جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
فرع الرياضيات السنة الثالثة LMD(S6)

يوم: الأحد 10 شوال 1439 هـ
الموافق لـ 24 جوان 2018
2017- 2018

الإمتحان الإستدراكي في مادة الهندسة التفاضلية

التمرين 1: أجب على أحد الأسئلة التالية:

1. عرف (M,A) منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل (بالتفصيل).
2. ليكن (M,A) منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل حيث: $dinM=m$، و $\phi\neq B\subset M$، عرف B منوعة جزئية من M ذات البعد $k\in IN^*$ (حيث $k\leq m$)، ثم برهن أنه إذا كان B مفتوح من M، إذن B منوعة جزئية من M بعدها m.
3. ليكن (M,A) منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل (حيث: $dinM=m$)، عرف الشكل تفاضلي $w\in\Omega_p^{(k)}(M)$.
4. ليكن $E\supset U$ حيث E فضاء شعاعي، و $w\in\Omega_p(U)$ و $\eta\in\Omega_q(U)$ شكلين تفاضليين، عرف الجداء الخارجي $w\wedge\eta$، ثم أكتب عبارته في حالة البعد المنتهي (أي: $\dim E=n$).

التمرين 2: لنضع $V=\{(x,y,z)\in IR^3;\ x^2+y^2-z^2=1;\ x^2-z=5\}$.

1. بين أن V منوعة طبولوجية جزئية من IR^3، وعين بعدها.
2. عين الفضاء المماسي لـ V عند النقطة (x,y,z) (أي: $T_{(x,y,z)}V$).

التمرين 3:

أ- ليكن الشكل التفاضلي: $w\in\Omega_2\left(IR^3-\{(0,0,0)\}\right)$ حيث:

$$w(x,y,z)=\frac{x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha}}$$

أحسب dw، ثم أوجد قيمة $\alpha\in IR$ حتى يكون w شكل مغلق.

ب- لنعتبر الأشكال التفاضلي التالية: $\alpha(x,y,z)=\cos(x\,y\,z)\,dx+\left(x^2\,z-y\right)dy+\tan(y\,z)\,dz$

$$\beta(x,y,t)=x^2\cos y\,dx\wedge dy+(t-2\,x\,y)\,dy\wedge dt$$

أحسب كل من: $\alpha\wedge\beta$، $\beta\wedge\alpha$، و $d\alpha$، و $d\beta$، و $d(\alpha\wedge\beta)$، و $d(\beta\wedge\alpha)$، و $d\alpha\wedge d\beta$، و $d\beta\wedge d\alpha$.

التنقيط: [التمرين 1: 06 نقاط] [التمرين 2: 06 نقاط] [التمرين 3: 08 نقاط]

بالتوفيق

01

تصحيح إمتحان الإستدراكي لمادة الهندسة التفاضلية ليوم: 2018/06/24.

حل التمرين 02

لنضع: $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2-z^2=1,\ x^2+z^2=5\}$.

1/ البرهان أن V منوعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ وتعيين بعدها.

لنضع (0,5) $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$(x,y,z)\longmapsto f(x,y,z)=(\underbrace{x^2+y^2-z^2}_{f_1(x,y,z)},\underbrace{x^2+z^2}_{f_2(x,y,z)})$$

نلاحظ أن $V=f^{-1}(\{(1,5)\})$ (0,5) ومنه يكفي أن نبرهن $(1,5)$ قيمة (0,25) عادية لـ f.

من أجل ذلك يكفي أن نبرهن أن (0,5)

من أجل كل $(x,y,z)\in V$ نبرهن أن التطبيق $df(x,y,z)$ غامر من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$.

* لنبرهن أن f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^3$؟

(0,5) بما أن f_1 و f_2 كثيرات حدود ومنه f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^3$.

* تعيين $df(x,y,z)$: من أجل كل $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$df(x,y,z):\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$$

$$(h_1,h_2,h_3)\longmapsto df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3)$$ (0,25)

$$df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3)=\begin{pmatrix}2x & 2y & -2z\\ 2x & 0 & 2z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xh_1+2yh_2-2zh_3\\ 2xh_1+2zh_3\end{pmatrix}$$

لنبرهن أن من أجل $(x,y,z)\in V \iff \begin{cases}x^2+y^2-z^2=1 & \text{—(1)}\\ x^2+z^2=5 & \text{—(2)}\end{cases}$

لنبرهن أن $\dim \operatorname{Im} df(x,y,z)=2$ (0,25)

لدينا $\dim \operatorname{Im} df(x,y,z)+\dim \operatorname{Ker} df(x,y,z)=3=\dim\mathbb{R}^3$ (0,25)

