كلية العلـوم الدقيقة والعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
فرع الرياضيات السنة الثالثة LMD (S6)

جـامعـة العـربـي بن مهيـدي أم البـواقي

الإمتحان الإستدراكي في مادة الهنـدسة التفاضلية

يـوم: 2013/06/17
المدة: ساعة ونصف
2013 - 2012

التمرين01:

ليكن $U\subset E$ حيث E فضاء شعاعي، و $w\in\Omega_p(U)$ و $\eta\in\Omega_q(U)$ شكلين تفاضلين:

1. عرف الجداء الخارجي $w\wedge\eta$.
2. ثم أكتب عبارته في حالة البعد المنتهي (أي: $\dim E=n$).

التمرين02:

برهن أن كل E فضاء شعاعي ذو بعد منتهي ($\dim E=n$) هو منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل، مع تعيين بعدها.

التمرين03:

لنضع $P=S^1\times S^1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in IR^4;\ {x_1}^2+{x_2}^2=1,\ \ {x_3}^2+{x_4}^2=1\}$

1. بين أن P منوعة طبولوجية جزئية من IR^4، وعين بعدها.
2. ثم من أجل كل $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in P$ عين T_xP (أي: الفضاء المماسي لـP عند النقطة x).

التمرين04:

أ- ليكن $w(x,y,z)=a(x,y,z)\,dx+b(x,y,z)\,dy+c(x,y,z)\,dz$.
أحسب dw.

ب- لنعتبر الأشكال التفاضلي التالية:

$$\alpha(x,y,z)=\cos(x\,y\,z)\,dx+(x^2\,z-y)\,dy+\tan(y\,z)\,dz$$
$$\beta(x,y,t)=x^2\cos y\,dx\wedge dy+(t-2\,x\,y)\,dy\wedge dt$$

أحسب كل من:

$\alpha\wedge\beta$، و $\beta\wedge\alpha$، و $d\alpha$، و $d\beta$، و $d\alpha\wedge\beta$، و $\beta\wedge d\alpha$،و $d(\alpha\wedge\beta)$، و $d(\beta\wedge\alpha)$، و $d\alpha\wedge d\beta$ و $d\beta\wedge d\alpha$.

التنقيط:[التمرين1: 05 نقاط] [التمرين2: 04 نقاط] [التمرين3: 05 نقاط] [التمرين4: 06 نقاط]

بالتـــوفـيـــق

تصحيح الامتحان الاستدراكي الخاص بمادة الهندسة التفاضلية، وذلك ليوم 13/06/17 م.

إجابة عن التمرين 01

ليكن E فضاء شعاعي و $w \in \Omega_p(U)$ و $\eta \in \Omega_q(U)$

تعريف الجداء الخارجي $w\wedge\eta$ ؟

$$w\wedge\eta : U \longrightarrow \Omega_{p+q}(U).$$

حيث

$$x \longmapsto w\wedge\eta(x).$$

$$w\wedge\eta(x) : E^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$h=(h_1,\dots,h_{p+q}) \longmapsto w\wedge\eta(x)(h)$$

$$\begin{cases} w\wedge\eta(x)(h) = \sum_{\sigma\in S_{p,q}} \varepsilon(\sigma)\, w(x)(h_{\sigma(1)},\dots,h_{\sigma(p)}) \cdot \eta(x)(h_{\sigma(p+1)},\dots,h_{\sigma(p+q)}). \\ \forall x\in U \\ \forall h=(h_1,\dots,h_{p+q})\in E^{p+q} \end{cases}$$

حيث:

$$S_{p,q}=\{\sigma\in S_{p+q} : \sigma(1)<\dots<\sigma(p)\ ;\ \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)\}$$

في حالة البعد المنتهي

$$w(x)\wedge\eta(x) = \Big(\sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} c_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\Big) \wedge \Big(\sum_{1\le j_1<\dots<j_q\le n} e_{j_1\dots j_q}(x)\, dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}\Big).$$

$$w(x)\wedge\eta(x) = \sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_p\le n \\ 1\le j_1<\dots<j_q\le n}} c_{i_1\dots i_p}(x)\cdot e_{j_1\dots j_q}(x)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}$$

حل التمرين 02

البرهان أن كل فضاء شعاعي E ذو بعد منتهي هو م.ق.ت

نزود E بالطبولوجية المتلائمة مع بنية فضاء شعاعي أي التي تجعل من التطبيقات:

$$E\times E \longrightarrow E$$
$$(x,y) \longmapsto x+y$$
$$\mathbb{R}\times E \longrightarrow E$$
$$(\lambda,x) \longmapsto \lambda x$$

مستمرة.

نعرف التطبيق h:

$$h : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto h(x)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

$$\begin{cases} \text{حيث: } E \text{ ف.ش ذو بعد منتهي إذن } (e_i)_{i=1..n} \text{ أساس إذن} \\ \forall x\in E,\ \exists(\alpha_i)_{i=1..n}\in\mathbb{R},\ x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i \quad —(*) \end{cases}$$

إذن لدينا $h=(P_1,\dots,P_n)$ هو دالة شعاعية مركباتها هي الإسقاطات ومنه h مستمرة.

