question 2.) En effet :

$$\partial_t(f \circ \varphi(t, x)) = f'(\varphi(t, x))\partial_t\varphi(t, x) = f'(\varphi(t, x))f'(\varphi(t, x))^{-1}x \equiv x,$$

et par ailleurs

$$f \circ \varphi(0, x) = f(0) = 0,$$

donc

$$f(\varphi(t, x)) \equiv tx, \quad \text{si bien que} \quad f(\varphi(1, x)) = x.$$

4) Soit X un espace connexe, et $\phi : X \rightarrow Y$, continue et localement injective, telle qu'il existe $\psi : Y \rightarrow X$, continue, telle que $\phi \circ \psi = \text{Id}_Y$.

a) Montrer que l'image de ψ est ouverte.

Étant donné $x = \psi(y)$, soit V un voisinage de x sur lequel ϕ est injective. Comme $\psi \circ \phi(x) = x$ et que $\psi \circ \phi$ est continue, on peut trouver un voisinage W de x tel que $\psi \circ \phi(W \cap V) \subset V$. Soit maintenant $x' \in W \cap V$, et $y' = \psi(\phi(x')) \in V$. On a alors $\phi \circ \psi \circ \phi(x') = \phi(y')$, donc $\phi(x') = \phi(y')$ et comme x' et y' appartiennent à V , on en déduit $x' = y'$, si bien que W est tout entier inclus dans l'image de ψ , qui est donc ouverte.

b) Montrer que l'image de ψ est fermée.

Soit $\psi(y_n)$ convergente vers $\bar{x} \in X$. Alors $\phi \circ \psi(y_n) = y_n$ est convergente dans Y , vers $\phi(\bar{x})$, par continuité de ϕ . Donc $\psi(y_n)$ converge, par continuité de ψ , vers $\psi(\phi(\bar{x}))$. Cela prouve que $\psi(Y)$ est fermée dans X .

c) En déduire que ϕ est un homéomorphisme.

L'image de ψ est ouverte et fermée, et non vide, dans X connexe. C'est donc X tout entier, ce qui signifie que ψ est surjective. Mais comme $\phi \circ \psi = \text{Id}$, on sait déjà que ψ est injective. Donc ψ est bijective. Mais alors ϕ , son inverse à gauche, est aussi son inverse à droite. Autrement dit : $\phi = \psi^{-1}$, et donc ϕ est un homéomorphisme, d'inverse ψ .

En déduire que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

La continuité de f est vraie par hypothèse, et l'injectivité locale est une conséquence du TIL car $f'(x)$ est inversible pour tout x . La continuité de $x \rightarrow \varphi(1, x)$ découle du cours sur les équations différentielles. Donc f est un homéomorphisme.

5) *Conclure.*

Un homéomorphisme C^k dont la différentielle est inversible en tout point est un C^k -difféomorphisme, cf cours.

Remarque : on a utilisé le fait que si $f : X \rightarrow Y$ est inversible à gauche est surjective, alors f est bijective, et son inverse à gauche est son inverse à droite. En effet, soit g telle que $g \circ f = \text{Id}$. Alors f est injective. On suppose de plus f surjective. Soit alors $x \in X$. Alors $f \circ g(x) = f \circ g(f(y))$ pour un certain y , et donc $f \circ g(x) = f(y) = x$. De même, si f est inversible à droite et injective, alors f est bijective, et son inverse à droite est son inverse à gauche. En effet, soit g telle que $f \circ g = \text{Id}$. Pour $x \in X$, $f \circ g \circ f(x) = f(x)$, donc $g \circ f(x) = x$ par injectivité de f .

1.12. Forme normale des applications de rang constant

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, où U est un ouvert contenant 0. On suppose que f est C^k , que $f(0) = 0$ et que f est de rang constant r au voisinage de 0. Prouver qu'il existe deux C^k -difféomorphismes ϕ et ψ au voisinage de 0, ϕ dans $\mathbb{R}^q$ et ψ dans $\mathbb{R}^p$, avec $\psi(0) = 0$, $\phi(0) = 0$, tels que

$$\psi \circ f \circ \phi(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

A translation près, on peut supposer que $f(x_0) = 0$.

L'image de $f'(x_0)$ est de rang r dans $\mathbb{R}^p$. Soit $e_1, \dots, e_r$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$ tels que la famille $e'_i = (f'(x_0)e_i)$ soit libre dans $\mathbb{R}^p$. On complète (e_i) en une base de $\mathbb{R}^n$ et (e'_i) en une base de $\mathbb{R}^p$. Alors les e_i engendrent l'image de $f'(x_0)$, et la matrice de $f'(x_0)$ dans les bases (e_i) et (e'_i) est $\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit π la projection canonique $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$. L'application $\pi \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ est une submersion en x_0 , car $\text{Im}(\pi \circ f)'(x_0) = \text{Im} \pi \circ f'(x_0) = \text{vect}(\pi e'_1, \dots, \pi e'_r)$ est de dimension r . D'après le théorème de forme normale des submersions, on a donc

$$\pi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r),$$

pour un certain difféo local φ d'un ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Donc

$$f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, g(x_1, \dots, x_n)).$$

En particulier, la matrice jacobienne de $f \circ \varphi$ est de la forme $\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ \star & \star \end{pmatrix}$.

On raisonne maintenant avec $f \circ \varphi$ dans un voisinage de $\varphi^{-1}(x_0)$. C'est une application de rang constant r , par dérivation des fonctions composées. Considérons la matrice de $f'(x)$ pour x proche de x_0 . Cette matrice est de rang r . Par continuité du déterminant, le bloc en haut à gauche, de taille $r \times r$, est inversible. Tous les mineurs de taille $r + 1$ sont nuls (par

l'hypothèse de rang constant). Considérons le mineur $(r+1, r+1)$ obtenu en ajoutant la $r+1$ -ème colonne et la $r+1$ -ème ligne au bloc Id en haut à gauche. Ce mineur est nul. Il est aussi égal à $\partial_{r+1}g_1(x)$. Donc g_1 , la première composante de g , ne dépend localement pas de $r+1$. Ni de $r+2$, etc., et de même pour g_2 , etc., en utilisant les autres mineurs. (Ici on utilise fortement la première réduction, qui nous informe que le bloc en haut à droite dans la jacobienne de $f \circ \varphi$ vaut 0.) Finalement, on a localement

$$g(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Posons

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_r) = f \circ \varphi(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Alors $\tilde{f} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une immersion en $\varphi^{-1}(x_0)$, car de rang r . Par le théorème de forme normale des immersions,

$$\psi \circ \tilde{f}(x_1, \dots, x_r) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0),$$

pour un certain difféo local ψ dans un voisinage de $f(x_0)$.

Finalement

$$\psi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = \psi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) = \psi \circ \tilde{f}(x_1, \dots, x_r) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

1.13. Montrer que le sous-ensemble $A = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas l'image de $\mathbb{R}$ par une immersion C^1 . Donner un exemple d'une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ dont l'image est A .

Contre-exemple qui n'est pas une immersion : on vérifie que $g(x) = (x^3, |x^3|) = (x^3, x^2|x|)$ convient. On a bien $g(\mathbb{R}) = A$, et g est C^1 .

1.15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de rang identiquement égal à un, et telle que $f(x, 0) \equiv (x, 0)$. Montrer que tout point de l'axe des abscisses contient un voisinage dans $\mathbb{R}^2$ qui est envoyé sur $\mathbb{R} \times \{0\}$.

On commence par vérifier que l'énoncé a un sens : en posant par exemple $f(x, y) = (x + y, 0)$, on vérifie que f satisfait à la fois les hypothèses et la conclusion.

Puis on applique le résultat de l'exercice **12** en un point $(x_0, 0)$, avec x_0 fixé : pour (x, y) proche de $(x_0, 0)$,

$$\psi \circ f \circ \varphi(x, y) = (x, 0),$$

avec des difféomorphismes ψ et φ , qui envoient $(x_0, 0)$ sur $(x_0, 0)$. Précisément :

$$\phi : U \rightarrow V, \quad \psi : U' \rightarrow V',$$

avec U, V, U', V' ouverts contenant $(x_0, 0)$.

(a) Quels sont les points (x, y) tels que $\varphi(x, y) \in \mathbb{R} \times \{0\}$? On sait que $\varphi(x_0, 0) = (x_0, 0)$. On cherche donc à résoudre $\varphi_2 = \pi_2 \circ \varphi = 0$ au voisinage de $(x_0, 0)$. Comme $\partial_2 \varphi_2(x_0, 0) \neq 0$ (cf la preuve du Th de forme normale des applications de rang constant¹), on a par le TFI tout un voisinage U_1 de x_0 dans $\mathbb{R}$ tel que $\varphi_2(x, y) = 0$ a une solution y . Autrement dit : il existe un voisinage $U'_1 \subset U_1$ de x_0 et pour tout $x \in U'_1$ un $\mathbf{y}(x)$ tels que $\varphi(x, \mathbf{y}(x)) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. On peut choisir U'_1 assez petit de sorte que $U'_1 \times \{0\} \subset V'$, le domaine de définition de ψ^{-1} .

(b) Soit $(x, 0) = \varphi(x', \mathbf{y}(x'))$, avec $x' \in U_1$. Alors $\psi \circ f(x, 0) = \psi(x, 0) = \psi \circ f \circ \varphi(x', \mathbf{y}(x')) = \psi(x', 0)$. Donc $\psi^{-1}(U_1 \times \{0\}) \in \mathbb{R} \times \{0\}$.

(c) Soit maintenant (x, y) dans V : $(x, y) = \varphi(x'', y'')$, tels que $x'' \in U_1$. Autrement dit : soit (x, y) dans $V \cap \varphi(U'_1 \times U_2)$. Par Corollaire du TIL, $\varphi(U'_1 \times U_2) \cap V$ est ouvert. Alors $\psi \circ f(x, y) = (x'', 0)$. Donc $f(x, y) = \psi^{-1}(x'', 0) \in \psi^{-1}(U_1 \times \{0\}) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$.

1.18. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localement Lipschitz, et y, z définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telles que

$$y'(t) < f(y(t)), \quad \text{et} \quad z'(t) = f(z(t)).$$

On suppose que pour un certain $t_0 \in I$, $y(t_0) < z(t_0)$.

a) Prouver que pour tout $t \in I \cap [t_0, +\infty[$, $y(t) < z(t)$, par un argument de connexité.

On pose

$$J = \{t \in I \cap [t_0, +\infty[, \forall t' \in]t_0, t'[, y(t') < z(t')\}.$$

Alors J est non vide, par continuité de $y - z$ et hypothèse en t_0 . Par ailleurs, J est fermé par construction. Soit en effet une suite $(t_n) \subset J$ qui converge dans $]t_0, +\infty[$ vers $\bar{t}$. S'il existe n tel que $\bar{t} \leq t_n$, alors automatiquement $\bar{t} \in J$. Sinon, soit $t' < \bar{t}$. Pour n assez grand, $t' < t_n < \bar{t}$. Comme $t_n \in J$, on a donc $y(t') < z(t')$.

Il ne reste donc qu'à prouver que J est ouvert dans $[t_0, \infty[$ pour pouvoir conclure.

Soit donc $t \in J$. On sait déjà que $]t_0, t] \in J$, donc il suffit de trouver $h > 0$ tel que $[t, t+h[\subset J$. Si $y(t) < z(t)$, alors à nouveau par continuité un tel h existe. On peut donc supposer $y(t) = z(t)$. Mais alors $f(y(t)) = f(z(t))$. Donc $y'(t) < z'(t)$. Donc, y étant C^1 , dans $(t - \beta, t + b)$, on a $y' < z'$. De $y(t - \beta) < z(t - \beta)$, on déduit donc $y(t) < z(t)$, contradiction. Donc pour tout $t \in J$, $y(t) < z(t)$, ce qui implique que J est ouvert.

Finalement, J étant non vide, ouvert et fermé dans $(t_0, +\infty) \cap I$, J est égal à $(t_0, +\infty) \cap I$ tout entier, ce qu'on voulait prouver.

b) Exemple : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , et telle que $f > 0$. Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 + f(x), \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

n'est pas globale.

1. En effet, avec les notations de l'exercice 12, on a $g(x, y) = (\pi \circ f(x, y), y)$ d'inverse φ , donc φ a la forme $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), y)$, si bien que $\varphi_2(x, y) = y$, et donc on a en fait $U_1 \times \{0\}$ inclus dans $\varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$.

On note x_* la solution maximale, définie sur un intervalle ouvert I_* contenant 0. Soit y_* la solution maximale de

$$y' = y^2, \quad y(0) = x_0,$$

définie sur J_* . Alors sur $I_* \cap J_*$, on a $y(t) < z(t)$ par la question a). Mais $y \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \sup J_* < \infty$, donc soit $\sup I_* < \sup J_*$, et dans ce cas x_* n'est pas globale, soit $x_* \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \sup J_*$, et alors $\sup I_* = \sup J_* < \infty$ et alors x_* n'est pas globale non plus.

1.19. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et le problème de Cauchy, posé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x' = (x+1)(x-1), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

- 1) Si $x_0 \in]-1, 1[$, montrer que la solution maximale est globale, et converge vers ∓ 1 en $\pm\infty$.

Il suffit de remarquer que $t \rightarrow -1$ et $t \rightarrow 1$ sont solutions. Si $x_0 \in (-1, 1)$, alors $-1 < x_0 < 1$, et donc $-1 < x(t) < 1$, sur tout l'intervalle de définition de x , par unicité de la solution au problème de Cauchy. La solution maximale est bornée. Elle est donc globale par Corollaire de la Proposition de sortie des compacts. En particulier, on a donc $x(t)^2 - 1 < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $x' < 0$ et x est décroissante et majorée et minorée. Donc x converge en $-\infty$ et en $+\infty$. Donc x' converge aussi, par l'équation. Si x' ne tendait pas vers zéro, alors on aurait $|x'|$ minorée au voisinage de $-\infty$ ou de $+\infty$, ce qui impliquerait $|x| \rightarrow \infty$. Donc $x' \rightarrow 0$, et par passage à la limite dans l'équation on en déduit que les limites $\ell_{\pm}$ en $\pm\infty$ satisfont $\ell_{\pm}^2 - 1 = 0$, donc $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = -1$.

- 2) Montrer que si $x_0 > 1$, alors l'intervalle d'existence de la solution maximale est borné supérieurement.

Par le même raisonnement que plus haut, $x(t) > 1$ sur son intervalle de définition. Donc x est croissante. En particulier, $x(t) > x_0$. Donc pour tout t , on a $1 < \frac{x(t)}{x_0}$, et donc

$$x(t)^2 - 1 > x(t)^2 \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right).$$

Donc $x'(t) > \alpha x(t)^2$, avec $\alpha = 1 - x_0^{-2} > 0$. Ce qu'on peut écrire

$$x'(t) = \alpha x^2 + f(x(t)),$$

avec $f(x) > 0$. Il suffit maintenant d'invoquer le résultat de l'exercice 18.

