جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

قسم الرياضيات

السنة الثالثة S6

2009 - 2010

يوم: 27/05/2010

المدة: ساعة ونصف

الامتحان في مادة الهندسة التفاضلية

إعداد الأستاذ: د. س إبراهيم

التمرين 01:

أ. ما هو تعريف T_pM الفضاء المماسي للمنوعة الطبولوجية القابلة للتفاضل M عند النقطة p

ب. ما هو تعريف الشكل التفاضلي في الدرجة r على M منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل بعدها m.

التمرين 02:

1/ ليكن التطبيق: $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow Sm(n,\mathbb{R})$ ، $A \longmapsto f(A) = A^T A - I_n$ حيث: $Sm(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ , \ A^T = A\}$ مجموعة المصفوفات المتناظرة والتي هي م. ط. ق. ت بعدها $\frac{n^2-n}{2}$

برهن أنه:

$$\forall A, H \in M_n(\mathbb{R}) \ , \ f(A+H) - f(A) = L_A(H) + \|H\| \varphi(H).$$

حيث:

$$L_A(H) = H^T A + A^T H \ , \ \forall A, H \in M_n(\mathbb{R}).$$

و: $\varphi \ M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ وتحقق: $\lim_{H \to 0} \varphi(H) = 0$.

2/ برهن أن التطبيق: $L_A(H)$ خطي بالنسبة لـ H.

3/ إستنتج أن f قابلة للتفاضل على $M_n(\mathbb{R})$ وعين $Df(A)(H)$.

4/ لنضع: $Q(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \ / \ A^T A = I_n\}$.

باستعمال ما سبق برهن أن $Q(n,\mathbb{R})$ منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل وعين بعدها.

التمرين 03: لتكن: $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \ , \ x^2 + 4y^2 - z = 0\}$.

1/ بين أن V منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل بعدها 1.

2/ عين الفضاء المماسي لـ V عند النقطة (x,y,z) [أي: $T_{(x,y,z)}V$].

التمرين 04: أ. أحسب التفاضل الخارجي للأشكال التفاضلية التالية:

1/ $w(x,y,z) = \cos(xy^2)\, dx \wedge dz$

2/ $w(x,y,z) = P(x,y,z)\, dx \wedge dy + Q(x,y,z)\, dz \wedge dx + R(x,y,z)\, dy \wedge dz$

بحيث P و Q و R دوال من الصنف C^1 في مفتوح من $\mathbb{R}^3$.

ب. ليكن الشكل التفاضلي: $w = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_6$

أحسب كل من: $\overset{2}{\wedge} w = w \wedge w$ و $\overset{3}{\wedge} w = w \wedge w \wedge w$ ثم إستنتج: $\overset{n}{\wedge} w$ عندما يكون $n \geq 4$

جـ. ليكن $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ، $(x,y,z) \longmapsto \varphi(x,y,z) = (x^2, yz)$ و $\alpha = v^2 du + dv \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ و $\beta = uv \ du \wedge dv \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$

أحسب: $\alpha \wedge \beta$ و $\varphi^* \alpha$ و $\varphi^* \beta$ و $\varphi^*(\alpha \wedge \beta)$.

التنقيط: التمرين 01: 04 نقاط، التمرين 02: 06 نقاط، التمرين 03: 04 نقاط

التمرين 04: 06 نقاط

بالتوفيق.

حل التمرين 01:

لتكن M منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل، $p\in M$.

أ- الفضاء المماسي لـ M عند p هو مجموع الأشعة المماسية لـ M عند p ونرمز له بـ T_pM.
والشعاع المماسي لـ M عند p هو الشعاع المماسي للمنحنيات تنتمي لصنف تكافؤ المنحنيات عند p.

ب- نسمي شكل تفاضلي من الدرجة r على M كل تطبيق قابل للتفاضل من M في:

$$\omega: M \longrightarrow \Lambda^r(T^*M)=\bigcup_{p\in M}\left(\Lambda^r(T_p^*M)\right)$$

$$p \longmapsto \omega_p \in \Lambda^r(T_p^*M).$$

$$\omega_p: \underbrace{T_pM\times\dots\times T_pM}_{r\ \text{مرة}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

حل التمرين 02:

لتكن $Sm(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n},\ A^T=A\}$.