ومنه يكفي أن نبرهن أن $\dim \operatorname{Ker} df(x,y,z)=1$ (0,25)

$$(h_1,h_2,h_3)\in \operatorname{Ker} df(x,y,z)\Leftrightarrow df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3)=0$$

$$\begin{cases}2xh_1+2yh_2-2zh_3=0 & \text{—(3)}\\ 2xh_1+2zh_3=0 & \text{—(4)}\end{cases}\overset{(3)+(4)}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}2xh_1=-yh_2 & \text{—(5)}\\ \overset{(4)}{\Rightarrow}\ xh_1=-zh_3 & \text{—(6)}\\ \overset{(4)-(3)}{\Rightarrow}\ 2zh_3=yh_2 & \text{—(7)}\end{cases}$$ (0,25).

(02)

• من لدينا الحالات التالية

1/ 3 عناصر معدومة (0,25) $x=y=z=0$ منها دالة (1) مرفوضة.

2/ عنصرين معدومين وعنصر غير معدوم

2.1/ $x=y=0$ و $z\neq 0$ بالتعويض في (1) و (2) نجد $z^2=-1$ و $z^2=2$ مرفوضة (0,75)

2.2/ $x=z=0$ و $y\neq 0$ بالتعويض في (2) مرفوضة.

2.3/ $y=z=0$ و $x\neq 0$ بالتعويض في (1) و (2) نجد $x^2=1$ و $x^2=2$ مرفوضة.

3/ عنصر معدوم وعنصرين غير معدومين. (0,25)

3.1/ $x=0$ و $y\neq 0$ و $z\neq 0$. بالتعويض في (5) و (6) نجد $h_2=h_3=0$ و $h_1\neq 0$

$$\operatorname{Ker} df(x,y,z)=\operatorname{Vect}\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

3.2/ $y=0$ و $x\neq 0$ و $z\neq 0$ بالتعويض في (5) و (7) نجد $h_1=h_3=0$ و $h_2\neq 0$.

$$\operatorname{Ker} df(x,y,z)=\operatorname{Vect}\left\{e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

3.3/ $z=0$ و $x\neq 0$ و $y\neq 0$ بالتعويض في (6) و (7) نجد $h_1=h_2=0$ و $h_3\neq 0$

$$\operatorname{Ker} df(x,y,z)=\operatorname{Vect}\left\{e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

4/ جميع العناصر غير معدومة (0,25)

(5) $\Rightarrow h_2=-\frac{2x}{y}h_1$.

(6) $h_3=-\frac{x}{z}h_1$.

$$\operatorname{Ker} df(x,y,z)=\operatorname{Vect}\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\-\frac{2x}{y}\\-\frac{x}{z}\end{pmatrix}\right\}$$

وهو المطلوب $(1,2)$ قيمة عادية لـ f.

ومنه حسب نظرية القيمة العادية إذن V منوعة جزئية من $\mathbb{R}^3$

$$\dim V=\dim\mathbb{R}^3-\dim\mathbb{R}^2=1. \quad (0,5)$$

2/ تعيين $T_{(x,y,z)}V$ من أجل $(x,y,z)\in V$.

$$T_{(x,y,z)}V=\operatorname{Ker} df(x,y,z).$$

$$=\{(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3,\ df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3)=0\}.$$

$$T_{(x,y,z)}V=\left\{(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{array}{l}xh_1+yh_2-zh_3=0\\ xh_1+zh_3=0\end{array}\right\}.$$

(0,5)

03

حل التمرين 03

الجزء 1: ليكن الشكل التفاضلي $\omega \in \Omega_2\left(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}\right)$ حيث

$$\omega(x,y,z) = \underbrace{\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}}_{A(x,y,z)}\, dy\wedge dz + \underbrace{\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}}_{B(x,y,z)}\, dz\wedge dx$$

$$+ \underbrace{\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}}_{C(x,y,z)}\, dx\wedge dy .$$

إذن $\omega = A\, dy\wedge dz + B\, dz\wedge dx + C\, dx\wedge dy$.

حساب $d\omega$،

$$d\omega = dA\wedge dy\wedge dz + dB\wedge dz\wedge dx + dC\wedge dx\wedge dy .$$

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial x} dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial B}{\partial y} dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial C}{\partial z} dz\wedge dx\wedge dy .$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

4

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x,y,z) = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha} - 2\alpha x^2 (x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}}{(x^2+y^2+z^2)^{2\alpha}} .$$

$$\frac{\partial B}{\partial y}(x,y,z) = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha} - 2\alpha y^2 (x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}}{(x^2+y^2+z^2)^{2\alpha}} .$$

$$\frac{\partial C}{\partial z}(x,y,z) = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha} - 2\alpha z^2 (x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}}{(x^2+y^2+z^2)^{2\alpha}} .$$

$$d\omega(x,y,z) = \frac{(3-2\alpha)}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}$$

* إيجاد α حتى يكون ω مغلق.