1.20. Soit E un espace de Banach, et $f : E \rightarrow E$, localement Lipschitzienne. On note, comme dans le cours, $T_*(y_0)$ la borne supérieure de l'intervalle d'existence de la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$

Si K est compact dans E , la fonction temps d'existence est-elle uniformément minorée dans E ? C'est-à-dire : a-t-on $\inf_{y_0 \in K} T_*(y_0) > 0$?

Pour un compact (en dimension finie comme en dimension infinie), la réponse est oui. En effet, si K est compact, pour tout $x \in K$, il existe un voisinage V_x de x sur lequel le temps d'existence est uniformément minoré (cf cours). Le compact K s'écrit comme réunion finie d'une famille V_{x_i} , et le minimum des temps d'existence relatifs à chaque x_i convient.

En dimension finie, il suffit donc d'utiliser la compacité locale pour conclure dans le cas d'un boule ($\bar{B}(y_0, r)$ est alors compact).

En dimension infinie, on peut trouver des champs de vecteurs localement compacts pour lesquels il n'existe pas de temps d'existence commun aux solutions issues de données dans la boule unité. Voici un tel exemple :

On pose $X = C_0(\mathbb{N}^*)$, le Banach des suites réelles $(u_k)_{k \geq 1}$ qui tendent vers 0, normé par $|u|_X = \sup_{k \geq 1} |u_k|$, et

$$f : (u_k)_{k \geq 1} \in X \rightarrow \left(k \left(u_k - \frac{1}{2} \right)_+^2 \right)_{k \geq 1},$$

où $x_+ = \max(x, 0)$. Pour tout $u \in X$, la suite $f(u)$ est nulle à partir d'un certain rang, donc appartient à X .

Etant donné $u \in X$, on cherche $r > 0$ et $K > 0$ tel que f soit K -Lipschitz dans $B_X(u, r)$. Soit K_0 tel que $|u_k| \leq 1/4$ pour $k \geq K_0$. Alors pour tout $v \in B_X(u, \frac{1}{4})$, pour $k \geq K_0$, $|v_k| \leq |u_k - v_k| + |u_k| \leq \frac{1}{2}$, donc $f(v)_k = 0$ si $k \geq K_0$. Soit maintenant $w, w' \in B_X(u, \frac{1}{4})$. Alors

$$\begin{aligned} |f(w) - f(w')|_X &= \max_{1 \leq k \leq K_0} \left| k \left(w_k - \frac{1}{2} \right)_+^2 - k \left(w'_k - \frac{1}{2} \right)_+^2 \right| \\ &\leq 2 \left(|u|_X + \frac{1}{4} \right) K_0 \max_{1 \leq k \leq K_0} |w_k - w'_k| \\ &\leq 2 \left(|u|_X + \frac{1}{4} \right) K_0 |w - w'|_X, \end{aligned}$$

puisque $x \in \mathbb{R} \rightarrow (x - \frac{1}{2})_+^2$ est $2R$ -Lipschitz dans $[0, R]$. Donc $r = \frac{1}{4}$ et $K = 2(|u|_X + \frac{1}{4})K_0$ conviennent.

Soit la suite $(a^{k_0})_{k_0 \geq 1} \subset X$, définie par $a^{k_0}_k = \delta_{k_0, k}$. Pour tout k_0 , $a^{k_0} = (a^{k_0}_k)_{k \geq 1}$ est nulle à partir d'un certain rang, donc appartient à X , et $|a^{k_0}|_X = 1$ pour tout k_0 . On note u^{k_0} la solution maximale de $u' = f(u)$ pour la donnée a^{k_0} , et $t^*(k_0)$ le temps maximal d'existence de u^{k_0} . Pour $k \neq k_0$, la fonction $t \rightarrow u^{k_0}_k(t)$ est identiquement nulle, et $t_*(k_0)$ est donc le temps d'existence maximal d'existence de la k_0 -ième fonction coordonnée $y = u^{k_0}$. La fonction $t \in [0, t_*(k_0)[\rightarrow y(t)$ est croissante, égale initialement à 1, donc $(y - \frac{1}{2})_+ \equiv y - \frac{1}{2}$

dans $[0, t^*(k_0)[$, et $z = y - \frac{1}{2}$ est solution sur $[0, t^*(k_0)[$ de l'équation

$$z' = k_0 z^2, \quad z(0) = \frac{1}{2},$$

dont le temps maximal d'existence est $2/k_0$.

La suite des temps d'existence $t^*(k_0)$ associés à la suite de données $(a^{k_0})_{k_0 \geq 1} \subset \bar{B}_X(0, 1)$ est donc $t^*(k_0) = 2/k_0$; en particulier, cette suite n'est pas minorée.

2. TD2

2.1. Prouver directement que l'image d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ par un paramétrage est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$, et vice versa, en utilisant simplement la définition d'un paramétrage et la définition d'une sous-variété, sans passer par le point de vue graphe ou le point de vue submersion.

Soit M une sous-variété, et φ un difféomorphisme tel que $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, avec U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$. À translation près, $\varphi(x) = 0$. Vérifions que $g = \varphi^{-1} \circ \iota$ est un paramétrage qui convient dans $V' = \pi_1(V)$, la première composante de V . C'est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, car les projections sont ouvertes.

On commence par observer que g est une immersion (en tant que composée d'immersions) et injective (en tant que composée d'applications injectives). Donc g est une bijection de V' sur $U \cap M$. Sa réciproque est $\pi_1 \circ \varphi$. En effet, pour $y' \in V'$,

$$\pi_1 \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \iota(y') = \pi_1 \circ (y', 0) = y',$$

et pour $z \in U \cap M$, tel que $\varphi(z) = (y, 0)$,

$$\varphi^{-1} \circ \iota \circ \pi_1 \circ \varphi(z) = \varphi^{-1}(y, 0) = z.$$

Comme $\pi_1 \circ \varphi$ est continue, g est donc un homéomorphisme.

Réciproquement : soit $x = (x', x'') \in M$, U un ouvert associé, et un paramétrage $g : V' \rightarrow U \cap M$. Par le théorème de forme normale des immersions, il existe un ouvert $W' \subset V'$, contenant 0, tel que

$$(4.7) \quad \psi \circ g(y') = (y', 0), \quad \text{pour } y' \in W'.$$

Comme g est un homéomorphisme, $g(W')$ est ouvert dans $U \cap M$, donc a la forme $V \cap M$, avec V ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'application ψ est un C^k -difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $g(W')$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^n$. De (4.7) on déduit $\psi(g(W')) = \psi(V \cap M) = W' \times \{0\}$. On vient de prouver que $\psi(V \cap M)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^m \times \{0\}$, ce qui prouve que M est une sous-variété par la Remarque 1 du chapitre 2 du cours.

2.2. Soit M une sous-variété de dimension m et de régularité C^k de $\mathbb{R}^n$ et N une sous-variété de dimension p et de régularité $C^{k'}$ de $\mathbb{R}^q$. Montrer que $M \times N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$. Quelle est sa dimension ? Quelle est sa régularité ?

On peut par exemple adopter le point de vue submersion. Soit f une famille d'équations locales de M et g une famille d'équations locale de N . Soit $(x, y) \in M \times N$, de sorte que $U \cap M \times V \cap N = f^{-1}(\{0\}) \times g^{-1}(\{0\})$. Il suffit de vérifier que $h = (f, g)$ est une submersion : $\mathbb{R}^{n+q} \times \mathbb{R}^{n-m+q-p}$. On calcule :

$$h'(x, y) = \begin{pmatrix} f'(x) & 0 \\ 0 & g'(y) \end{pmatrix},$$

avec un bloc en haut à gauche de taille $(n-m) \times n$ et un bloc en haut à droite de taille $q \times (n-m)$. Donc $h'(x, y)$ est de rang $n-m+q-p$, ce qu'on voulait prouver.

2.3. Montrer que les sous-variétés de codimension 0 de $\mathbb{R}^n$ sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension n . Alors $U \cap M = \varphi^{-1}(V)$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et φ^{-1} est une application ouverte. Donc $U \cap M$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Cela est vrai pour tout $x \in M$, pour un certain U_x voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$. Donc $M = \bigcup_{x \in M} U \cap M_x$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ en tant qu'union d'ouverts.

Réciproquement : si V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors V vérifie trivialement la définition, avec $\varphi = \text{Id}$.

2.4. Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Quelle est sa régularité ?

Il suffit de vérifier que $(x, y, z) \rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1$ est une submersion en tout point de l'ensemble en question. La codimension est donc 1, et la dimension de la sous-variété est égale à 2.

2.5. Montrer que

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 - x = 0\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Quelle est sa régularité ?

C'est l'intersection d'un cylindre avec une sphère. On considère

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - x \end{pmatrix}$$

et on cherche à vérifier que f est une submersion en tout point de $f^{-1}(\{0\})$. On calcule :

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

On envisage les cas où des coefficients de $f'(x, y, z)$ s'annulent :

- Si $(x, y, z) \in f^{-1}(\{0\})$ et si $z = 0$, alors $x^2 + y^2 = 1$ et $x = 1$, et on vérifie alors que $f'(x, y, z)$ est de rang 2.
- Si $(x, y, z) \in f^{-1}(\{0\})$ et si $y = 0$, alors $x^2 + z^2 = 1$ et $x = 0$ ou $x = 1$. Si $x = 0$, alors $z = \pm 1$, et $f'(x, y, z)$ est de rang 2. Si $x = 1$, alors $z = 0$, et $f'(x, y, z)$ est de rang 1. Donc f n'est pas une submersion en $(1, 0, 0)$.
- Si $x = 0$, alors $y = 0$ et $f'(x, y, z)$ est de rang 2 car $z \neq 0$. Si $x = 1/2$, alors $y \neq 0$, et $f'(x, y, z)$ est de rang 2.

Donc

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 - x = 0\} \setminus \{(1, 0, 0)\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2, de régularité C^∞ . Il reste à étudier en détail la forme de la surface au voisinage du point $(1, 0, 0)$ pour pouvoir conclure.

2.7. *Un premier contre-exemple : un 8 dessiné dans le plan. Soit $\gamma : (-\pi/2, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $\gamma(t) = (\sin(2t), \cos(t))$.*

a) *Trouver $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(\{0\}) = \gamma(-\pi/2, 3\pi/2)$ et dessiner cet ensemble.*

On vérifie que $f(x, y) = x^2 - 4y^2(1 - y^2)$ convient.

b) *Vérifier que γ est une immersion injective.*

L'intervalle de définition est ouvert et de longueur 2π , donc l'injectivité découle de l'injectivité de $\cos$. Par ailleurs, on calcule $\gamma'(t) = (2\cos(2t), -\sin(t)) \neq 0$ dans $(-\pi/2, 3\pi/2)$.

c) *Montrer que γ n'est pas un homéomorphisme sur son image.*

On remarque que $\gamma(-\pi/2, 3\pi/2)$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Si γ était une immersion sur $\gamma(-\pi/2, 3\pi/2)$, l'image munie de la topologie induite par la topologie de $\mathbb{R}^2$, alors l'image réciproque $(\pi/2, 3\pi/2) = \gamma^{-1}(\gamma(-\pi/2, 3\pi/2))$ serait un compact de $\mathbb{R}$. Mais $(-\pi/2, 3\pi/2)$ est un intervalle ouvert.

On pourrait aussi dire qu'on peut trouver un voisinage connexe de 0 dans l'ensemble $\gamma(-\pi/2, 3\pi/2)$ dont l'image par γ^{-1} est l'union non connexe d'un voisinage de $-\pi/2$, un voisinage de 0 et un voisinage de $3\pi/2$.

d) *Montrer que $\gamma(-\pi/2, 3\pi/2)$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.*

Si $\gamma(-\pi/2, 3\pi/2)$ était une sous-variété, nécessairement de dimension 1 (cf exercice 2.3) alors soit φ un difféomorphisme comme dans la définition, au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\varphi(0, 0) = 0$. L'application $\tilde{\varphi} : U \cap \gamma(-\pi/2, 3\pi/2) \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \varphi(U) \setminus \{0\} \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ est une application continue en tant que restriction d'une application continue à un ouvert. Sa réciproque est également continue, pour la même raison. L'image par un homéomorphisme d'une composante connexe est une composante connexe. Mais $U \cap \gamma(-\pi/2, 3\pi/2) \setminus \{(0, 0)\}$ a 4 composantes connexes alors que l'intervalle image privé de 0 n'en a que deux.

2.8. *Un deuxième contre-exemple : une courbe non lisse dans le plan. Soit*

$$A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x < 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y < 1\}.$$

- a) Montrer que A n'est pas une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^2$. (Indication : utiliser le point de vue submersion.)

En faisant un dessin, on voit que A n'est pas un graphe en x , ni un graphe en y , et n'est pas un graphe C^1 suivant une autre direction. Donc A n'est pas une sous-variété C^1 . Précisément, si A était une sous-variété C^1 , nécessairement de dimension 1, alors au voisinage de $(0,0)$ on aurait $U \cap A = f^{-1}(\{0\})$ avec f submersion C^1 , et U voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$. Comme f est une submersion, on aurait $\partial_x f(0,0)$ non nul ou $\partial_y f(0,0)$ non nul. L'exercice est symétrique en x et y , donc on peut supposer $\partial_y f(0,0)$ non nul. Mais alors, par le théorème des fonctions implicites, $\{f=0\}$ serait au voisinage de $(0,0)$ le graphe d'une application $x \rightarrow g(x)$ de classe C^1 . Ce n'est manifestement pas le cas.

- b) Montrer que A est l'image d'une application injective lisse de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$.

On vérifie que $f(0) = (0,0)$, $f(x) = (e^{1/x}, 0)$ si $x < 0$, et $f(x) = (0, e^{-1/x})$ si $x > 0$ convient.

2.9. Soit $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

- a) Montrer que $\mathbb{T}^2$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$.

Via l'exercice 2, il suffit de vérifier que $\mathbb{S}^1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Pour cela, il suffit de vérifier que $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ est une submersion en tout point de $\mathbb{S}^1$.