$Sm(n,\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المتناظرة.

ليكن $f:\mathbb{R}^{n\times n}\longrightarrow Sm(n,\mathbb{R})$

$$A\longmapsto f(A)=A^TA-I_n.$$

1- البرهان أن: $\forall A,H\in\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$f(A+H)-f(A)=L_A(H)+\|H\|\,\varphi(H)$$

حيث $L_A(H)=H^TA+A^TH$

و $\varphi:\mathbb{R}^{n\times n}\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}$ تحقق $\lim_{H\to0}\varphi(H)=0$.

$$f(A+H)-f(A)=(A+H)^T(A+H)-\cancel{I_n}+A^TA+\cancel{I_n}$$
$$=(A^T+H^T)(A+H)-A^TA.$$

$$f(A+H)-f(A)=\cancel{A^TA}+A^TH+H^TA+H^TH-\cancel{A^TA}$$

$$f(A+H)-f(A)=A^TH+H^TA+H^TH$$

ولدينا $\|H\|\varphi(H)=H^TH$

$$\Rightarrow\varphi(H)=\frac{H^TH}{\|H\|}.\quad (0,5)$$

$$\lim_{H\to0}\|\varphi(H)\|=\lim_{H\to0}\frac{\|H^TH\|}{\|H\|}\le\lim_{H\to0}\frac{\|H^T\|\cdot\cancel{\|H\|}}{\cancel{\|H\|}}\quad (0,5)$$

ومنه $\lim_{H\to0}\varphi(H)=0$

وهو المطلوب.

2- البرهان أن $L_A(H)$ خطي بالنسبة لـ H؟

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$ و $H_1,H_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$ لنبرهن أن

$$L_A(H_1+H_2)=L_A(H_1)+L_A(H_2)\ ?$$

$$L_A(H_1+H_2)=(H_1+H_2)^TA+A^T(H_1+H_2)$$
$$=(H_1^T+H_2^T)A+A^T(H_1+H_2)$$
$$=H_1^TA+A^TH_1+H_2^TA+AH_2.$$

$$\boxed{L_A(H_1+H_2)=L_A(H_1)+L_A(H_2)}\quad (0,5)$$

لنبرهن أن: $L_A(\alpha H_1)=\alpha L_A(H_1)$?

$$L_A(\alpha H_1)=(\alpha H_1)^TA+A(\alpha H_1).$$
$$=\alpha H_1^TA+\alpha AH_1.$$
$$=\alpha(H_1^TA+AH_1).$$

$$\boxed{L_A(\alpha H_1)=\alpha L_A(H_1)}\quad (0,5)$$

ومنه $L_A(H)$ خطي بالنسبة لـ H.

3- استنتاج أن f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^{n\times n}$ وتعيين $Df(A)(H)$

لدينا:

$$\lim_{H\to0}\frac{f(A+H)-f(A)}{\|H\|}=\lim_{H\to0}\frac{L_A(H)}{\|H\|}+\cancel{\lim_{H\to0}\varphi(H)}\quad (1)$$

وبما أن $L_A(H)$ خطي بالنسبة لـ H إذن f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^{n\times n}$ ولدينا

$$\boxed{Df(A)(H)=L_A(H)=H^TA+A^TH}\quad (0,5)$$

4- لنضع: $Q(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n};\ A^TA=I_n\}$.

المطلوب: باستعمال مبرهنة البرهان أن $Q(n,\mathbb{R})$ منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل وتعيين بعدها.

نستعمل التطبيق f لدينا $f^{-1}(0)=Q(n,\mathbb{R})$.

لنبرهن أن 0 قيمة عادية لـ f.