$(\omega \text{ مغلق}) \Longleftrightarrow (d\omega = 0) \Longleftrightarrow \left(\alpha = \frac{3}{2}\right)$.

اكن ؛ ٤ ،

$$\alpha(x,y,z) = \overbrace{\cos(xyz)}^{A(x,y,z)}\,dx + \overbrace{(x^2 z - y)}^{B(x,y,z)}\,dy + \overbrace{\tan(yz)}^{C(x,y,z)}\,dz$$

$$\beta(x,y,t) = \underbrace{x^2 \cdot \cos y}_{f(x,y,t)}\, dx \wedge dy + \underbrace{(t - 2xy)}_{g(x,y,t)}\, dy \wedge dt.$$

$$\alpha = A\,dx + B\,dy + C\,dz \qquad \beta = f\, dx \wedge dy + g\, dy \wedge dt.$$

$$\alpha \wedge \beta = A\,g\, dx \wedge dy \wedge dt + C\,f\, dz \wedge dx \wedge dy + C\,g\, dz \wedge dy \wedge dt$$

$$\alpha \wedge \beta(x,y,z) =$$

γ

جزء ٢ :

$\boxed{04}$

$$\alpha(x,y,z) = \underbrace{\cos(xyz)}_{A(x,y,z)}dx + \underbrace{(x^2 z - y)}_{B(x,y,z)}dy + \underbrace{\tan(yz)}_{C(x,y,z)}dz.$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = A\,dx + B\,dy + C\,dz.$$

$A(x,y,z) = \cos(xyz)$
$B(x,y,z) = x^2 z - y$
$C(x,y,z) = \tan(yz)$
$f(x,y,z) = x^2\cos y$ $g(x,y,z) = (t - 2xy)$

$$\beta(x,y,t) = \underbrace{x^2\cos y}_{f(x,y,t)}\,dx\wedge dy + \underbrace{(t-2xy)}_{g(x,y,t)}\,dy\wedge dt.$$

$$\beta = f\,dx\wedge dy + g\,dy\wedge dt$$

$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha\wedge\beta)(x,y,z,t) = {} & (t-2xy)\cos(xyz)\,dx\wedge dy\wedge dt \\ & + x^2\cos y\tan(yz)\,dx\wedge dy\wedge dz. \\ & + (t-2xy)\tan(yz)\,dy\wedge dz\wedge dt.\end{aligned}}$$

$$(\beta\wedge\alpha) = (-1)^{1\times 2}\,\alpha\wedge\beta \Rightarrow \boxed{\beta\wedge\alpha = \alpha\wedge\beta}$$

$$d\alpha = dA\wedge dx + dB\,dy + dC\wedge dz.$$

$$d\alpha = \frac{\partial A}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial A}{\partial z}dz\wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x}dx\wedge dy$$
$$+ \frac{\partial B}{\partial z}dz\wedge dy + \frac{\partial C}{\partial x}dx\wedge dz + \frac{\partial C}{\partial y}dy\wedge dz.$$

$$\boxed{\begin{aligned}d\alpha = {} & \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right)dx\wedge dz \\ & + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right)dy\wedge dz\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}d\alpha(x,y,z) = {} & \left[2xz + xz\sin(xyz)\right]dx\wedge dy + \\ & + xy\sin(xyz)\,dx\wedge dz + \\ & + \left[z(1+\tan^2(yz)) - x^2\right]dy\wedge dz\end{aligned}}$$

$$d\beta = df\wedge dx\wedge dy + dg\wedge dy\wedge dt$$

$$d\beta = \frac{\partial f}{\partial t}dt\wedge dx\wedge dy + \frac{\partial g}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dt.$$