- b) Soit $g(\varphi, \theta) = ((2 + \cos \varphi) \cos \theta, (2 + \cos \varphi) \sin \theta, \sin \varphi)$. Montrer que $g(\mathbb{R}^2)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

L'image $g(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble

$$g(\mathbb{R}^2) = \{g(\varphi, \theta) = (2 + \cos \varphi) \cos \theta, (2 + \cos \varphi) \sin \theta, \sin \varphi) \in \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On pose

$$x = (2 + \cos \varphi) \cos \theta, \quad y = (2 + \cos \varphi) \sin \theta, \quad z = \sin \varphi.$$

Alors on observe que

$$x^2 + y^2 = (2 + \cos \varphi)^2, \quad \text{et donc} \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} = |2 + \cos \varphi| = 2 + \cos \varphi,$$

si bien que l'équation du tore est

$$f(x, y, z) = (2 - (x^2 + y^2)^{1/2})^2 + z^2 - 1 = 0,$$

et $f^{-1}(\{0\}) = g(\mathbb{R}^2)$. Dans le plan $\{x=0\}$, il s'agit de l'union des cercles de centre $(y, z) = (2, 1)$ et de rayon 1 et de centre $(y, z) = (-2, 1)$ et de rayon 1. L'intersection avec chaque plan $\{\theta = \text{constante}\}$ est une copie de ces cercles. Faire un dessin. On vérifie que f est une submersion, et donc $g(\mathbb{R}^2)$ une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

2.11. Dans $L(\mathbb{R}^n)$, on note $GL(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isomorphismes, $SL(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isomorphismes de déterminant 1, et $O(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isomorphismes u tels que ${}^t u \cdot u = \text{Id}$. Montrer que $GL(\mathbb{R}^n)$, $SL(\mathbb{R}^n)$ et $O(\mathbb{R}^n)$ sont des sous-variétés de $L(\mathbb{R}^n)$.

Le groupe GL est ouvert dans $L(\mathbb{R}^n)$ donc est une sous-variété de même dimension. Pour SL , il suffit d'utiliser

$$(\det)'(A)H = \det A \text{ trace}(A^{-1}H),$$

avec $H = A$.

Pour le groupe orthogonal, $f(A) = {}^t AA$, et $f'(A)H = {}^t AH + {}^t HA$, et donc $f'(A)(\frac{1}{2}AC) = \frac{1}{2}({}^t C + C)({}^t AA)$, et donc si A est orthogonale et C symétrique on a donc $f'(A)(\frac{1}{2}AC) = C$.

2.13. Prouver qu'une variété est un espace localement compact, localement connexe, et qu'une variété est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.

Soit M une variété de dimension m , et $x \in M$. On cherche un voisinage U de x dans M qui contient un compact de M . Soit (V, g) une carte locale en x . Alors $g(V)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^m$, et contient donc une boule fermée $B(x', \delta)$, pour un certain $\delta > 0$. L'adhérence de cette boule est compacte. On a noté $x' = g(x) \in \mathbb{R}^m$. L'ensemble $g^{-1}(\bar{B}(x', \delta))$ est inclus dans V , car $\bar{B}(x', \delta) \subset g(V)$. C'est l'image d'un compact par l'application continue g . Enfin $x \in g^{-1}(B(x', \delta))$. Donc $V = U$ convient, et le compact qu'on cherchait est $g^{-1}(\bar{B}(x', \delta))$.

On vient donc d'utiliser la compacité locale de $\mathbb{R}^m$ pour prouver la compacité locale de la variété M . Le point clé vient du fait que les cartes sont des homéomorphismes.

Prouvons maintenant la connexité locale. Cela signifie que pour tout $x \in M$, pour tout voisinage U de x dans M , on peut trouver un voisinage connexe V de x dans M qui est inclus dans U . Etant donné U un voisinage de x dans M , on peut supposer que U est inclus dans un ouvert de carte V . Sinon, on change U en $U \cap V$ dans la suite, avec V ouvert de carte en x . On raisonne comme ci-dessus : $g(U)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^m$, donc contient une boule (connexe) $B(x', \delta)$. L'image par g^{-1} de cette boule est connexe et incluse dans U .

Prouvons finalement que si M est connexe, alors M est connexe par arcs. On se donne x dans M et on note M' l'ensemble des points de M qui peuvent être reliés à x par un chemin. On commence par remarquer que M' contient tout un voisinage de x . En effet, si U est un voisinage connexe de x contenu dans un ouvert de carte V , et si $y \in U$, alors en notant $x' = g(x)$, $y' = g(y)$, on peut relier x' à y' par un chemin dans $g(U)$ (qui est connexe par arcs car ouvert dans $\mathbb{R}^m$). Soit γ_0 ce chemin. Alors $g^{-1} \circ \gamma_0$ est un chemin reliant x à y , et ce chemin est tracé sur M . Montrons ensuite que M' est ouvert dans M . Soit $z \in M'$, et γ un chemin reliant z à x . Il existe un voisinage W de z qui est connexe par arcs. Soit donc $\tilde{z} \in W$, et $\tilde{\gamma}$ un chemin reliant z à $\tilde{z}$. Alors par concaténation des chemins γ et $\tilde{\gamma}$ on relie x à $\tilde{z}$. Enfin, soit $y \notin M'$. Si tout voisinage de y contenait un élément de M' , alors on conclurait comme précédemment. Donc il existe un voisinage de y qui est tout entier inclus dans le complémentaire de M' , si bien que M' est fermé dans M . Finalement, M' est ouvert, fermé, non vide dans M connexe, donc égal à M .

2.14. Deux atlas compatibles dans $\mathbb{S}^n$.

a) Vérifier que $\{(H_N, p_N), (H_S, p_S)\}$ est un atlas de la sphère, où p_N, p_S sont les projections stéréographiques, H_N contient strictement l'hémisphère sud et H_S contient strictement l'hémisphère nord.

b) Vérifier que $\{(U_i^+, g_i^+), (U_i^-, g_i^-)\}_{1 \leq i \leq n}$ est un atlas de la sphère, où

$$U_i^+ = \{x \in \mathbb{S}^n, x_i > 0\}, \quad U_i^- = \{x \in \mathbb{S}^n, x_i < 0\}, \quad g_i^\pm(x) = \hat{x}^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

c) Vérifier que ces atlas sont compatibles.

(a) Cf cours.

(b) Les U_i sont des intersections d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{S}^{n-1}$, donc des ouverts de $\mathbb{S}^{n-1}$. Ils recouvrent $\mathbb{S}^{n-1}$ (car tout point sur la sphère a une coordonnée non nulle). Il s'agit donc de vérifier que $g_i \circ g_j^{-1}$ est C^k . Par définition de g_i , on a

$$g_i^{-1}(x'_1, \dots, x'_{n-1}) = (x'_1, \dots, x'_{i-1}, \sqrt{1 - |x'|^2}, x'_i, \dots, x'_{n-1}).$$

Donc, en supposant $j + 1 < i - 1$,

$$g_j \circ g_i^{-1}(x'_1, \dots, x'_{n-1}) = (x'_1, \dots, x'_{j-1}, x'_{j+1}, x'_{i-1}, \sqrt{1 - |x'|^2}, x'_i, \dots, x'_{n-1}).$$

C'est une application C^∞ .

(c) Il s'agit de vérifier que $g_i^+ \circ p_N^{-1}$ est C^∞ . Son domaine est $p_N(H_N \cap U_i^+)$, et de même pour $p_N \circ g_i^{-1}$ dans $g_i(U_i^+ \cap H_N)$. On a vu en cours la formule

$$p_N^{-1}(x') = \left(\frac{2x'_1}{1 + |x'|^2}, \dots, \frac{2x'_{n-1}}{1 + |x'|^2}, \frac{-1 + |x'|^2}{1 + |x'|^2} \right).$$

Donc

$$g_i \circ p_N^{-1}(x') = \left(\frac{2x'_1}{1 + |x'|^2}, \dots, \frac{2x'_{i-1}}{1 + |x'|^2}, \frac{2x'_{i+1}}{1 + |x'|^2}, \dots, \frac{2x'_{n-1}}{1 + |x'|^2}, \frac{-1 + |x'|^2}{1 + |x'|^2} \right)$$

qui est C^∞ . Réciproquement, on a vu en cours la formule

$$p_N(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Donc

$$p_N \circ g_i^{-1}(x') = p_N(x'_1, \dots, x'_{i-1}, \sqrt{1 - |x'|^2}, x'_i, \dots, x'_{n-1}),$$

et on a choisi x' dans $g_i(H_N)$ donc on sait que l'argument de p_N plus haut n'est pas le pôle nord, autrement dit que $x_{n-1} \neq 1$. Donc

$$p_N(x'_1, \dots, x'_{i-1}, \sqrt{1 - |x'|^2}, x'_i, \dots, x'_{n-1}) = \frac{1}{1 - x_{n-1}}(x'_1, \dots, x'_{i-1}, \sqrt{1 - |x'|^2}, x'_{n-2}),$$

et on a bien une application C^∞ .

2.15. Vérifier en détail que la relation binaire "deux atlas sont équivalents quand leur réunion est un atlas" est transitive, et donc une relation d'équivalence.

On suppose que (U_i, g_i) et (U'_j, g'_j) sont compatibles, et que (U'_j, g'_j) et (U''_k, g''_k) sont compatibles. Soit alors $g_i \circ (g''_k)^{-1}$. Il s'agit de vérifier que c'est une application aussi régulière que celles qui correspondent aux changements de carte compatibles. Son domaine est $g''_k(U''_k \cap U_i)$. Si cet ensemble est vide, il n'y a rien à vérifier. Sinon, soit $x' \in g''_k(U''_k \cap U_i)$. Comme les U'_j recouvrent M , il existe un U'_{j_0} tel que $U''_k \cap U_i \cap U'_{j_0}$ contienne $(g''_k)^{-1}(x')$. L'ensemble $V' = g''_k(U''_k \cap U'_{j_0} \cap U_i)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et contient x . Alors

$$g_i \circ (g''_k)^{-1}|_{V'} = g_i \circ (g'_{j_0})^{-1} \circ g'_{j_0} \circ (g''_k)^{-1}|_{V'},$$

et $g'_{j_0} \circ (g''_k)^{-1}$ est C^k dans V' car c'est une application C^k dans $g''_k(U''_k \cap U'_{j_0})$, par compatibilité. Enfin $g_i \circ (g'_{j_0})^{-1}$ est C^k dans $g'_{j_0}(U''_k \cap U'_{j_0})$, donc dans $g'_{j_0} \circ (g''_k)^{-1}(V')$.

2.18. Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme local, c'est-à-dire une application continue $X \rightarrow Y$, telle que pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $U \subset X$ contenant x tel que $f|_U$ est un homéomorphisme $U \rightarrow f(U)$, avec $f(U)$ ouvert dans Y . On suppose que $\text{card } f^{-1}(y) = m$, pour tout $y \in Y$, pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Montrer que f est un revêtement à m feuillets.

Soit $y \in Y$, et $x_1, \dots, x_m$ ses antécédents. Associé à chaque x_j , soit U_j un voisinage sur lequel f est un homéo. On peut supposer que les U_j sont disjoints (car si f est un homéo $U \rightarrow f(U)$, alors f est un homéo $U \cap V \rightarrow f(U \cap V)$, et $f(U \cap V)$ est ouvert car $f|_U$ est une application ouverte; ici on utilise l'hypothèse implicite X séparé.) Soit $V = \bigcap_{1 \leq j \leq m} f(U_j)$. Tout point de $z \in V$ a exactement un antécédent dans U_j . Comme tout point de Y a exactement m antécédents, cela signifie que

$$(4.8) \quad f^{-1}(V) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq m} U_j.$$

On pose maintenant $\tilde{U}_j = U_j \cap f^{-1}(V)$. Alors chaque $\tilde{U}_j$ est inclus dans $f^{-1}(V)$ donc l'union des $\tilde{U}_j$ est incluse dans $f^{-1}(V)$. Réciproquement, par (4.8), $f^{-1}(V)$ est inclus dans l'union des $\tilde{U}_j$:

$$(4.9) \quad f^{-1}(V) = \bigcup_{1 \leq j \leq m} \tilde{U}_j.$$

L'égalité (4.9) contient de plus les informations suivantes :

- (a) les $\tilde{U}_j$ sont disjoints,
- (b) pour tout point z de V , l'ensemble $f^{-1}(\{z\})$ est une famille de m points, avec un point dans chaque $\tilde{U}_j$.

En effet, pour tout $z \in V$, la fibre $f^{-1}(\{z\})$ est incluse dans l'union disjointe des $\tilde{U}_j$. Comme $f^{-1}(\{z\})$ est de cardinal exactement m , et que f est injective sur chaque $\tilde{U}_j$, l'ensemble $f^{-1}(\{z\})$ contient donc un élément dans chaque $\tilde{U}_j$.

Il reste à vérifier que $f(\tilde{U}_j) = V$. On a $f(\tilde{U}_j) = f(U_j \cap f f^{-1}V) \subset f(U_j) \cap V \cap V$, car on a toujours $f f^{-1}V \subset V$, et $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Réciproquement, si $z \in V$, alors via (b), $f^{-1}(\{z\})$ rencontre chaque $\tilde{U}_j$, donc en particulier $z \in f(\tilde{U}_j)$, pour tout j . Donc $f(\tilde{U}_j) = V$.

De (4.9), (a), (b), du caractère ouvert de V , du fait que $f|_{\tilde{U}_j}$ est un homéo de $\tilde{U}_j$ sur V , on déduit le fait que f est un revêtement.

2.19. On prouve dans cet exercice que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est étale et propre, alors f est un revêtement.

On dit que f est étale quand $f'(x)$ est un difféomorphisme pour tout x .

On dit que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est propre quand $|f(x)| \rightarrow \infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$.

1) Montrer que l'image réciproque par f d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est compact.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, et $(x_n) \subset f^{-1}(K)$. Si (x_n) n'était pas bornée, alors $|y_n| \rightarrow \infty$, pour une certaine sous-suite (y_n) de (x_n) . Mais alors $(f(y_n)) \subset K$, et $|f(y_n)| \rightarrow \infty$, contradiction.

2) En utilisant un argument de connexité, montrer que f est surjective.

L'image de f est ouverte dans $\mathbb{R}^n$, par corollaire du TIL. L'image est non vide par définition. Montrer que l'image de f est fermée : soit $(f(x_n))$ une suite de l'image, convergente dans $\mathbb{R}^n$ vers ℓ . Aucune sous-suite de (x_n) ne peut tendre vers l'infini, car les images par f sont bornées. Donc (x_n) est bornée. Soit (y_n) une sous-suite convergente, vers y . Alors $\ell = f(y)$.

3) Montrer que tout point de $\mathbb{R}^n$ a un nombre fini d'antécédents par f .

Soit $y \in \mathbb{R}^n$, et considérons $f^{-1}(\{y\})$: c'est l'image réciproque d'un compact donc un compact. Si $f^{-1}(\{y\})$ avait un point d'accumulation z , soit alors $(z_n) \subset f^{-1}(\{y\})$ telle que $z_n \rightarrow z$. Par hypothèse sur $f'(z)$ et TIL, il existe un voisinage non trivial $B(z, \varepsilon)$ de z sur lequel f est un homéo. Pour n assez grand, disons $n \geq N$, on a $z_n \in B(z, \varepsilon)$. Mais alors $z_N, z_{N+1} \in B(z, \varepsilon)$, et $f(z_N) = f(z_{N+1}) = y$. Contradiction avec le caractère injectif de f sur $B(z, \varepsilon)$. Donc $f^{-1}(\{y\})$ est un compact sans point d'accumulation. C'est un ensemble fini.

4) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note $x_1, \dots, x_m$ ses antécédents. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f^{-1}(V_\varepsilon) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} B(x_i, \varepsilon)$.

Sinon, on aurait $f^{-1}(B(x, 1/p))$ not included in the union of the $B(x_i, \varepsilon_0)$, for some $\varepsilon_0 > 0$, and all p . On aurait donc $(z_p) \subset f^{-1}(B(x, 1/p)) \setminus \bigcup_i B(x_i, \varepsilon_0)$. En particulier, $f(z_p) \rightarrow x$, et la suite (z_p) est à valeurs dans le compact $f^{-1}(B(x, 1))$. Soit donc z une valeur d'adhérence de (z_p) . Alors $f(z) = x$, donc $z = x_j$, pour un certain j . Donc $z_n \in B(x_j, \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, pour n assez grand. Mais cela contredit la définition des z_p .

- 5) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que localement autour de x , tous les points ont le même nombre d'antécédents.

Soit ε_0 assez petit de sorte que f est un difféo sur tous les $B(x_j, \varepsilon_0)$ (par le TIL et hypothèse). Soit $W = V_{\varepsilon_0} \cap (\bigcap_{1 \leq j \leq m} f(B(x_j, \varepsilon_0)))$. Alors pour tout $z \in W$:

- $z \in f(B(x_j, \varepsilon_0))$, pour tout j , et ces boules sont disjointes deux à deux, donc f a au moins m antécédents.
- $z \in V$, donc $f^{-1}(\{z\})$ est inclus dans l'union des $B(x_j, \varepsilon_0)$, et il ne peut pas y avoir plus d'un antécédent dans chacune de ces boules.

Donc z a exactement m antécédents, comme x .

- 6) Montrer que f est un revêtement.

On sait maintenant que f est un homéo local et que le cardinal des fibres est constant. Donc on conclut avec l'exercice précédent.

2.20. Soit M une variété compacte, N une variété connexe, et $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme local au voisinage de tout point. Montrer que f est un revêtement.

D'après l'exercice 2.18, il suffit de prouver que le cardinal des fibres est constant. Comme N est connexe, il suffit de prouver que le cardinal des fibres est localement constant. On peut reprendre tous les points de l'exercice 2.19, l'hypothèse " f propre" étant remplacée par " M compacte", ce qui permet les mêmes arguments.

2.21. Soit M_1, M_2, N trois variétés, $p : M_1 \rightarrow M_2$ un revêtement et $f : M_2 \rightarrow N$. Montrer que f est régulière si et seulement si $f \circ p : M_1 \rightarrow N$ est régulière.

Un sens est évident : si p et f sont régulières, alors $f \circ p$ est régulière par composition. Réciproquement, si $f \circ p$ est régulière, alors pour tout $x \in M_2$, on peut trouver un ouvert V tel que $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$, l'union étant disjointe et non triviale : U_{i_0} est non vide, et $p|_{U_{i_0}}$ est un C^k -difféomorphisme. Alors

$$f = f \circ p \circ (p|_{U_{i_0}})^{-1}$$

est régulière en tant que composée d'applications régulières.

2.22. Soit M_1 un espace topologique, M_2 une variété lisse, et $f : M_1 \rightarrow M_2$ un revêtement continu. Montrer qu'il existe une structure de variété lisse sur M_1 telle que f soit lisse.

Il s'agit de "remonter" la structure de variété en bas (sur la base M_2) à l'espace total M_1 en haut, via le revêtement f .

Soit $V \subset M_2$ et les $U_i \subset M_1$ comme dans la définition, de sorte que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$. Tout point de M_1 appartient à un U_i . Pour tout $x \in M_2$, on peut intersecter le $V = V_x$ correspondant par un ouvert de carte, et obtenir un $\tilde{V}$ inclus dans un ouvert de carte. Les ouverts correspondants en haut sont les $\tilde{U}_i$. On enlève les tilde. Tout y de M_1 tombe donc dans un U tel que $f(U) = V$ et V est un ouvert de carte. Notons (V, g) une carte en $f(y)$. On va montrer que l'ensemble des $(U, g \circ f)$ est un atlas de M_1 .

Les ensembles U ainsi définis recouvrent M_1 . L'application $g \circ f|_U$, définie sur U , est une composée d'homéomorphismes : $f|_U$ envoie U sur $f(U) = V$, et c'est un homéomorphisme de U sur V , et g est un homéomorphisme de V sur $g(V)$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^{m_2}$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que les changements de carte sont réguliers. Soient $(U, g \circ f|_U)$ et $(\tilde{U}, \tilde{g} \circ f|_{\tilde{U}})$ deux cartes de M_1 telles que $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. On veut vérifier que $g \circ f|_U \circ (\tilde{g} \circ f|_{\tilde{U}})^{-1}$ est régulière dans $(\tilde{g} \circ f)(\tilde{U} \cap U)$.

Soit donc $x \in (\tilde{g} \circ f)(\tilde{U} \cap U) \in \mathbb{R}^{m_2}$. On lui applique $(\tilde{g} \circ f|_{\tilde{U}})^{-1}$, donc d'abord $\tilde{g}^{-1}$, on obtient $\tilde{g}^{-1}(x) \in f(\tilde{U} \cap U)$. On applique $(f|_{\tilde{U}})^{-1}$ et on obtient un élément de $\tilde{U} \cap U$, qu'on projette sur M_2 par $f|_U$, puis qu'on envoie dans $\mathbb{R}^{m_2}$ par g :

$$\begin{aligned} g \circ f|_U \circ (\tilde{g} \circ f|_{\tilde{U}})^{-1} &= g \circ \underbrace{f|_U \circ (f|_{\tilde{U}})^{-1}}_{=\text{Id dans } f(\tilde{U} \cap U)} \circ \tilde{g}^{-1}, \quad \text{dans } (\tilde{g} \circ f)(\tilde{U} \cap U). \\ &= g \circ g^{-1}, \quad \text{dans } (\tilde{g} \circ f)(\tilde{U} \cap U), \end{aligned}$$

qui est régulière car g et $\tilde{g}$ sont régulières.

2.23. *Atlas de $P^n(\mathbb{R})$. Soit la relation d'équivalence $\sim$ dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ définie par $x \sim y$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $x = ky$.*

a) Montrer que $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim = \mathbb{S}^n / \{\text{Id}, -\text{Id}\} = P^n(\mathbb{R})$. On note p la projection canonique $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{R})$.

On va montrer que le quotient $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ est en bijection avec $P^n(\mathbb{R})$. Soit l'application

$$x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow x/|x| \in \mathbb{S}^n \longrightarrow \overline{x/|x|} \in P^n(\mathbb{R}).$$

Cette application passe au quotient : en effet, si $x \sim y$ dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, alors $x/|x| = y/|y|$. L'application correspondante $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \rightarrow P^n(\mathbb{R})$ est surjective : pour tout $z \in P^n(\mathbb{R})$, on note $z = \dot{y}$, avec $y \in \mathbb{S}^n$. Alors $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est un antécédent. Cette application est aussi injective : si $\dot{x}$ et $\dot{y}$ dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ont même image, alors en choisissant des représentants x et y , on voit que $x/|x| = \pm y/|y|$, et donc $x \sim y$, c'est-à-dire $\dot{x} = \dot{y}$.

b) A partir des applications $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow p(x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$, définir un atlas de $P^n(\mathbb{R})$.

On note π le revêtement $\mathbb{S}^n \rightarrow P^n$. On rappelle la notation $U_i^\pm$ pour un atlas de $\mathbb{S}^n$: U_i^+ est l'ensemble des points de $\mathbb{S}^n$ dont la i -ème coordonnée est strictement positive. On remarque que $\pi(U_i^+) = \pi(U_i^-)$. Donc les $\pi(U_i^+)$ recouvrent P^n . On va s'en servir comme ouverts de carte.

Etant donné $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $y_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ et $\dot{y}_i$ la classe de $(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ pour la relation $\sim$. L'application

$$f_i : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow p(\dot{y}_i) \in P^n$$

est continue puisque

$$\tilde{f}_i : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \frac{y_i}{\sqrt{1 + |x|^2}} \in \mathbb{S}^n$$

est continue, et que $f_i = \pi \circ \tilde{f}_i$.

Réciproquement, l'application

$$g_i : \overline{x_1, \dots, x_{n+1}} \in \pi(U_i^+) \in P^n \longrightarrow (x_1/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_{n+1}/x_i) \in \mathbb{R}^n$$

est continue, car l'application correspondante $g_i \circ \pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, cf Exercice 2.21 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & & \\ \pi \downarrow & \searrow^{g_i \circ \pi} & \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{g_i} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

et

$$f_i \circ g_i = \text{Id} \quad \text{dans } \pi(U_i^+), \quad g_i \circ f_i = \text{Id} \quad \text{dans } \mathbb{R}^n.$$

Il suffit donc de prouver que les changements de carte $g_i \circ g_j^{-1}$ sont réguliers : on calcule :

$$g_i \circ g_j^{-1} : g_j(\pi(U_i^+) \cap \pi(U_j^+)) \rightarrow g_i(\pi(U_i^+) \cap \pi(U_j^+))$$

est, si $i < j$, l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1/x_j, \dots, x_{i-1}/x_j, 1/x_j, x_{i+1}/x_j, \dots, x_{j-1}/x_j, \dots, x_n/x_j),$$

bien définie et lisse dans $g_j(\pi(U_i^+) \cap \pi(U_j^+))$.

3. TD3

3.5. Montrer qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est localement un graphe au-dessus de son espace tangent.

Utiliser un paramétrage g , puis la projection π sur $T_x M$ parallèlement à E , puis montrer que $\pi \circ g$ est un difféomorphisme. Le difféomorphisme réciproque fournit un paramétrage à partir de l'espace tangent. On passe ensuite au point de vue graphe comme dans le cours.

3.6. Soit $p : M \rightarrow B$ une application C^k entre deux variétés M, B de classe C^k . On dit que (p, M, B) est un fibré vectoriel de dimension n , ou souvent que p est un fibré vectoriel de dimension n , quand

- pour tout $b \in B$, la fibre $p^{-1}(\{b\})$ est un espace vectoriel, et
- pour tout $b \in B$, il existe un ouvert U de B contenant b , un espace vectoriel F de dimension n , et un C^k -difféomorphisme $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ p \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

avec π_1 la projection sur la première composante $U \times F \rightarrow U$,

- et $\pi_2 \circ \varphi|_{p^{-1}(\{y\})} : p^{-1}(\{y\}) \rightarrow F$ est un isomorphisme linéaire de chaque fibre $p^{-1}(\{y\})$ avec $y \in U$ vers l'espace F , où $\pi_2 : U \times F \rightarrow F$ est la deuxième projection.
- a) Comparer cette définition avec la définition de revêtement.

Dans un revêtement la fibre n'est pas nécessairement un espace vectoriel. Dans tous les exemples qu'on a vus, la fibre était finie. Mais un revêtement est localement trivialisable, au sens suivant : avec les notations du cours, chacun des U_i est homéomorphe à V . Donc on a

$$\varphi : p^{-1}(V) \rightarrow V \times F,$$

avec F l'ensemble fini des indices i tels que $p^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$, et φ application qui à $x \in U_i$ associe $(p(x), i) \in V \times F$.

- b) Montrer que la projection $p : TM \rightarrow M$ définit un fibré vectoriel, pour toute sous-variété M de $\mathbb{R}^n$.

On prend un ouvert de carte en bas (dans M). Quel est le φ qui marche en haut ? On a $p^{-1}(U)$ formé des (x, u) avec $u \in T_x M$. La carte associée dans TM est localement $(g, g'(x))$. Donc un point localement dans $p^{-1}(U)$ est $(g(x'), g'(x')v)$. Le difféo trivial $\varphi = \text{Id}$ convient.

- c) On dit qu'un fibré vectoriel est trivialisable quand on peut choisir $U = B$. Montrer qu'un fibré est trivialisable si et seulement s'il existe n sections globales linéairement indépendantes, de classe C^k , où n est la dimension de B .

On travaille avec des objets C^k , $k \geq 1$. On suppose que $p : E \rightarrow B$ est trivialisable, c'est-à-dire qu'il existe $\phi : E \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$ un C^k -difféomorphisme tel que

- $\pi_2 \circ \phi$ est un isomorphisme sur chaque fibre $E_x = p^{-1}(x)$, où π_2 est la projection sur la deuxième composante $\pi_2 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,
- $\pi_1 \circ \phi = p$, où π_1 est la projection sur la première composante : $\pi_1 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$.

Soit (e_i) une base de $\mathbb{R}^n$. Vérifions que $x \rightarrow \phi^{-1}(x, e_i)$ est une famille de sections C^k qui sont linéairement indépendantes en tout point x . Par propriété de ϕ , on a bien $p \circ \phi^{-1}(x, e_i) = x$, c'est-à-dire que $\phi^{-1}(x, e_i) \in E_x$ pour tout x . Il suffit donc de vérifier l'indépendance : on se donne une famille de réels (α_i) et on suppose que

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \phi^{-1}(x, e_i) = 0_{E_x}.$$

Alors, par linéarité de $\pi_2 \circ \phi$ dans la fibre E_x ,

$$\pi_2 \circ \phi \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \phi^{-1}(x, e_i) \right) = \sum_i \alpha_i e_i = \pi_2 \circ \phi(0_{E_x}).$$

Comme $\pi_2 \circ \phi$ est injective, $\pi_2 \circ \phi(0_{E_x}) = 0_{\mathbb{R}^n}$, et donc $\alpha_i \equiv 0$.

Réciproquement, soit (s_i) une famille de n sections C^k et indépendantes en tout point. Soit $y \in E$. Alors $y \in E_{p(y)}$, et y se décompose donc dans la base $(s_i(p(y)))$:

$$y = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(y) s_i(p(y)).$$

On pose

$$\phi : y \in E \rightarrow (p(y), (\lambda_i(y))_{1 \leq i \leq n}) \in B \times \mathbb{R}^n.$$

Alors ϕ est bijective, puisque l'application réciproque est

$$\phi^{-1} : (x, (\mu_i)) \rightarrow \sum_i \mu_i s_i(x).$$

Comme ϕ^{-1} est C^k , il ne reste plus qu'à vérifier la régularité de ϕ , c'est-à-dire la régularité des applications $y \rightarrow \lambda_i(y)$. Cela prouvera que ϕ est un C^k difféomorphisme, et par ailleurs le fait que $\pi_2 \circ \phi$ soit un isomorphisme est clair (décomposition d'un vecteur dans une base).

