كلية العلوم الدقيقة والعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
فرع الرياضيات السنة الثالثة LMD (S6)

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

إمتحان في مادة الهندسة التفاضلية

يوم: الخميس 8 رمضان 1439 هـ
الموافق لـ 24 ماي 2018
2017- 2018

التمرين1 : أجب على أحد الأسئلة التالية:

1. لتكن M و N منوعتان طبولوجيتان قابلتان للتفاضل، حيث: $dinM=m$ و $dinN=n$، و $f:M\to N$ تطبيق، عرف قابلية تفاضل f عند $p\in M$ ، وبرهن أن التعريف مستقل عن اختيار الخرائط، ثم عين التطبيق $df(p)$.

2. ليكن $U\subset E$ فضاء شعاعي ذو بعد منته (أي: $\dim E=n$)، عرف الشكل تفاضلي $w\in\Omega_p^{(k)}(U)$، مع كتابة عبارته العامة (أي في حالة البعد منته).

3. برهن أن كل E فضاء شعاعي ذو بعد منته ($\dim E=n$) هو منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل، مع تعيين بعدها.

التمرين2 :

لنضع $$V=\left\{(x,y,z)\in IR^3;\ xy+xz+yz+2x+2y-z=0\right\}$$

1. بين أن V منوعة طبولوجية جزئية من IR^3، وعين بعدها.

2. عين الفضاء المماسي لـ V عند النقطة $(0,0,0)$ (أي: $T_{(0,0,0)}V$).

التمرين3 :

أ- ليكن الشكل التفاضلي: $w(x,y)=\dfrac{2xy}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\varphi(x)dy\in\Omega_1^{(1)}\left(IR^2\right)$.

أوجد الدالة φ من صنف C^1 ذو المتغير x فقط حتى يكون w شكل مغلوق.

ب- ليكن الشكلان التفاضليان $w\in\Omega_2^{(1)}\left(IR^3\right)$ و $\eta\in\Omega_1^{(1)}\left(IR^3\right)$، أكتب الشكل العام لكل من w و η (مستعملا المتغيرات (x,y,z) والدوال A, B و C ...إلخ لـ w، والدوال P, Q و R ...إلخ لـ η).

أحسب كل من $w\wedge\eta$، و $\eta\wedge w$، و dw، و $d\eta$، و $dw\wedge\eta$، و $w\wedge d\eta$، و $d(w\wedge\eta)$، و $dw\wedge d\eta$، و $d\eta\wedge dw$، و $\eta\wedge\eta$.

ج- أحسب كل من: α و $f^*\alpha$ حيث: $$\alpha(x,y,z)=\frac{2\,dx}{1+x^2}+\frac{z\,dy}{1+y^2z^2}+\frac{y\,dz}{1+y^2z^2}$$

و
$$f\ :IR^2\longrightarrow IR^3$$
$$t\longrightarrow f(u,v)=\left(uv,v^2\right)$$

التنقيط: [التمرين1: 06 نقاط] [التمرين2: 06 نقاط] [التمرين3: 08 نقاط]

بالتوفيق

2. تصحيح الإمتحان الخاص بمادة الهندسة التفاضلية

التمرين 01

السؤال 1 | لتكن M و N م. ط. ق. ث حيث: $\dim M = m$ و $\dim N = n$

وتطبيق $f: M \to N$:

i) تعريف قابلية التفاضل f عند $p\in M$ وتعيين $df(p)$.