أي لنبرهن أنه من أجل كل $A\in f^{-1}(0)$ إذن التطبيق $Df(A)$ غامر؟

ليكن $A\in f^{-1}(0)$ أي $A^TA=I_n$، ولدينا

$$Df(A):\mathbb{R}^{n\times n}\longrightarrow Sm(n,\mathbb{R}).$$
$$H\longmapsto Df(A)(H)=H^TA+A^TH.$$

لكي نبرهن أن $Df(A)$ أنه غامر لابد أن نبرهن أنه من أجل كل $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ يوجد $C\in Sm(n,\mathbb{R})$ بحيث

$$Df(A)(B)=C$$

أي

$$(*)\quad \boxed{B^TA+A^TB=C}$$

لدينا $C\in Sm(n,\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة ($C^T=C$)

$$C=\frac C2+\frac C2=\frac C2+\frac{C^T}{2},\quad \boxed{C=\frac C2+\frac{C^T}{2}}$$

$$\boxed{B^TA+A^TB=A^TB+(A^TB)^T}$$

ومنه لكي تكون (*) محققة يكفي أن يكون

$$A^TB+(A^TB)^T=C/2+\frac{C^T}{2}$$

ومنه: $A^T B = \frac{C}{2}$ بضرب الطرفين في A نجد

$A.A^T B = A.\frac{C}{2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2} A.C}$ (0,5)

(0,5) [لأن $A^T A = I_n$ ومنه $A A^T = I_n$]

ومنه $Df(A)$ غامر إذن 0 قيمة عادية لـ f.

ومنه $O(n,\mathbb{R})$ منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل.

تعيين بعد $O(n,\mathbb{R})$ ؟

$\dim(O(n,\mathbb{R})) = \dim(\mathbb{R}^{n\times n}) - \dim(S_n(n,\mathbb{R}))$

$\dim(O(n,\mathbb{R})) = n^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)$

$\boxed{\dim(O(n,\mathbb{R})) = \frac{n^2+n}{2}}$ (0,5)

حل التمرين 03 لدينا:

$V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+4y^2-1=0,\ x^2+4y^2-z=0\}$

1) البرهان أن V م.ط.ق.ت بعدها 1.

نضع: $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. (0,5)

$(x,y,z)\longmapsto f(x,y,z) = (x^2+4y^2-1,\ x^2+4y^2-z)$

لدينا $V = f^{-1}(0,0)$ ومنه يكفي أن نبرهن أن (0,0) قيمة عادية لـ f.

أي مهما يكن $(x,y,z)\in f^{-1}(0,0)$

لدينا $Df(x,y,z)$ غامر، لدينا

$Df(x,y,z):\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

$h=(h_1,h_2,h_3)\longmapsto Df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3)$.

$Df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) = \begin{pmatrix}2x & 8y & 0\\ 2x & 8y & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}$. (1)

ومنه $Df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) = (2xh_1+8yh_2,\ 2xh_1+8yh_2-h_3)$

تعيين $\dim(\mathrm{Im}\,Df(x,y,z))$

$Df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) = \begin{pmatrix}2xh_1+8yh_2\\ 2xh_1+8yh_2-h_3\end{pmatrix}$

$Df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) = (2xh_1+8yh_2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - h_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

ومنه $\mathrm{Im}\,Df(x,y,z) = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle \subset \mathbb{R}^2$ (0,5)

إذن $\dim(\mathrm{Im}\,Df(x,y,z)) = 2$ إذن

$\mathrm{Im}\,Df(x,y,z) = \mathbb{R}^2$ ومنه $Df(x,y,z)$ غامر (1)

إذن (0,0) قيمة عادية لـ f ومنه V منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل بعدها 1 ($\dim V = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\mathbb{R}^2 = 1$).

2) تعيين الفضاء المماس لـ V عند النقطة (x,y,z).

$T_{(x,y,z)}V = \ker Df(x,y,z)$. (0,5)

$(h_1,h_2,h_3)\in T_{(x,y,z)}V \iff (h_1,h_2,h_3)\in \ker Df(x,y,z)$

$\iff Df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) = 0$ (0,5)

$\iff \begin{cases}2xh_1+8yh_2=0\\ h_3=0.\end{cases}$ (معادلة مستقيم في الفضاء).

حل التمرين 04: أ- حساب تفاضل كل من:

1) $\omega(x,y,z) = \cos(xy^2)\,dx\wedge dz$.

$d\omega(x,y,z) = d(\cos(xy^2))\wedge dx\wedge dz$.