Un point x dans la base étant donné, soit ϕ_U une trivialisatation locale $\phi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert autour de x dans B . Soit $y \in p^{-1}(U)$. L'image de $s_i(p(y))$ par ϕ_U est $(p(y), \sigma_{ij}(p(y)))$. Soit Σ la matrice $(\sigma_{ij}(p(y)))$. C'est une matrice inversible, car l'image de la famille libre $s_i(p(y))$ par $\pi_2 \circ \phi_U$ est une famille libre. On a donc

$$\pi_2 \circ \phi_U(y) = \pi_2 \circ \phi_U \left(\sum_i \lambda_i(y) s_i(p(y)) \right) = \sum_{i,j} \lambda_i(y) \sigma_{ij}(p(y)) = \Lambda^t \Sigma$$

en notant Λ le vecteur ligne des $\lambda_i(y)$. Finalement en notant $Y = \pi_2 \circ \phi_U(y)$, il apparaît que $\Lambda = Y^t \Sigma^{-1}$, et donc $y \rightarrow \Lambda(y)$ est C^k , puisque $y \rightarrow Y$ est C^k , $y \rightarrow \Sigma(y)$ est C^k et l'inversion est C^∞ .

d) Montrer que le fibré tangent à $\mathbb{S}^1$ est trivialisable.

Une section globale partout non nulle est $x \in \mathbb{S}^1 \rightarrow x^\perp \in T_x \mathbb{S}^1$, en notant $x^\perp$ un vecteur unitaire orthogonal à x .

3.7. On dit que $f : M \rightarrow N$ est une immersion en $x_0 \in M$ quand $T_{x_0} f : T_{x_0} M \rightarrow T_{f(x_0)} N$ est une immersion. Vérifier que cela revient à dire que f lue dans les cartes est une immersion.

L'application $T_x f : \bar{\gamma} \rightarrow \overline{f \circ \gamma}$ est injective. On cherche à prouver que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une immersion. Soit donc v_1 et v_2 tels que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))v_1 = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))v_2$. Soit γ_1 et γ_2 deux courbes tracées sur M , telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$, et $(\varphi \circ \gamma_j)'(0) = v_j$. Calculons $\overline{f \circ \gamma_1}$: on a $f \circ \gamma_1(0) = f(x)$, et

$$(\psi \circ f \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))v_1.$$

De même pour v_2 . Donc $\overline{f \circ \gamma_1} = \overline{f \circ \gamma_2}$, si bien que $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2$, et donc $v_1 = v_2$.

3.8. Un plongement de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^6$.

a) Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}xy) \in \mathbb{R}^6$. Montrer que $f(\mathbb{S}^2)$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^6$.

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}^2$ tel que $x_0 > 0$. On a alors un paramétrage local $g : (y, z) \rightarrow (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$ de $\mathbb{S}^2$ au voisinage de (x_0, y_0, z_0) . Donc $f(\mathbb{S}^2)$ admet pour paramétrage local

$$G : (y, z) \rightarrow (1 - y^2 - z^2, y^2, z^2, 2^{1/2}yz, 2^{1/2}z\sqrt{1 - y^2 - z^2}, 2^{1/2}y\sqrt{1 - y^2 - z^2})$$

au voisinage de $f(x_0, y_0, z_0)$, c'est-à-dire

$$G(y, z) = f \circ g(y, z).$$

Il s'agit de vérifier que G est une immersion et un homéomorphisme local. La vérification du fait que G est une immersion est un simple calcul.

L'application $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow f(\mathbb{S}^2)$ est localement injective : si $f(x, y, z) = f(x', y', z')$ avec $x > 0$ et $x' > 0$, alors si $y = z = 0$, on a $x = x'$, et sinon par exemple $y \neq 0$, et alors en comparant les premières et dernières coordonnées $x = x'$ et $y = y'$ et donc $z = z'$.

Donc G est localement injective. C'est donc localement un homéomorphisme sur son image (application injective, donc bijective sur son image, continue, définie sur un espace localement compact – cf question e).

Remarquons que $f(-x, -y, -z) = f(x, y, z)$, donc f n'est pas globalement injective.

b) Montrer que f se factorise en une application $\underline{f} : P^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^6$.

Il s'agit de vérifier que $f(-x, -y, z) = f(x, y, z)$, cf définition de f .

c) Montrer que $\underline{f}$ est injective.

Soit $f(x, y, z) = f(x', y', z')$, pour deux points sur la sphère. Alors $(x, y, z) = \pm(x', y', z')$.

d) Montrer que $\underline{f}$ est une immersion.

Il suffit de vérifier que $\underline{f}$ lue dans les cartes est une immersion, cf exercice 3.7 plus haut. Ici $\underline{f} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$, et donc une carte en $z \in \mathbb{P}^2$ a la forme $\varphi \circ (\pi|_U)^{-1}$, où φ est une carte de $\mathbb{S}^2$ et π le revêtement $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. On cherche à vérifier que $\underline{f} \circ (\varphi \circ (\pi|_U)^{-1})^{-1}$ est une immersion. Cette application est

$$\underline{f} \circ \pi|_U \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi^{-1}$$

qui est une immersion car f est une immersion en tout point de la sphère.

e) Montrer qu'une immersion injective d'une variété compacte vers une variété est un plongement (c'est-à-dire une immersion qui est un homéomorphisme sur son image).

Une application continue bijective définie sur un compact est un homéo. En effet, l'image continue d'un compact est compact, et un fermé d'un compact est compact. Donc l'application est fermée : l'image d'un fermé est l'image d'un compact donc fermée. Donc l'image réciproque d'un fermé par la réciproque est fermée : la réciproque est continue.

3.9. Montrer que si $f : M \rightarrow N$ est un plongement, alors $Tf : TM \rightarrow TN$ est un plongement.

Il suffit de vérifier les propriétés (immersion, homéomorphisme sur son image) pour Tf lue dans les cartes (cf exercice 3.7), c'est-à-dire pour (avec les notations du cours)

$$\widetilde{Tf} = \tilde{\psi} \circ Tf \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}, (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})').$$

Soit donc (x, v) et (y, w) tels que $\widetilde{Tf}(x, v) = \widetilde{Tf}(y, w)$. Par injectivité de la première composante de $\widetilde{Tf}$, on a donc $x = y$. Par injectivité de la deuxième composante évaluée en x , on a alors $v = w$. Donc $\widetilde{Tf}$ est une bijection sur son image. Elle est bicontinue (f est un homéomorphisme qu'on suppose bien sûr au moins C^2).

La différentielle $(\widetilde{Tf})'(x, v)$ en un point (x, v) est l'application linéaire $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow (w'_1, w'_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$:

$$(w_1, w_2) \longrightarrow (w'_1, w'_2) = \begin{pmatrix} (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(x) & 0 \\ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})''(x)(v, \cdot) & (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice ci-dessus est de rang $2m$ car $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(x)$ est bijective.

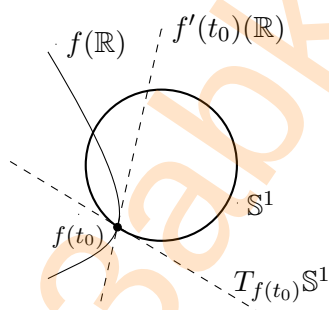
3.10. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On note $\psi : M \rightarrow T_x M$ la projection orthogonale sur $T_x M$. Calculer $T_x \psi$.

Ici x est fixé sur M . On utilise l'exercice 3.5 : soit h tel que M soit localement le graphe de h au-dessus (orthogonalement) de $T_x M$. On a donc $U = \{(x', h(x')), x' \in V'\}$, avec U un voisinage de x dans M , et $\pi(x', h(x')) = x'$, avec π projection orthogonale sur $T_x M$, qui coïncide avec ψ sur M . Soit γ une courbe tracée sur M , telle que $\gamma(0) = x$, et $\gamma'(0) = v \in T_x M$. On cherche à calculer $(\psi \circ \gamma)'(0)$. Comme γ est tracée sur M , on a $\gamma(t) = (\gamma_0(t), h(\gamma_0(t)))$, et donc $\gamma_0(0) = x$, et aussi $(h \circ \gamma_0)'(0) = 0$, puisque $v \in T_x M$. Donc $\psi \circ \gamma_0 \equiv \pi \circ \gamma_0 \equiv (\gamma_0, 0) \in \mathbb{R}^n$ satisfait $(\pi \circ \gamma_0)'(0) = (v, 0) = v$ (dans l'identification $T_x M \oplus_{\perp} F = T_x M \times F = \mathbb{R}^n$) si bien que $T_x \psi = \text{Id}$.

3.11. Soit $f : M_1 \rightarrow M_2$, et N une sous-variété de M_2 . On suppose que f est transverse à N , au sens où, pour tout $x \in M_1$ tel que $f(x) \in N$, on ait

$$(4.10) \quad T_x f(T_x M_1) + T_{f(x)} N = T_{f(x)} M_2.$$

Montrer que $f^{-1}(N)$ est une sous-variété de M_1 , et calculer sa dimension.



Dans le dessin ci-contre, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un plongement. En particulier, $f(\mathbb{R}^2)$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, et, d'après le paragraphe au-dessus de l'exemple 2.36, on a l'égalité $f'(t_0)(\mathbb{R}) = T_{f(t_0)} f(\mathbb{R})$. L'hypothèse de transversalité (4.10) est satisfaite, avec $N = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. L'image réciproque $f^{-1}(\mathbb{S}^1)$ est un ensemble de deux points, donc une sous-variété (triviale, de dimension 0).

On veut prouver une propriété locale, donc il suffit de travailler dans des cartes, si bien qu'on peut supposer $M_1 = \mathbb{R}^{m_1}$, $M_2 = \mathbb{R}^{m_2}$, et $N = \mathbb{R}^n \times \{0\}$, avec $n \leq m_2$. L'hypothèse devient

$$(4.11) \quad T_x f(\mathbb{R}^{m_1}) + \mathbb{R}^n \times \{0\} = \mathbb{R}^{m_2}.$$

Il s'agit de prouver que $f^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m_1}$. On note π la projection dans $\mathbb{R}^{m_2}$ sur $\{0\} \times \mathbb{R}^{m_2-n}$ (donc parallèlement à N). Alors $\pi^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ et $f^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = (\pi \circ f)^{-1}(0)$. En appliquant π à l'égalité (4.11) on trouve $\pi \circ f'(x)(\mathbb{R}^{m_1}) = \{0\} \times \mathbb{R}^{m_2-n}$. Donc $\pi \circ f$ est une submersion $\mathbb{R}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2-n}$, si bien que $(\pi \circ f)^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m_1}$.

Quelle est la dimension de $f^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$? Le fait que $\pi \circ f : \mathbb{R}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2-n}$ soit une submersion nous dit que $m_2 - n \leq m_1$. On peut écrire $\mathbb{R}^{m_2-n} = \mathbb{R}^{m_1-(m_1-m_2+n)}$, et le Théorème 4 du cours nous dit que la dimension de $f^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$ est $m_1 - m_2 + n$.

Écrivons maintenant les détails de la réduction au cas d'espaces vectoriels. Soit $x \in f^{-1}(N)$, et

- (U, φ) une carte de M_1 en x , avec $\varphi(U)$ ouvert de $\mathbb{R}^{m_1}$,
- (V, ψ) une carte de M_2 en $f(x)$, telle que $\psi(V \cap N) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, avec $\psi(V)$ ouvert de $\mathbb{R}^{m_2}$.

Il existe une telle carte sur M_2 d'après le cours (cf paragraphe qui suit la définition de sous-variété, paragraphe 4.1, chapitre 2).

Il s'agit de traduire l'hypothèse de transversalité (4.10) dans les cartes. Par dérivation des fonctions composées (Proposition 36 du cours, chapitre 2), on a

$$T_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(U)) = T_{f(x)}\psi(T_x f(T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi(U)))).$$

Comme $\varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{m_1}$, l'espace tangent $T_{\varphi^{-1}(x)}U$ est identifié à $\mathbb{R}^{m_1}$. Et comme φ^{-1} est un difféo de $\varphi(U)$ vers $U \subset M_1$, on a

$$T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi(U)) = T_x M_1.$$

Donc

$$T_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(U)) = T_{f(x)}\psi(T_x f(T_x M_1)).$$

Par ailleurs, de $\psi(V \cap N) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, et du fait que ψ est un difféo, on déduit

$$T_{f(x)}\psi(V \cap N) = \mathbb{R}^n \times \{0\}.$$

Comme par ailleurs V est un ouvert de carte de M_2 , l'image $\psi(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{m_2}$, et

$$T_{f(x)}\psi(T_{f(x)}(V \cap N)) = \mathbb{R}^{m_2}.$$

En appliquant l'isomorphisme $T_{f(x)}\psi$ aux deux membres de (4.10), on a

$$T_{f(x)}\psi(T_x f(T_x M_1) + T_{f(x)}N) = T_{f(x)}\psi(T_{f(x)}M_2).$$

Pour toute variété Q , tout $y \in Q$ et tout ouvert W de Q contenant y , on a bien sûr

$$T_y Q = T_y(V \cap Q).$$

Donc d'après ce qui précède

$$T_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(U)) + \mathbb{R}^n \times \{0\} = \mathbb{R}^{m_2},$$

avec $\varphi(U)$ ouvert de $\mathbb{R}^{m_1}$. Cela correspond bien à (4.11) pour l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, qu'on a appelé " f lue dans les cartes".

Par le raisonnement ci-dessus, on a donc prouvé que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m_1}$, de dimension $m_1 - m_2 + n$. Pour tout écrire en détail, il s'agit maintenant de remonter cette information via les cartes pour la traduire en " $f^{-1}(N)$ sous-variété de M_1 ", qui est ce qu'on veut prouver.

On peut revenir à la première étape du raisonnement et changer $N = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ en $N = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Cela prouve que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\psi(V) \cap \mathbb{R}^n \times \{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m_1}$. Il n'y a plus qu'à expliciter cet ensemble :

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\psi(V) \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}) = (\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1})(\psi(V) \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Mais $\psi(V) \cap \mathbb{R}^n \times \{0\} = \psi(V \cap N)$. Donc on sait que $\varphi \circ f^{-1}(V \cap N)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m_1}$. Mais φ^{-1} est un difféomorphisme local, donc un plongement, donc $\varphi^{-1}(\varphi \circ f^{-1}(V \cap N))$

est une sous-variété de M_1 . Donc $f^{-1}(V \cap N)$ est une sous-variété de M_1 . Comme V est un ouvert arbitraire de M_2 qui intersecte N , on a donc prouvé que $f^{-1}(N)$ est une sous-variété de M_1 .