1,5

* تعريف التمثيل المحلي $f_{\psi\varphi}$ وفق الخريطتين (U,φ) و (V,ψ) $\Longleftrightarrow$ * توجد خريطة (U,φ) في M و (V,ψ) من N حيث $f(U)\subset V$

$f_{\psi\varphi}: \varphi(U)\subset\mathbb{R}^m \to \psi(V)\subset\mathbb{R}^n$ (0,5)

$f_{\psi\varphi}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ (0,5)

2,5

* f قابل للتفاضل عند $p\in M$ $\Longleftrightarrow$ توجد خريطة (U,φ) في M حيث $p\in U$ (0,5) وخريطة (V,ψ) في N حيث $f(U)\subset V$ (0,5) $f_{\psi\varphi}$ قابل للتفاضل عند $\varphi(p)$ (0,5)

1

ii) تعيين $df(p)$:

$df(p)$ (0,5)

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "df(p)"] \arrow[d, "\theta_\varphi"'] & T_{f(p)}N \arrow[d, "\theta_\psi"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "df_{\psi\varphi}(\varphi(p))"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

(0,5)

$$df(p)=\theta_\psi^{-1}\circ df_{\psi\varphi}(\varphi(p))\circ\theta_\varphi.$$

2,5

iii) البرهان أن التعريف (i) مستقل عن إختيار الخرائط

$(U,\varphi)=(U_i,\varphi_i)$ و $(V,\psi)=(V_l,\psi_l)$

(f قابل للتفاضل عند p) $\Longleftrightarrow$ ($f_{\psi_l\varphi_i}=\psi_l\circ f\circ\varphi_i^{-1}$ قابل للتفاضل عند $\varphi_i(p)$) (0,5)

لتكن خريطة (U_j,φ_j) من M بحيث $p\in U_j$ و (V_k,ψ_k) من N بحيث $f(U_j)\subset V_k$

لنبرهن أن $f_{\psi_k\varphi_j}$ قابل للتفاضل عند $\varphi_j(p)$؟

$$f_{\psi_k\varphi_j}=\psi_{kl}\circ f_{\psi_l\varphi_i}\circ\varphi_{ij}$$ (0,5)

φ_{ij} قابلة للتفاضل عند $\varphi_j(p)$. (0,5)

$f_{\psi_l\varphi_i}$ قابل للتفاضل عند $\varphi_{ij}(\varphi_j(p))=\varphi_i(p)$. (0,5)

ψ_{kl} قابل للتفاضل عند $f_{\psi_l\varphi_i}(\varphi_{ij}(\varphi_j(p)))=\psi_l(f(p))$. (0,5)

السؤال 2

ليكن U و E ف.ش حيث U مفتوح، $\dim E = n$

تعريف $\omega \in \Omega_p^{(k)}(U)$.

0,25 — 0,25

ω هو الشكل التفاضلي من الرتبة p من الصنف C^k على U كل تطبيق من الشكل.

$$\omega : U \xrightarrow{0,25} L_a^p(E) = \Lambda^p(E^*).$$

2

$$x \longmapsto \omega(x) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} c_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}.$$

حيث $c_{i_1\dots i_p} : U \xrightarrow{0,25} \mathbb{R}$.

0,25

حيث $L_a^p(E)$ هي مجموعة التطبيقات p-خطية المتناوبة، أي من شكل

$$\omega(x) : \underbrace{E\times\dots\times E}_{p \text{ مرة}} \xrightarrow{0,25} \mathbb{R}.$$

$$(h_1,\dots,h_p) \longmapsto \omega(x)(h_1,\dots,h_p)$$

0,25

يجب $\omega(x)$ خطي بالنسبة لكل مركبة h_j ، $j=\overline{1,p}$

و $\omega(x)$ متناوب أي يحقق أحد الشروط.

(1) $\forall j=\overline{1,p}$ ، $h_j = h_{j+1}$ ، $\omega(x)(h) = 0$. 0,25

(2) $\forall i,j \in \overline{1,p}$ $h_i = h_j \Rightarrow \omega(x)(h) = 0$

(3) $\forall \sigma \in S_n : \sigma\omega(x) = \varepsilon(\sigma)\,\omega(x)$.

السؤال 3: ت. ف. اش ذو بعد منته على $\mathbb{R}$.

البرهان أن E م. ط. ق. ت. وما نوعه ها.