$d\omega(x,y,z) = \left[\frac{\partial}{\partial x}[\cos(xy^2)]dx + \frac{\partial}{\partial y}[\cos(xy^2)]dy\right]\wedge dx\wedge dz$

$d\omega(x,y,z) = \left[-y^2\sin(xy^2)dx - 2xy\sin(xy^2)dy\right]\wedge dx\wedge dz$ (1)

$\boxed{d\omega(x,y,z) = 2xy\sin(xy^2)\,dx\wedge dy\wedge dz}$

2) $\omega = P\,dx\wedge dy + Q\,dz\wedge dx + R\,dy\wedge dz$.

$d\omega = dP\wedge dx\wedge dy + dQ\wedge dz\wedge dx + dR\wedge dy\wedge dz$

$d\omega = \frac{\partial P}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial R}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz$.

$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz}$ (1)

ب- ليكن: $\omega = dx_1\wedge dx_2 + dx_3\wedge dx_4 + dx_5\wedge dx_6$.

$\overset{2}{\wedge}\omega = dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4 + dx_1\wedge dx_2\wedge dx_5\wedge dx_6 + dx_3\wedge dx_4\wedge dx_1\wedge dx_2 + dx_3\wedge dx_4\wedge dx_5\wedge dx_6 + dx_5\wedge dx_6\wedge dx_1\wedge dx_2 + dx_5\wedge dx_6\wedge dx_3\wedge dx_4$.

$\boxed{\overset{2}{\wedge}\omega = 2[dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4 + dx_1\wedge dx_2\wedge dx_5\wedge dx_6 + dx_3\wedge dx_4\wedge dx_5\wedge dx_6]}$ (1)

$\boxed{\overset{3}{\wedge}\omega = 6\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\wedge dx_5\wedge dx_6}$ (0,5)

$\boxed{\forall n\geq 4:\ \overset{n}{\wedge}\omega = 0}$ (0,5)

ليكن $\varphi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$(x,y,z)\longmapsto(x^2, yz)$

$\alpha = v^2du + dv \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$

$\beta = uv\,du\wedge dv \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$

حساب:

$\boxed{\alpha\wedge\beta = 0}$. (0,5)

$\varphi^*\alpha = y^2z^2 d\varphi_1 + d\varphi_2 = y^2z^2\, 2x\,dx + z\,dy + y\,dz$

$\boxed{\varphi^*\alpha = 2xy^2z^2dx + z\,dy + y\,dz}$ (0,5)

$\varphi^*\beta = x^2yz\,d\varphi_1\wedge d\varphi_2 = x^2yz[(2x\,dx)\wedge(z\,dy + y\,dz)]$

$\boxed{\varphi^*\beta = 2x^3yz^2dx\wedge dy + 2x^3y^2z\,dx\wedge dz}$ (0,5)

$\boxed{\varphi^*(\alpha\wedge\beta) = 0}$. (0,5)

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

يوم 2010/05/27

المدة: ساعة ونصف

إعداد الأستاذ: ... ابراهيم

قسم الرياضيات

السنة الثالثة S6

2009 - 2010

الامتحان في مادة الهندسة التفاضلية

التمرين 01:

أ. ما هو تعريف T_pM الفضاء المماسي للمنوعة الطبولوجية القابلة للتفاضل M عند النقطة p.

ب. ما هو تعريف الشكل التفاضلي من الدرجة r على M منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل بعدها m.

التمرين 02:

1/ ليكن التطبيق: $f: M_n(\mathbb{R}) \to Sm(n,\mathbb{R})$ ، $A \mapsto f(A)=A^TA-I_n$ حيث: $Sm(n,\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R}),\ A^T=A\}$ مجموعة المصفوفات المتناظرة والتي هي: م. ط. ق. ت بعدها $\frac{n^2-n}{2}$

برهن أنه:

$$\forall A,H\in M_n(\mathbb{R}),\ f(A+H)-f(A)=L_A(H)+\|H\|\varphi(H).$$

حيث: $L_A(H)=H^TA+A^TH,\ \forall A,H\in M_n(\mathbb{R})$.