Comparer les paragraphes qui suivent “Ecrivons maintenant les détails...” à la preuve du Théorème 37 du cours (TIL pour une application entre deux variétés) : il ne se passe absolument rien. On ne fait qu’introduire des cartes locales et les notations deviennent lourdes. Le coeur de l’argument est le paragraphe qui suit (4.11).

3.12. Soit M, N deux variétés et $f : M \rightarrow N$. On suppose que f est de rang constant dans un voisinage de $f^{-1}(\{y\})$, avec $y \in f(M)$.

a) Montrer que $f^{-1}(\{y\})$ est une sous-variété de M et calculer sa dimension.

Le résultat à prouver est local et on travaille donc dans des cartes, c’est-à-dire qu’on suppose $M = \mathbb{R}^m$ et $N = \mathbb{R}^n$. Par le théorème de forme normale des applications de rang constant (cf cours chapitre 1), on peut écrire

$$\psi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

avec ψ et φ des difféomorphismes, autrement dit

$$(4.12) \quad f = \psi^{-1} \circ \pi \circ \varphi^{-1},$$

avec π la projection $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Cela vaut dans un voisinage d’un point x de $f^{-1}(\{y\})$. D’après (4.12), f est localement une submersion sur son image, incluse dans $\psi^{-1}(\mathbb{R}^r \times \{0\})$, qui est difféomorphe à $\mathbb{R}^r$. On pose $\tilde{f} = f - f(y)$. Alors dans un voisinage de x , on a $f^{-1}(\{y\}) = \tilde{f}^{-1}(\{0\})$, et $\tilde{f}$ est une submersion comme f . Donc par le critère de submersion, $f^{-1}(\{y\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension $m - r$.

b) Montrer que $T_x(f^{-1}(\{y\})) = \ker T_x f$.

On a vu que $f^{-1}(\{y\})$ est décrit localement par la submersion $\psi^{-1} \circ \pi \circ \varphi^{-1}$. Donc son espace tangent en x est le noyau de la submersion (cf cours, paragraphe 3.1). Par (4.12), c’est $\ker T_x f$.

c) On suppose que f est une submersion (au voisinage de tout point). Soit S une sous-variété de N . Montrer que $f^{-1}(S)$ est une sous-variété de M et calculer sa dimension.

On se ramène par cartes locales au cas $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$, $n \leq m$, et $S = \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. On se demande donc si $f^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$. On note π la projection $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Alors $f^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = (\pi \circ f)^{-1}(\{0\})$, et $\pi \circ f$ est une submersion comme f .

On pourrait aussi utiliser directement l’exercice 4.10 : l’hypothèse f submersion implique directement que f est transverse à toute sous-variété à l’arrivée.

3.13. Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. On lui associe le Hamiltonien $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$H(x, y) = \frac{1}{2}|y|^2 + V(x)$$

- (a) Montrer que c est une valeur régulière de H si et seulement si c est une valeur régulière de V .

On appelle valeur régulière d'une application $f : M \rightarrow N$ tout y tel que $f^{-1}(\{y\})$ est composé entièrement de points x tels que f soit une submersion en x (en particulier, si $f^{-1}(\{y\})$ est vide alors y est une valeur régulière).

On calcule $H'(x, y) = (\langle y, \cdot \rangle \quad V'(x))$. Donc si c est une valeur régulière de V , et si $V(x) = c$, alors étant donné $(x', y') \in H^{-1}(\{c\})$, si y' est non nul alors $H'(x', y')$ est non nulle donc surjective, et si $y' = 0$, alors $H(x', 0) = V(x') = c$, et donc $V'(x')$ est non nulle par hypothèse, donc $H'(x', y')$ est non nulle. Si c n'est pas une valeur régulière de V , alors on peut trouver x tel que $V'(x) = 0$, et on remarque que $H(x, 0) = V(x) = c$, et que $H'(x, 0) = 0$. Donc c n'est pas une valeur régulière de H .

- (b) Soit c une valeur régulière de H , et $M = H^{-1}(\{c\})$. Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, et que

$$T_{(x,y)}M = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; \langle y, \eta \rangle + \langle \nabla V(x), \xi \rangle = 0\}$$

(où $\langle x, y \rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$)

Il suffit d'utiliser le résultat des questions (a) et (b) de l'exercice 3.12 : comme c est une valeur régulière de H , l'ensemble $H^{-1}(\{c\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, et pour $(x, y) \in H^{-1}(\{c\})$, on a $T_{(x,y)}H^{-1}(\{c\}) = \ker H'(x, y)$, et par la question ci-dessus, $\ker H'(x, y)$ est l'ensemble donné dans l'énoncé.

- (c) On suppose que V est propre, c'est-à-dire que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$. Montrer que les solutions maximales de

$$y'' + \nabla V(y) = 0.$$

sont globales.

Pour y dérivable, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on pose $Y = (y, y') \in \mathbb{R}^{2n}$. Alors si Y est solution de

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla H(Y),$$

avec

$$H(y_1, y_2) = \frac{1}{2}|y_2|^2 + V(y_1).$$

C'est un système Hamiltonien, dont les solutions $Y = (y_1, y_2)$ satisfont

$$(4.13) \quad \frac{d}{dt} H(y_1(t), y_2(t)) \equiv 0.$$

En effet,

$$H'(y(t), y'(t))Y'(t) = H'(y, y')J\nabla H(y, y'),$$

et pour tout vecteur X on a

$${}^tXJX = 0.$$

Comme V est propre, les lignes de niveau $H^{-1}(\{c\})$ sont compactes. D'après (4.13), une trajectoire $t \rightarrow (y(t), y'(t))$ est contenu dans une ligne de niveau. Par un Corollaire de la proposition de sortie des compacts (chapitre 1 du cours), cela implique que les solutions maximales sont globales.

3.14. Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{S}^1$ sont difféomorphes. Montrer que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ sont difféomorphes.

On pose $f : t \in \mathbb{R} \rightarrow (\cos(\pi t), \sin(\pi t)) \in \mathbb{R}^2$. L'application f passe au quotient en une application $\tilde{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$, puisque $f(t+k) = f(t)$, pour tous $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. L'image $\tilde{f}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est égale à $f(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$.

Vérifions que $\tilde{f}$ est un plongement.

Injectivité : si $\tilde{f}(\dot{x}) = \tilde{f}(\dot{y})$, alors $f(x+k) = f(y+k')$, et donc

$$(-1)^k \cos(\pi x) = (-1)^{k'} \cos(\pi y), \quad (-1)^k \sin(\pi x) = (-1)^{k'} \sin(\pi y).$$

Donc $x = y + k' - k$, et donc $\dot{x} = \dot{y}$.

Régularité : via l'exercice (2.21), la régularité de $\tilde{f}$ découle de celle de f .

Immersion : comme la projection est un difféomorphisme local, il suffit de vérifier que f est une immersion. Cela découle de

$$f'(t) = (-\pi \sin(\pi t), \pi \cos(\pi t)) \neq 0, \quad \text{pour tout } t.$$

Comme $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{S}^1$ ont même dimension, on en déduit que f' est un isomorphisme. Donc l'application tangent à $\tilde{f}$ est un isomorphisme en tout point. Via le théorème d'inversion locale (version variétés, Théorème 37 du chapitre 2 du cours, qui se prouve simplement en appliquant le TIL à l'application lue dans les cartes) on en déduit que $\tilde{f}$ est un difféomorphisme local au voisinage de tout point. Comme $\tilde{f}$ est bijective sur son image $\mathbb{S}^1$, c'est donc un plongement. Donc $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$.

On pourrait aussi considérer $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, le quotient obtenu par l'action de $2\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translation, et considérer $g : t \in \mathbb{R} \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$, qui passe au quotient en une application $\tilde{g}$. On prouve comme plus haut que $\tilde{g}$ est un plongement.

3.15. *Plongement de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^3$. L'exercice 2.9 montre que*
 (a) *le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$.*

(b) L'image $g(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ de g définie par $g(\varphi, \theta) = ((2+\cos \varphi) \cos \theta, (2+\cos \varphi) \sin \theta, \sin \varphi)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, d'équation

$$(2 - (x^2 + y^2)^{1/2})^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Montrer que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et $g(\mathbb{R}^2)$ sont difféomorphes.

Via l'exercice 3.14, on identifie $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$. L'application g passe au quotient en une application $\tilde{g}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & & \\ \pi \downarrow & \searrow g & \\ \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2 & \xrightarrow{\tilde{g}} & g(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3 \end{array}$$

En effet, en posant $\tilde{g}(\dot{x}, \dot{y}) = g(x, y)$ on a bien défini une application $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ dans $\mathbb{R}^3$, puisque $g(x + 2\pi k, y + 2\pi k') = g(x, y)$ pour tous k, k' .

Vérifions que $\tilde{g}$ est un plongement de $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ sur $g(\mathbb{R}^2)$.

Injectivité : si $\tilde{g}(\dot{x}, \dot{y}) = \tilde{g}(\dot{x}', \dot{y}')$, alors

$$g(x + 2\pi k_1, y + 2\pi k_2) = g(x' + 2\pi k'_1, y' + 2\pi k'_2).$$

On en déduit $x + 2\pi k_0 = x'$ et $y + 2\pi k'_0 = y'$, par définition de g .

Régularité : découle de la régularité de g , cf exercice 3.14 plus haut.

Immersion : Calcul portant sur g , puisque la projection est un difféomorphisme local.

CHAPITRE 5

Examens

1. Mars 2015

1.1. Soit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x+1)^2 + 2y^2 = 1\}$.

- Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
 - Définir un atlas de M .
 - Montrer que l'intersection de M avec $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
-

1.2. On prouve dans cet exercice que si M est une variété connexe, alors $\text{Diff}(M)$ agit transitivement sur M .

- Donner un exemple de sous-variété connexe de $\mathbb{R}^n$. Donner un exemple de sous-variété non connexe de $\mathbb{R}^n$. (Deux dessins et deux lignes d'explication suffisent.)

On dit qu'une action d'un groupe G sur un ensemble M est transitive quand pour tout $x, y \in M$, on peut trouver $g \in G$ tel que $y = g(x)$.

- Donner un exemple d'action non transitive d'un groupe non trivial.
- Première partie : dans $\mathbb{R}^m$. On note $|\cdot|$ la norme euclidienne.

3a) Soit $\varepsilon > 0$, qu'on choisira plus tard assez petit, et $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $|y| = \varepsilon$. Montrer qu'il existe une isométrie de $\mathbb{R}^m$, qu'on notera R , telle que $y = R(\varepsilon, 0, \dots, 0)$.

3b) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , identiquement égale à 1 dans un voisinage de zéro, identiquement nulle à l'extérieur de $[-1, 1]$, et prenant ses valeurs dans $[0, 1]$.

On note $\psi : x \in \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi(|x|^2) \in \mathbb{R}$. Calculer $\psi'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$.

3c) Montrer que si ε est assez petit, alors l'application $f_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$f_0(x) = (x_1 + \varepsilon \varphi(|x|^2), x_2, \dots, x_m)$$

est un C^∞ -difféomorphisme local au voisinage de tout point $x \in \mathbb{R}^m$.

3d) Montrer que si ε est assez petit, alors f_0 est injective.

3e) Montrer que si ε est assez petit, alors f_0 est un C^∞ -difféomorphisme $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

3f) Dédire des questions précédentes le fait que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, pour tout $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $|y| = \varepsilon$, on peut trouver un C^∞ -difféomorphisme f tel que $f(0) = y$ et $f \equiv \text{Id}$ à l'extérieur de la boule $B(0, 1)$.

- 4) Deuxième partie : étude locale sur une variété M de classe C^∞ et de dimension m . Cette question utilise le résultat de la question 3f.

- 4a) Soit $x \in M$. Montrer qu'il existe U un ouvert de M contenant x et un homéomorphisme $g : U \rightarrow g(U) \subset \mathbb{R}^m$ tel que $g(U)$ est ouvert, $g(x) = 0$, et $\bar{B}(0, 1) \subset g(U)$.
 4b) Montrer que si on ajoute (U, g) à l'atlas de M , on n'a pas changé la structure de variété de M .
 4c) On pose

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1} \circ f \circ g(x), & x \in U, \\ x, & x \in M \setminus g^{-1}(\bar{B}(0, 1)), \end{cases}$$

où f est le difféomorphisme de la question 3. Montrer que h est bien définie $M \rightarrow M$.

- 4d) Montrer que h est bijective $M \rightarrow M$.
 4e) Montrer que h est C^∞ .
 4f) En déduire que pour tout $x \in M$, on peut trouver un voisinage V de x dans M , tel que pour tout $y \in M$, il existe un C^∞ -difféomorphisme h tel que $h(x) = y$ et $h = \text{Id}$ dans $M \setminus V$.
 5) Troisième partie : étude globale dans M . Cette partie utilise le résultat de la question 4e.
 5a) Expliquer comment utiliser le caractère connexe de M pour prouver le résultat énoncé au début de cet exercice.

1.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et une application continue $x \in \Omega \rightarrow M(x) \in \mathbb{C}^{N \times N}$, l'ensemble des matrices carrées de taille N à coefficients complexes. On note $\mathcal{S}$ le spectre de la famille M , défini par

$$\mathcal{S} = \{(x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{C}, \det(\lambda \text{Id} - M(x)) = 0\}.$$

On appelle multiplicité d'une valeur propre de $M(x)$ sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de $M(x)$.

- a) Donner un exemple de familles de valeurs propres $\lambda(x)$ d'une famille de matrices $M(x)$ dont la multiplicité n'est pas une fonction constante de x .
 b) Décrire le spectre $\mathcal{S}$ pour la famille $x \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
 d) On suppose que $x \rightarrow M(x)$ est une application C^1 . Soit $(x_0, \lambda_0) \in \mathcal{S}$. On suppose que λ_0 est de multiplicité égale à 1. Montrer l'existence d'une application $\lambda \in C^1$, définie au voisinage de x_0 , et telle que $(x, \lambda(x)) \in \mathcal{S}$ pour tout x proche de x_0 . Décrire $\mathcal{S}$ dans un voisinage de (x_0, λ_0) .
 e) On suppose que toutes les valeurs propres de $M(x_0)$ sont de multiplicité égale à 1. Montrer qu'il existe un voisinage U de x_0 dans Ω tel que $\mathcal{S} \cap (U \times \mathbb{C})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$.

- f) Sous l'hypothèse de la question e), montrer que la projection $p : \mathcal{S} \rightarrow \Omega$ qui à (x, λ) associe x est un revêtement.
- g) Donner un exemple de matrice pour laquelle la projection n'est pas un homéomorphisme local au voisinage d'un point (x_0, λ_0) .
- On dit qu'un point de $\mathcal{S}$ est un point de croisement dans le spectre quand p n'est pas un homéomorphisme local au voisinage de ce point.*
- h) Donner un exemple de famille C^∞ de matrices pour laquelle l'ensemble des points de croisement a un point d'accumulation.
- i) Que dire de la régularité des valeurs propres au voisinage d'un point de croisement ?