بما أن الكتابة $(*)$ وحيدة إذن h تقابلي.

و h^{-1} معرف كما يلي:

$$h^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$$
$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \longmapsto h^{-1}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$$

h^{-1} مستمر من خصائص الطبولوجية التي زودنا بها E.

إذن h مستمر كل من E مفتوح نحو $\mathbb{R}^n$ إذن الزوج (E,h) يشكل خريطة ومنه $A=\{(E,h)\}$ أطلس قابل للتفاضل ومنه E م.ق.ت بعدها هو n.

حل التمرين 03 ليكن $P=S^1\times S^1$.

أ) البرهان أن P منوعة طبولوجية جزئية من $\mathbb{R}^4$ وتعيين بعدها.

لنضع $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4) \longmapsto f(x)=(\overbrace{x_1^2+x_2^2}^{f_1(x)},\ \overbrace{x_3^2+x_4^2}^{f_2(x)})$$

نلاحظ أن $P=f^{-1}(\{(1,1)\})$ ومنه يكفي أن نبرهن أن $(1,1)$ قيمة عادية لـ f أي لنبرهن أنه من أجل كل $x\in f^{-1}(1,1)$ لدينا $Df(x)$ غامر.

المطلوب نبرهن أنه من أجل $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ يوجد $h=(h_1,h_2,h_3,h_4)\in\mathbb{R}^4$ حيث

$$Df(x)(h)=y$$

لدينا

$$Df(x) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$h \longmapsto Df(x)(h)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$h=(h_1,h_2,h_3,h_4)^T\in\mathbb{R}^4$

$$\Rightarrow Df(x)(h)=\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1h_1+2x_2h_2 \\ 2x_3h_3+2x_4h_4 \end{pmatrix}$$

لدينا $x\in f^{-1}(1,1) \Leftarrow x_1^2+x_2^2=1,\ x_3^2+x_4^2=1$

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1(x_1^2+x_2^2) \\ y_2(x_3^2+x_4^2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1\left(\frac{x_1y_1}{2}\right)+2x_2\left(\frac{x_2y_1}{2}\right) \\ 2x_3\left(\frac{x_3y_2}{2}\right)+2x_4\left(\frac{x_4y_2}{2}\right) \end{pmatrix}$$

يكفي أخذ h: $h=\left(\frac{x_1y_1}{2}, \frac{x_2y_1}{2}, \frac{x_3y_2}{2}, \frac{x_4y_2}{2}\right)^T$

ومنه المطلوب. P م.ط.ج من $\mathbb{R}^4$ و $\boxed{\dim P=4-2=2}$

ب) تعيين T_xP لأجل $x\in P$: $T_xP=\ker Df(x)$

$$h\in T_xP \Leftrightarrow Df(x)(h)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1h_1+2x_2h_2 \\ 2x_3h_3+2x_4h_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1h_1+x_2h_2=0 \\ x_3h_3+x_4h_4=0 \end{cases} \Rightarrow T_xP=P_1\times P_2.$$

P_1 هو المستقيم الذي معادلته $x_1h_1+x_2h_2=0$

P_2 هو المستقيم الذي معادلته $x_3h_3+x_4h_4=0$.

حل التمرين 04: أ) ليكن

$$w(x,y,z)=a(x,y,z)\,dx+b(x,y,z)\,dy+c(x,y,z)\,dz$$

$$dw=\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy+\left(\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial z}\right)dx\wedge dz+\boxed{\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)dy\wedge dz}$$

ب): $\alpha(x,y,z)=\cos(xyz)\,dx+(x^2z-y)\,dy+\tan(yz)\,dz$

$\beta(x,y,t)=x^2\cos y\,dx\wedge dy+(t-2xy)\,dy\wedge dt.$

$\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha=\cos(xyz)(t-2xy)\,dx\wedge dy\wedge dt+$

$+x^2\cos y\tan(yz)\,dx\wedge dy\wedge dz-\tan(yz)(t-2xy)\,dy\wedge dz\wedge dt$

حسب السؤال (أ) لدينا $d\alpha=(2z+xz\sin(xyz))\,dx\wedge dy+$

$+xy\sin(xyz)\,dx\wedge dz+[z+z\tan^2(yz)-x^2]\,dy\wedge dz$

$d\beta=-2y\,dx\wedge dy\wedge dt$

$d\alpha\wedge\beta=\beta\wedge d\alpha=xy\sin(xyz)(t-2xy)\,dx\wedge dy\wedge dz\wedge dt$

$d(\alpha\wedge\beta)=d(\beta\wedge\alpha)=-xy\sin(xyz)(t-2xy)\,dx\wedge dy\wedge dz\wedge dt.$

$d\alpha\wedge d\beta=d\beta\wedge d\alpha=0.$