$\boxed{05}$ $$d\beta = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy \wedge dt.$$

$$\boxed{d\beta(x,y,z) = -2y\, dx \wedge dy \wedge dt}$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^1 \alpha \wedge d\beta = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta.$$

$$d\alpha \wedge \beta(x,y,z,t) = (2xy - t)\; xy \sin(xyz)\; dx \wedge d$$

$$\alpha \wedge d\beta(x,y,z,t) = -2y \tan(yz)\; dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

$$\boxed{d(\alpha \wedge \beta) = [2y \tan(yz) + (2xy - t)\, xy \sin(xyz)]\; dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt}$$

$$\alpha \wedge \beta(x,y,z,t) = \underbrace{(t - 2xy)\cos(xyz)}_{C_1(x,y,z,t)} dx \wedge dy \wedge dt$$

$$+ \underbrace{x^2 \cos y \tan(xy)}_{C_2(x,y,z,t)} dx \wedge dy \wedge dz + \underbrace{(2xy - t)\tan(yz)}_{C_3(x,y,z,t)}\, dy \wedge dz \wedge dt$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = C_1\, dx \wedge dy \wedge dt + C_2\, dx \wedge dy \wedge dz + C_3\, dy \wedge dz \wedge dt$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = dC_1 \wedge dx \wedge dy \wedge dt + dC_2 \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

$$+ dC_3\, dy \wedge dz \wedge dt.$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = \frac{\partial C_1}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \wedge dt + \frac{\partial C_2}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

$$+ \frac{\partial C_3}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt.$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = \left(\frac{\partial C_1}{\partial z} - \frac{\partial C_2}{\partial t} + \frac{\partial C_3}{\partial x}\right) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

$$\boxed{d(\alpha \wedge \beta) = [xy(2xy - t)\sin(xyz) + 2y \tan(yz)]\; dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt}$$

$\boxed{d(\beta \wedge \alpha) = d(\alpha \wedge \beta)}$

$d\alpha \wedge d\beta \in \Omega_4(\mathbb{R}^5) \Rightarrow d\alpha \wedge d\beta = 0$

$d\beta \wedge d\alpha = (-1)^3 d\alpha \wedge d\beta = \boxed{-d\alpha \wedge d\beta = 0}$.

06

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
فرع الرياضيات السنة الثالثة LMD(S6)

الإمتحان الإستدراك في مادة الهندسة التفاضلية

يوم: الأحد 10 شوال 1439 هـ
الموافق لـ 24 جوان 2018
2017- 2018

التمرين 1: أجب على أحد الأسئلة التالية:

1. عرف $(M,\mathcal{A})$ منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل (بالتفصيل).
2. ليكن $(M,\mathcal{A})$ منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل حيث: $dinM=m$ ، و $\phi\neq B\subset M$ ،عرف B منوعة جزئية من M ذات البعد $k\in IN^*$ (حيث $k\leq m$)، ثم برهن أنه إذا كان B مفتوح من M، إذن B منوعة جزئية من M بعدها m.
3. ليكن $(M,\mathcal{A})$ منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل (حيث: $dinM=m$)، عرف الشكل تفاضلي $w\in\Omega_p^{(k)}(M)$.
4. ليكن $E\supset U$ حيث E فضاء شعاعي، و $w\in\Omega_p(U)$ و $\eta\in\Omega_q(U)$ شكلين تفاضلين، عرف الجداء الخارجي $w\wedge\eta$، ثم أكتب عبارته في حالة البعد المنتهي (أي: $\dim E=n$).

التمرين 2: لنضع $V=\{(x,y,z)\in IR^3;\ x^2+y^2-z^2=1\,;\,x^2-z=5\}$.

1. بين أن V منوعة طبولوجية جزئية من IR^3، وعين بعدها.
2. عين الفضاء المماسي لـ V عند النقطة (x,y,z) (أي: $T_{(x,y,z)}V$).

التمرين 3:

أ- ليكن الشكل التفاضلي: $w\in\Omega_2\left(IR^3-\{(0,0,0)\}\right)$ حيث:

$$w(x,y,z)=\frac{x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^\alpha}$$

أحسب dw ، ثم أوجد قيمة $\alpha\in IR$ حتى يكون w شكل مغلق.

ب- لنعتبر الأشكال التفاضلي التالية: $\alpha(x,y,z)=\cos(x\,y\,z)\,dx+\left(x^2\,z-y\right)dy+\tan(y\,z)\,dz$

$$\beta(x,y,t)=x^2\cos y\,dx\wedge dy+(t-2\,x\,y)\,dy\wedge dt$$

أحسب كل من: $\alpha\wedge\beta$، و $\beta\wedge\alpha$، و $d\alpha$، و $d\beta$، و $d(\alpha\wedge\beta)$، و $d(\beta\wedge\alpha)$، و $d\alpha\wedge d\beta$، و $d\beta\wedge d\alpha$.

التنقيط: [التمرين 1: 06 نقاط] [التمرين 2: 06 نقاط] [التمرين 3: 08 نقاط]

بالتوفيق