2. Mars 2015 : correction de l'exercice 1.2

On prouve dans cet exercice que si M est une variété connexe, alors $\text{Diff}(M)$ agit transitivement sur M .

On dit qu'une action d'un groupe G sur un ensemble M est transitive quand pour tout $x, y \in M$, on peut trouver $g \in G$ tel que $y = g(x)$.

- 2) Donner un exemple d'action non transitive d'un groupe non trivial.

Soit $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n , et H le sous-groupe engendré par la transposition τ_{12} . Alors $H = \{\text{Id}, \tau_{12}\}$. Le sous-groupe H agit sur $\mathcal{S}_n$ par composition à gauche. L'action est non transitive : étant données deux permutations σ_1 et σ_2 distinctes, si leur signature est égale, on n'aura pas $\sigma_1 = \tau_{12} \circ \sigma_2$.

Un autre exemple : l'action des rotations dans $\mathbb{R}^n$. C'est bien une action de groupe. Si x, y sont donnés dans $\mathbb{R}^n$, ils appartiennent à la même orbite seulement si $|x| = |y|$.

- 3) Première partie : dans $\mathbb{R}^m$. On note $|\cdot|$ la norme euclidienne.

3a) Soit $\varepsilon > 0$, qu'on choisira plus tard assez petit, et $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $|y| = \varepsilon$. Montrer qu'il existe une isométrie de $\mathbb{R}^m$, qu'on notera R , tel que $y = R(\varepsilon, 0, \dots, 0)$.

Les vecteurs $(\varepsilon, 0, \dots, 0)$ et y appartiennent à la sphère de rayon ε et de centre 0. Il existe une rotation R telle que $y = R(\varepsilon, 0, \dots, 0)$. Cette rotation est une isométrie.

Pour prouver l'existence de la rotation R , on peut compléter le vecteur unitaire $y/|y|$ en une base orthonormée. Le changement de base de la base canonique à cette base orthonormée est une matrice orthogonale, qui convient.

- 3b) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , identiquement égale à 1 dans un voisinage de zéro, identiquement nulle à l'extérieur de $[-1, 1]$, et prenant ses valeurs dans $[0, 1]$.

On note $\psi : x \in \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi(|x|^2) \in \mathbb{R}$. Calculer $\psi'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$.

L'application $\psi : x \rightarrow \varphi(|x|^2)$ est une application $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Sa différentielle en un point x est une application de $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, c'est la matrice ligne

$$\psi'(x) = \varphi'(|x|^2) \begin{pmatrix} 2x_1 & \cdots & 2x_m \end{pmatrix}.$$

3c) Montrer que si ε est assez petit, alors l'application $f_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$f_0(x) = (x_1 + \varepsilon\varphi(|x|^2), x_2, \dots, x_m)$$

est un C^∞ -difféomorphisme local au voisinage de tout point $x \in \mathbb{R}^m$.

On calcule

$$f'_0(x) = \begin{pmatrix} 1 + 2\varepsilon x_1 \varphi'(|x|^2) & \star \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}.$$

L'application φ' est C^∞ et nulle à l'extérieur de $[-1, 1]$. Donc elle est majorée : $|\varphi'(y)| \leq C$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, pour un certain $C > 0$. Si $|x|^2 \geq 1$, alors $1 + 2\varepsilon x_1 \varphi'(|x|^2) = 1$. Si $|x|^2 \leq 1$, alors $|x_1| \leq 1$, donc

$$1 + 2\varepsilon x_1 \varphi'(|x|^2) \geq 1 - 2\varepsilon C.$$

On choisit $\varepsilon \leq 1/(3C)$. Alors la matrice $f'_0(x)$ est inversible pour tout x (car elle est triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux non nuls). Par le TIL, f_0 est donc un difféomorphisme local au voisinage de tout point $x \in \mathbb{R}^m$.

3d) Montrer que si ε est assez petit, alors f_0 est injective.

Si $f_0(x) = f_0(y)$, alors $x_i = y_i$ pour $i \geq 2$, et

$$(5.1) \quad x_1 - y_1 = \varepsilon(\varphi(|x|^2) - \varphi(|y|^2)).$$

On a vu que φ est Lipschitzienne. Soit C une constante de Lipschitz pour φ . On a donc

$$|x_1 - y_1| \leq C\varepsilon||x|^2 - |y|^2|.$$

Comme $x_i = y_i$ pour $i \geq 2$, $|x|^2 - |y|^2 = x_1^2 - y_1^2$. Donc $|x_1 - y_1| \leq C\varepsilon|x_1^2 - y_1^2|$. Si $|x_1| \geq 2$, alors par (5.1), $|y_1| \geq 2 - 2\varepsilon \geq 1$, si $\varepsilon < 1/3$, et alors $f_0(x) = x$, $f_0(y) = y$ et on a fini. Donc on peut supposer $|x_1| \leq 2$, et alors $|y_1| \leq 2 + 2\varepsilon$. Donc de $|x_1 - y_1| \leq C\varepsilon|x_1^2 - y_1^2|$ on déduit

$$|x_1 - y_1| \leq C\varepsilon(|x_1| + |y_1|)|x_1 - y_1| \leq C\varepsilon(4 + 2\varepsilon)|x_1 - y_1|,$$

et donc $|x_1 - y_1| \leq (1/2)|x_1 - y_1|$ si ε est assez petit (précisément : tel que $C\varepsilon(4 + 2\varepsilon) \leq 1/2$) ce qui implique $x_1 = y_1$.

3e) Montrer que si ε est assez petit, alors f_0 est un C^∞ -difféomorphisme $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Il n'y a plus qu'à prouver que f_0 est surjective. On prouve par exemple que $f_0(\mathbb{R}^m)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^m$. Le caractère ouvert vient du fait que f_0 est un difféo local au voisinage de tout point, cf cours. Si maintenant $f(x_n)$ converge dans $\mathbb{R}^m$, alors s'il existe une sous-suite (z_n) de (x_n) qui prend ses valeurs à l'extérieur de $B(0, 1)$, alors $f(z_n) = z_n$, donc z_n converge, vers y , mais alors $f(y) = y$. Donc on peut supposer que $|x_n| \leq 1$ à partir d'un certain rang. On peut donc extraire une sous-suite convergente de (x_n) et répéter le même argument.

3f) Dédurre des questions précédentes le fait que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, pour tout $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $|y| = \varepsilon$, on peut trouver un C^∞ -difféomorphisme f tel que $f(0) = y$ et $f \equiv \text{Id}$ à l'extérieur de la boule $B(0, 1)$.

On a trouvé f_0 un C^∞ -difféo global qui satisfait $f_0(0) = (\varepsilon, 0, \dots, 0)$. Par ailleurs, pour y de norme euclidienne ε , on a trouvé une isométrie R telle que $y = R(\varepsilon, 0, \dots, 0)$. Posons

$$f = R \circ f_0 \circ R^{-1}.$$

Alors

- f est un C^∞ -difféomorphisme global, en tant que composée de C^∞ -difféos globaux.
- On a $f(0) = R \circ f_0(0) = R(\varepsilon, 0, \dots, 0) = y$.
- Si $|x| \geq 1$, alors $|R^{-1}(x)| = |x| \geq 1$, donc $f(x) = R \circ f_0(R^{-1}(x)) = R(R^{-1}(x)) = x$.

Remarquons que $R^{-1} \circ f_0 \circ R$ convient tout aussi bien.

4) Deuxième partie : étude locale sur une variété M de classe C^∞ et de dimension m . Cette question utilise le résultat de la question 3f.

4a) Soit $x \in M$. Montrer qu'il existe U un ouvert de M contenant x et un homéomorphisme $g : U \rightarrow g(U) \subset \mathbb{R}^m$ tel que $g(U)$ est ouvert, $g(x) = 0$, et $\bar{B}(0, 1) \subset g(U)$.

Soit (U, g_0) une carte en x . Alors $g_0(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit ψ un difféomorphisme $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, tel que $\psi(g_0(x)) = 0$. Alors $\psi(g_0(U))$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ qui contient 0. Donc $\psi(g_0(U))$ contient une boule ouverte centrée en zéro qu'on note $B(0, r)$, avec $r > 0$. Soit finalement l'homothétie $H : x \rightarrow 2rx$. Alors $H \circ \psi \circ g_0$ est un homéomorphisme de U vers un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et $\bar{B}(0, 1) \subset H \circ \psi \circ g_0(U)$. Donc $g = H \circ \psi \circ g_0$ convient.

4b) Montrer que si on ajoute (U, g) à l'atlas de M , on n'a pas changé la structure de variété de M .

Il s'agit de vérifier que (U, g) est compatible avec les cartes de M . Soit (V, g_1) une carte de M , telle que $U \cap V \neq \emptyset$. Il s'agit de vérifier que $g_1 \circ g^{-1}$ est C^∞ dans $g(U \cap V)$, et que $g \circ g_1^{-1}$ est C^∞ dans $g_1(U \cap V)$. On a

$$g_1 \circ g^{-1} = g_1 \circ g_0^{-1} \circ (H \circ \psi)^{-1},$$

et $g_1 \circ g_0^{-1}$ est lisse par définition d'un atlas. Par ailleurs, $H \circ \psi$ est lisse. Donc $g_1 \circ g^{-1}$ est lisse. Réciproquement,

$$g \circ g_1^{-1} = H \circ \psi \circ g_0 \circ g_1^{-1},$$

et on utilise maintenant $g_0 \circ g_1^{-1}$ lisse, encore par définition d'un atlas.

4c) On pose

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1} \circ f \circ g(x), & x \in U, \\ x, & x \in M \setminus g^{-1}(\bar{B}(0, 1)), \end{cases}$$

où f est le difféomorphisme de la question 3. Montrer que h est bien définie $M \rightarrow M$.

Dans un premier temps, on vérifie que h est bien définie dans U . Si $x \in U$, alors soit $|g(x)| \leq 1$, soit $|g(x)| > 1$. Si $|g(x)| \leq 1$, alors $|f(g(x))| \leq 1$, autrement dit $f(g(x)) \in \bar{B}(0, 1) \subset g(U)$, autrement dit $f(g(x))$ appartient au domaine de g^{-1} , donc $g^{-1}(f(g(x)))$ est bien défini. Si $|g(x)| > 1$, alors $f(g(x)) = g(x)$, et donc $g^{-1}(f(g(x)))$ est encore bien défini.

Il s'agit de vérifier que $h = \text{Id}$ dans $U \cap (M \setminus g^{-1}(\bar{B}(0, 1)))$. Soit $x \in U$ tel que $g(x) \notin \bar{B}(0, 1)$. Alors $f(g(x)) = x$. Donc $h(x) = x$.

4d) Montrer que h est bijective $M \rightarrow M$.

Il suffit de vérifier que h est bijective dans $g^{-1}(B(0, 1))$.

On remarque que $h(g^{-1}(B(0, 1))) = g^{-1}(f(B(0, 1)))$. D'après les propriétés de f définie à la question 3, on a $f(B(0, 1)) = B(0, 1)$. Donc $h(g^{-1}(B(0, 1))) = g^{-1}(B(0, 1))$. Par ailleurs, h est injective comme composée d'applications injectives. Donc h est une bijection de $g^{-1}(B(0, 1))$, et donc une bijection de M .

4e) Montrer que h est C^∞ .

Il suffit de vérifier que h est C^∞ dans U . On veut donc trouver une carte en x et une carte en $h(x)$ telles que h soit lisse dans ces cartes.

Soit $x \in U$. Alors g est une carte en x , par la question 4b. On remarque que si $x \in g^{-1}(B(0, 1))$, alors $h(x) = g^{-1} \circ f(y)$, avec $y \in B(0, 1)$, et $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$, donc $h(x) \in g^{-1}(B(0, 1))$, donc g est une carte en $h(x)$. Si $x \notin g^{-1}(B(0, 1))$, alors $f(g(x)) = g(x)$, donc $h(x) = x$, et g est encore une carte en $h(x)$. (On a en fait déjà vu ce raisonnement à la question 4c.) Donc il suffit de vérifier que

$$g \circ h \circ g^{-1} \text{ est } C^\infty \text{ en } g(x),$$

c'est-à-dire que

$$g \circ g^{-1} \circ f \circ g \circ g^{-1} = f \text{ est } C^\infty \text{ en } g(x),$$

ce qui est vrai car f est C^∞ .

4f) En déduire que pour tout $x \in M$, on peut trouver un voisinage V de x dans M , tel que pour tout $y \in M$, il existe un C^∞ -difféomorphisme h tel que $h(x) = y$.

Soit $x \in M$, et U un ouvert de carte comme à la question 4a. Soit g l'application associée comme à la question 3a. On pose $V = g^{-1}(B(0, \varepsilon))$, avec ε comme à la question 3. Soit $z \in g^{-1}(B(0, \varepsilon))$, et soit $y = g(z) \in B(0, \varepsilon)$. Soit f comme à la question 3, de sorte que $f(0) = y$. Alors l'application h définie à la question 4c satisfait $h(x) = g^{-1} \circ f \circ g(x) = g^{-1} \circ f(0) = g^{-1}(y) = z$, et h est un C^∞ -difféomorphisme de M . Donc ce V et ce h conviennent.

5) Troisième partie : étude globale dans M .

5a) Expliquer comment utiliser le caractère connexe de M et le résultat de la question 4f pour prouver le résultat énoncé au début de cet exercice.

C'est un raisonnement basé sur une utilisation de la connexité qu'on a vu plusieurs fois en TD. On note M' le sous-ensemble de M des points qu'on peut

atteindre à partir de x via des difféomorphismes. On a vu que M' contient tout un voisinage de x . Si maintenant $x_1 \in M'$, alors on peut trouver exactement comme précédemment tout un voisinage de x_1 qu'on peut atteindre par des difféomorphismes. Donc M' est ouvert. Le même raisonnement montre que M' est fermé.

On pourrait aussi dire que

$$x \sim y \iff (\exists h \in \text{Diff}(M), h(x) = y)$$

est une relation d'équivalence dans M . On vient de voir que les classes d'équivalence sont ouvertes. S'il existait plus d'une classe d'équivalence non vide, alors M ne serait pas connexe, car les classes d'équivalence forment une partition de M .

3. Mai 2015

3.1. Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \cos x + y^2 = 1\}$. Décrire A au voisinage de $(\pi/2, 1, 0)$, le plus précisément possible, en se limitant aux outils vus en cours.