و: $\varphi: M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ وتحقق: $\lim_{H\to 0}\varphi(H)=0$.

2/ برهن أن التطبيق $L_A(H)$ خطي بالنسبة لـ H.

3/ استنتج أن f قابلة للتفاضل على $M_n(\mathbb{R})$ وعين $Df(A)(H)$.

4/ لنضع: $O(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R}) / A^TA=I_n\}$.

باستعمال ما سبق برهن أن $O(n,\mathbb{R})$ منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل وعين بعدها.

التمرين 03: لتكن: $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+4y^2-1=0,\ x^2+4y^2-z=0\}$.

1/ بين أن V منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل بعدها 1.

2/ عين الفضاء المماسي لـ V عند النقطة (x,y,z) [أي $T_{(x,y,z)}V$]

التمرين 04: أ- احسب التفاضل الخارجي للأشكال التفاضلية التالية:

1/ $\omega(x,y,z)=\cos(xy^2)\,dx\wedge dz$

2/ $\omega(x,y,z)=P(x,y,z)\,dx\wedge dy+Q(x,y,z)\,dz\wedge dx+R(x,y,z)\,dy\wedge dz$

بحيث P و Q و R دوال من الصنف C^1 في مفتوح من $\mathbb{R}^3$.

ب- ليكن الشكل التفاضلي: $\omega=dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4+dx_5\wedge dx_6$

أحسب كل من: $\overset{2}{\wedge}\omega=\omega\wedge\omega$ و $\overset{3}{\wedge}\omega=\omega\wedge\omega\wedge\omega$ ثم استنتج $\overset{n}{\wedge}\omega$ من أجل $n\geq 4$.

ج- ليكن $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ، $(x,y,z)\mapsto\varphi(x,y,z)=(x^2,yz)$ و $\alpha=v^2du+dv\in\Omega^1(\mathbb{R}^2)$ و $\beta=uv\,du\wedge dv\in\Omega^2(\mathbb{R}^2)$

أحسب: $\alpha\wedge\beta$ و $\varphi^*\alpha$ و $\varphi^*\beta$ و $\varphi^*(\alpha\wedge\beta)$.

التنقيط: التمرين 01: 04 نقاط، التمرين 02: 06 نقاط، التمرين 03: 04 نقاط

التمرين 04: 06 نقاط

بالتوفيق.

تصحيح إمتحان مادة الهندسة التفاضلية يوم 27/05/2010 — 01 — (2009/2010)

التمرين 01:

لتكن M منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل، $p\in M$.

أ- الفضاء المماسي لـ M عند p هو مجموع الأشعة المماسية لـ M عند p ونرمز له بـ T_pM.

والشعاع المماسي لـ M عند p هو الشعاع المماسي للمنحنيات تنتمي لصنف تكافؤ المنحنيات عند p.

ب- نسمي شكل تفاضلي من الدرجة r على M كل تطبيق قابل للتفاضل ω معرف كمايلي:

$$\omega: M \longrightarrow \Lambda^r(T^*M)=\bigcup_{p\in M}\left(\Lambda^r(T_p^*M)\right)$$

$$p \longmapsto \omega_p \in \Lambda^r(T_p^*M).$$

$$\omega_p: \underbrace{T_pM\times\cdots\times T_pM}_{r \text{ مرة}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

حل التمرين 02:

لتكن $Sm(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n};\ A^T=A\}$.

$Sm(n,\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المتناظرة.

ليكن $f:\mathbb{R}^{n\times n}\longrightarrow Sm(n,\mathbb{R})$

$$A\longmapsto f(A)=A^TA-I_n.$$

1- البرهان أن:

$\forall A,H\in\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$f(A+H)-f(A)=L_A(H)+\|H\|.\varphi(H)$$

حيث $L_A(H)=H^TA+A^TH$

و $\varphi:\mathbb{R}^{n\times n}\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}$ تحقق $\lim_{H\to 0}\varphi(H)=0$.