3.2. Soit $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'application définie par $f = (f_1, f_2)$, avec :

$$f_1(x, y) = (3 + x + \bar{x})y^2, \quad f_2(x, y) = (x - \bar{x})y.$$

On a noté ci-dessus $\bar{x}$ le nombre complexe conjugué de $x \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

(1) On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, et $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{R}^4$.

Donner l'expression de $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ telle que f soit la restriction de F à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 : f = F|_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}$.

(2) Montrer que f est différentiable.

(3) Soit $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, avec $0 < x_1 < 1$ et $0 < y_1 < 1$. Décrire un paramétrage local de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dans un voisinage de (x_1, x_2, y_1, y_2) .

(4) Montrer que f est une immersion dans un voisinage d'un point (x_1, x_2, y_1, y_2) comme à la question ci-dessus.

(5) Expliquer rapidement (sans calcul) comment procéder pour compléter la vérification du fait que f est une immersion en tout point de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

On admet dans la suite que f est une immersion en tout point de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

(6) Montrer que $f(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ est un espace compact.

(7) Étudier l'égalité $f(x, y) = f(x', y')$.

(8) À partir du résultat de la question précédente, définir un quotient pertinent de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ par un (petit) groupe de difféomorphismes, de sorte que ce quotient soit une sous-variété de $\mathbb{R}^4$ qui soit difféomorphe à $f(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$.

3.3. On définit une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ par $n \cdot (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$.

- (1) Vérifier que $\mathbb{Z}$ agit ainsi librement et proprement par difféomorphismes sur $\mathbb{R}^2$.
On note $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ la variété quotient, et p la projection $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$.
- (2) Montrer que la projection $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x \in \mathbb{R}$ passe au quotient en une application $\pi : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
- (3) Soit $U =]0, 2/3[$ et $V =]1/3, 4/3[$. Montrer que $p(U \times \mathbb{R})$ et $p(V \times \mathbb{R})$ sont ouverts et recouvrent $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$.
- (4) Expliquer en quelques lignes en quoi $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ est différent de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.
- (5) Quel est le fibré tangent à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$?
- (6) Montrer que $\pi : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un fibré vectoriel de dimension 1.
- (7) Montrer que π n'est pas le fibré trivial.

On rappelle la définition donnée à l'exercice 6 du TD3 :

Soit $\pi_0 : M \rightarrow B$ une application continue entre deux variétés M, B . On dit que π_0 est un fibré vectoriel de dimension n quand

- pour tout $b \in B$, la fibre $\pi_0^{-1}(\{b\})$ est un espace vectoriel, et
- pour tout $b \in B$, il existe un ouvert U_0 de B contenant b , un espace vectoriel F de dimension n , et un difféomorphisme $\varphi_0 : \pi_0^{-1}(U_0) \rightarrow U_0 \times F$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p_0^{-1}(U_0) & \xrightarrow{\varphi_0} & U_0 \times F \\ \pi_0 \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & U_0 & \end{array}$$

- avec π_1 la projection sur la première composante $U_0 \times F \rightarrow U_0$,
- et $\pi_2 \circ \varphi_{0|_{\pi_0^{-1}(\{y\})}} : \pi_0^{-1}(\{y\}) \rightarrow F$ est un isomorphisme linéaire de chaque fibre $\pi_0^{-1}(\{y\})$ avec $y \in U_0$ vers l'espace F , où $\pi_2 : U_0 \times F \rightarrow F$ est la deuxième projection.

4. Mai 2015 : correction

4.1. Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \cos x + y^2 = 1\}$. Décrire A au voisinage de $(\pi/2, 1, 0)$, le plus précisément possible, en se limitant aux outils vus en cours.

On peut utiliser le théorème des fonctions implicites ou le critère de submersion pour vérifier que A est une sous-variété. “Le plus précisément possible” se réfère à une description à l'ordre un, c'est-à-dire une description de l'espace tangent à A au point indiqué. Si on passe par le théorème des fonctions implicites, il faut utiliser la description de la différentielle de la fonction implicite. Si on passe par le critère de submersion, il faut utiliser le lien entre espace tangent et noyau de la différentielle de la submersion.

4.2. Soit $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'application définie par $f = (f_1, f_2)$, avec :

$$f_1(x, y) = (3 + x + \bar{x})y^2, \quad f_2(x, y) = (x - \bar{x})y.$$

(1) On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, et $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{R}^4$.

Donner l'expression de $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, de classe C^∞ , telle que f soit la restriction de F à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$: $f = F|_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}$.

On note $x = (\Re x, \Im x) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Alors en notant

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} (3 + 2x_1)(y_1^2 - y_2^2) \\ 2(3 + 2x_1)y_1y_2 \\ 2x_2y_1 \\ 2x_2y_2 \end{pmatrix},$$

on a $f = F|_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}$.

(2) Montrer que f est différentiable.

L'application F est polynômiale donc C^∞ , donc sa restriction f à la sous-variété $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, qui est de classe C^∞ , est aussi C^∞ .

(3) Soit $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, avec $0 < x_1 < 1$ et $0 < y_1 < 1$. Décrire un paramétrage local de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dans un voisinage de (x_1, x_2, y_1, y_2) .

Un paramétrage local de $\mathbb{S}^1$ dans un voisinage de (x_1, x_2) est $x_1 \rightarrow (x_1, \sqrt{1 - x_1^2})$.
Donc un paramétrage local de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dans un voisinage de (x_1, x_2, y_1, y_2) est

$$g : (x_1, y_1) \rightarrow (x_1, \sqrt{1 - x_1^2}, y_1, \sqrt{1 - y_1^2}).$$

(4) Montrer que f est une immersion dans un voisinage d'un point (x_1, x_2, y_1, y_2) comme à la question ci-dessus.

Il suffit de vérifier que $f \circ g$ est une immersion. On calcule :

$$(f \circ g)'(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 2(2y_1^2 - 1) & 4y_1(3 + 2x_1) \\ 2y_1\sqrt{1 - y_1^2} & \frac{-(3 + 2x_1)y_1^2}{\sqrt{1 - y_1^2}} \\ \frac{-2x_1y_1}{\sqrt{1 - x_1^2}} & 2\sqrt{1 - x_1^2} \\ \frac{-2x_1\sqrt{1 - y_1^2}}{\sqrt{1 - x_1^2}} & \frac{2\sqrt{1 - x_1^2}y_1}{\sqrt{1 - y_1^2}} \end{pmatrix}$$

et on remarque que tous les coefficients des deux dernières lignes sont non nuls, et que les deux dernières lignes sont parallèles seulement si

$$2y_1^2 = 1,$$

et donc $y_1 = \sqrt{1/2}$. Si $y_1 = \sqrt{1/2}$, les deux premières lignes ne sont pas parallèles. Donc $(f \circ g)'(x_1, y_1)$ est de rang 2 dès que $0 < x_1 < 1$ et $0 < y_1 < 1$.

- (5) Expliquer rapidement (sans calcul) comment procéder pour compléter la vérification du fait que f est une immersion en tout point de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Au voisinage d'un point (x_1, x_2, y_1, y_2) avec $-1 < x_1 < 0$, on aurait $x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$. Au voisinage d'un point (x_1, x_2, y_1, y_2) avec x_1 proche de 1, on utiliserait un paramétrage par x_2 : on considérerait

$$g(x_2, y_1) = (\sqrt{1 - x_2^2}, x_2, y_1, \sqrt{1 - y_1^2}).$$

De même si y_1 est négatif, ou proche de 1.

- (6) Montrer que $f(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ est un espace compact.

C'est l'image d'une variété compacte par une fonction différentiable donc continue.

- (7) Étudier l'égalité $f(x, y) = f(x', y')$.

La notation complexe permet des calculs plus simples ici. Soit $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et $(x', y') \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tels que $f(x, y) = f(x', y')$.

De $|y| = |y'| = 1$, et de la deuxième composante de l'égalité $f(x, y) = f(x', y')$, on déduit que $|\Im x| = |\Im x'|$. Puisque $|x| = |x'| = 1$, on a donc $|\Re x| = |\Re x'|$.

Si $\Im x = \Im x'$, alors $y = y'$, et donc $\Re x = \Re x'$, si bien que $(x, y) = (x', y')$.

Si $\Im x = -\Im x'$, alors $y = -y'$, et alors $\Re x = \Re x'$.

Finalement

$$(f(x, y) = f(x', y')) \iff ((x, y) = (x', y') \text{ ou } x' = \bar{x}, y' = -y).$$

- (8) Montrer que $f(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ est difféomorphe à un quotient de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ qu'on précisera.

Soit l'application $h : (x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow (\bar{x}, -y)$. D'après la question précédente, l'application f passe au quotient (en une application $\bar{f}$) de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ par le groupe de difféomorphismes $G = \{\text{Id}, h\}$. L'action de G est libre et propre, et $\bar{f}$ est injective. Donc $\bar{f}$ est un homéomorphisme car l'espace de départ est compact. Donc finalement $\bar{f}$ est un plongement. Donc (cf Théorème 2.48) $\bar{f}$ est un difféomorphisme de $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/G$ vers $f(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$.

4.3. On définit une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ par $n \cdot (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$.

- (1) Vérifier que $\mathbb{Z}$ agit ainsi librement et proprement par difféomorphismes sur $\mathbb{R}^2$.

Vérification sans histoire.

On note $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ la variété quotient, et p la projection $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$.

- (2) Montrer que la projection $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x \in \mathbb{R}$ passe au quotient en une application $\pi : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Soit $\overline{(x, y)} \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, et $(x', y'), (x'', y'')$ deux antécédents dans $\mathbb{R}^2$. Il s'agit de vérifier que $\overline{x'} = \overline{x''}$ (classes dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Par définition de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, on a $x = x' + n' = x'' + n''$ avec $n', n'' \in \mathbb{Z}$. Donc $x' - x'' \in \mathbb{Z}$, et donc donnent lieu à la même classe dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

- (3) Soit $U =]0, 2/3[$ et $V =]1/3, 4/3[$. Montrer que $p(U \times \mathbb{R})$ et $p(V \times \mathbb{R})$ sont ouverts et recouvrent $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$.

La projection p est ouverte (voir une remarque en-dessous du Théorème 2.31), et $U \times \mathbb{R}$ et $V \times \mathbb{R}$ sont ouverts dans $\mathbb{R}^2$, donc leurs images sont ouvertes dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$.

Par ailleurs, étant donné $\overline{(x, y)} \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, alors $(x - E(x), y)$ est un antécédent dont la première composante est dans U ou V (ici on note $E(x)$ la partie entière de x). Donc $p(U \times \mathbb{R}) \cup p(V \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$.

- (4) Expliquer en quelques lignes en quoi $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ est différent de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Si $y \in \mathbb{R}$ est non nul, alors en notant par une barre les classes dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on a $\overline{(x+1, -y)} = \overline{(x, y)}$, mais $\overline{(x+1, -y)} \neq \overline{(x, y)}$.

Cela signifie exactement que la projection $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ ne passe pas au quotient en une application $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Cela n'explique pas précisément en quoi $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ sont différents, mais on va voir que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ est un fibré vectoriel au-dessus de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, fibré qui est *non trivial*, donc distinct du fibré trivial $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

- (5) Quel est le fibré tangent à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$?

C'est $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, via l'identification $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$. Cf exercice 3.14 pour l'équivalence des deux présentations du tore, et l'exercice 3.6 question d pour le fibré tangent au tore.

- (6) Montrer que $\pi : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un fibré vectoriel de dimension 1.

La fibre $\pi^{-1}(\{\bar{x}\})$ au-dessus de $\bar{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est $\{\overline{(x, y)}, y \in \mathbb{R}\}$. (Comme précédemment, on note par une barre les classes dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ et aussi les classes dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.) Elle est munie des lois

$$\overline{(x, y)} + \overline{(x, y')} = \overline{(x, y + y')}, \quad \lambda \overline{(x, y)} = \overline{(x, \lambda y)},$$

qui lui donnent une structure d'espace vectoriel. La dimension est 1.

Pour tout $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, notons V_0 la classe, dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, du produit $]x_0 - 1/2, x_0 + 1/2[\times \mathbb{R}$. La projection $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ étant ouverte, c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$. La projection $\pi : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ étant ouverte, l'image $U_0 = \pi(V_0)$ est un ouvert de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ contenant $\bar{x}_0$.

Soit $\bar{x} \in U_0$. Il existe un unique $X \in]x_0 - 1/2, x_0 + 1/2[$ tel que $\pi(\overline{X, y}) = \bar{x}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, et donc l'application :

$$\varphi : (\bar{x}, y) \in U_0 \times \mathbb{R} \longrightarrow \overline{X, y} \in \pi^{-1}(U_0) \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$$

est bien définie. C'est un difféomorphisme, puisque dans les cartes (qui sont ici les projections, au départ : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et à l'arrivée : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$) l'application φ est l'identité : $(X, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (X, y) \in \mathbb{R}^2$. Par ailleurs, il est clair que φ en restriction à $\{\bar{x}\} \times \mathbb{R}$ est un isomorphisme vers la fibre $\pi^{-1}(\{\bar{x}\})$, d'après la description ci-dessus de la structure d'espace vectoriel de la fibre.

(7) Montrer que π n'est pas le fibré trivial.

Soit s une section de π . Pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'élément $s(\bar{x})$ de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ appartient à $\pi^{-1}(\{\bar{x}\})$, donc on peut l'écrire (cf question 2) sous la forme $\overline{(x, \sigma(x))}$, pour un unique $\sigma(x) \in \mathbb{R}$. En notant

$$p_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$$

les projections canoniques, on a donc

$$s \circ p_1 = p_2 \circ (\text{Id}, \sigma).$$

Par définition des classes d'équivalence dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on a $s(\bar{x}) = s(\overline{x+1})$, donc

$$\overline{(x, \sigma(x))} = \overline{(x+1, \sigma(x+1))},$$

et par définition des classes d'équivalence dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, on a

$$\overline{(x+1, \sigma(x+1))} = \overline{(x, -\sigma(x+1))}.$$

Donc

$$\overline{(x, \sigma(x))} = \overline{(x, -\sigma(x+1))},$$

ce qui implique $\sigma(x) = -\sigma(x+1)$. Si σ est continue, alors σ s'annule donc en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Cela signifie que toute section continue s s'annule en au moins un point, et donc, par la question (c) de l'exercice 3.6 appliqué au cas particulier d'un fibré de dimension 1, le fibré $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ n'est pas trivial.

Il reste à montrer que σ est continue. Supposons que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \sigma(x) = \sigma_0^- \neq \sigma_0^+ = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \sigma(x).$$

Mais alors $s \circ p_1 = p_2 \circ (\text{Id}, \sigma)$ a $p_2(x_0, \sigma_0^\pm)$ pour limites à gauche et à droite en x_0 , et ces limites sont distinctes, ce qui contredit la continuité de $s \circ p_1$.