$$f(A+H)-f(A)=(A+H)^T(A+H)-\cancel{I_n}-A^TA+\cancel{I_n}$$
$$=(A^T+H^T)(A+H)-A^TA.$$

$$f(A+H)-f(A)=\cancel{A^TA}+A^TH+H^TA+H^TH-\cancel{A^TA}$$

$$f(A+H)-f(A)=A^TH+H^TA+H^TH \quad (1)$$

ولدينا $\|H\|\varphi(H)=H^TH$

$$\Rightarrow \varphi(H)=\frac{H^TH}{\|H\|}. \quad (0,5)$$

$$\lim_{H\to 0}\|\varphi(H)\|=\lim_{H\to 0}\frac{\|H^TH\|}{\|H\|}\leq\lim_{H\to 0}\frac{\|H^T\|.\|H\|}{\|H\|}=0 \quad (0,5)$$

ومنه $\lim_{H\to 0}\varphi(H)=0$

وهو المطلوب.

2- البرهان أن $L_A(H)$ خطي بالنسبة لـ H؟

ليكن $H_1,H_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ ولنبرهن أن

$$L_A(H_1+H_2)=L_A(H_1)+L_A(H_2)\ ?$$

$$L_A(H_1+H_2)=(H_1+H_2)^TA+A^T(H_1+H_2)$$
$$=(H_1^T+H_2^T)A+A^T(H_1+H_2)$$
$$=H_1^TA+A^TH_1+H_2^TA+AH_2.$$

$$\boxed{L_A(H_1+H_2)=L_A(H_1)+L_A(H_2)} \quad (0,5)$$

لنبرهن أن: $L_A(\alpha H_1)=\alpha L_A(H_1)$?

$$L_A(\alpha H_1)=(\alpha H_1)^TA+A(\alpha H_1).$$
$$=\alpha H_1^TA+\alpha AH_1.$$
$$=\alpha(H_1^TA+AH_1).$$

$$\boxed{L_A(\alpha H_1)=\alpha L_A(H_1)} \quad (0,5)$$

ومنه $L_A(H)$ خطي بالنسبة لـ H.

3- استنتاج أن f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^{n\times n}$ وتعيين $Df(A)(H)$

لدينا:

$$\lim_{H\to 0}\frac{f(A+H)-f(A)}{\|H\|}=\lim_{H\to 0}\frac{L_A(H)}{\|H\|}+\lim_{H\to 0}\varphi(H) \quad (1)$$

وبما أن $L_A(H)$ خطي بالنسبة لـ H إذن f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^{n\times n}$ ولدينا

$$\boxed{Df(A)(H)=L_A(H)=H^TA+A^TH} \quad (0,5)$$

4- لنضع $O(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n};\ A^TA=I_n\}$.

المطلوب: باستعمال ما سبق البرهان أن $O(n,\mathbb{R})$ منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل وتعيين بعدها.

لنستعمل التطبيق f لدينا $f^{-1}(0)=O(n,\mathbb{R})$.

لنبرهن أن 0 قيمة عادية لـ f.

أي لنبرهن أنه من أجل كل $A\in f^{-1}(0)$ فإن التطبيق $Df(A)$ غامر؟

ليكن $A\in f^{-1}(0)$ أي $A^TA=I_n$، ولدينا

$$Df(A):\mathbb{R}^{n\times n}\longrightarrow Sm(n,\mathbb{R}).$$
$$H\longmapsto Df(A)(H)=H^TA+A^TH.$$

لكي نبرهن أن $Df(A)$ غامر لابد أن نبرهن أنه من أجل كل $C\in Sm(n,\mathbb{R})$ يوجد $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ بحيث

$$Df(A)(B)=C$$

أي $(*)\quad \boxed{B^TA+A^TB=C}$

لدينا $C\in Sm(n,\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة $(C^T=C)$.

$$C=\frac{C}{2}+\frac{C}{2}=\frac{C}{2}+\frac{C^T}{2},\quad \boxed{C=\frac{C}{2}+\frac{C^T}{2}}$$

$$\boxed{B^TA+A^TB=A^TB+(A^TB)^T}$$

ومنه لكي تكون $(*)$ محققة يكفي أن يكون

$$A^TB+(A^TB)^T=\frac{C}{2}+\frac{C^T}{2}$$