ليكن $B = (e_i)_{i=\overline{1,n}}$ أساس لـ E أي أن

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad (\Delta)$$

* نزود E بطبولوجيا متلائمة مع بنية فضاء النهائي 0,1

أي التي تجعل التطبيقين مستمرين:

$$E \times E \longrightarrow E \quad (x, y) \longmapsto x + y \quad 0,2 \qquad \Bigg| \qquad \mathbb{R} \times E \longrightarrow E \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \quad (\Delta\Delta)$$

نعرف التطبيق h كما يلي: $h : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$x \longmapsto h(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad 0,2$$

لنبرهن أن $\mathcal{A} = \{(E, h)\}$ أطلس قابل للتفاضل

* E مفتوح 0,2

** h مستمرة على E 0,2

لدينا $h = (P_1, \dots, P_n)$ إسقاطها رقم i

$P_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$

مستمرة على E $\quad x \longmapsto P_i(x) = \lambda_i$

*** h تقابل من E نحو $\mathbb{R}^n$ 0,2

من علاقة (Δ) لدينا التقابل

**** h^{-1} مستمرة على $\mathbb{R}^n$ $\quad h^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto h^{-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad 0,2$$

h^{-1} مستمرة على E حسب $(\Delta\Delta)$. 0,2

(E, h) خريطة على E

$\mathcal{A}$ متوافق على E و $\mathbb{R}^n$

ومنه $A=\{(E,h)\}$ أطلس قابل للتفاضل (يحوي خريطة واحدة)

إذن $(E,\mathcal{U})$ م.ط.ف.ت و $\dim E = n$.

1

التمرين 2

$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ xy+xz+yz+2x+2y-z=0\}$.

أ/ لنبرهن أن V م.ج من $\mathbb{R}^3$ وتعيين بعدها.

لنضع

$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$

$(x,y,z)\longmapsto f(x,y,z)=xy+xz+yz+2x+2y-z$

لدينا $V=f^{-1}(\{0\})$ يكفي أن نبرهن أن 0 نقطة عادية لـ f

$\iff$ (من أجل كل $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$: $f(x,y,z)=0$ نبرهن أن $df(x,y,z)$ غامر من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}$)

لدينا f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^3$.

و $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : Df(x,y,z):\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$

$df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3)=(y+z+2)h_1+(x+z+2)h_2+(x+y-1)h_3$

. من أجل كل $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ، $f(x,y,z)=0 \iff \left(\begin{array}{l} xy+xz+yz \\ +2x+2y-z=0 \end{array}\right)$ —(1)

$\operatorname{Im} df(x,y,z)\subset\mathbb{R}$ يكفي أن نبرهن أن $\dim \operatorname{Im} df(x,y,z)\neq 0$

من جهة أخرى $\operatorname{Im} df(x,y,z)=\{0\} \iff df(x,y,z)=0$ تطبيق انعدوم

$df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3)=0 \iff \begin{cases} y+z+2=0 \\ x+z+2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \iff (x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$

2

بالتعويض في طرف أيسر العلاقة (1) نجد

$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)\neq 0$

وهو المطلوب

0,12 0,12 0,12 0,12 0,12 0,12 0,12 0,25 0,25 [illegible] 0,25 0,25 0,25 0,25

حسب نظرية الغمر العادية V م.ع من $\mathbb{R}^3$

و $\dim V = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathbb{R} = 2$. (0,25)

④ تعيين $T_{(0,0,0)}V$: $T_{(0,0,0)}V = \ker df(0,0,0)$ (0,25)

$$T_{(0,0,0)}V = \{(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3,\ df(0,0,0)(h_1,h_2,h_3)=0\}$$

$$T_{(0,0,0)}V = \{(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3,\ 2h_1+2h_3-h_3=0\}$$

معادلة مستوي في الفضاء

التمرين 3

الجزء 1

$$w(x,y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}\,dx + \varphi(x)\,dy.$$

إيجاد φ حتى يكون w شكل مغلق $\Longleftrightarrow dw = 0$. (0,25)

$$dw(x,y) = \left[\frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \varphi'(x)\right] dx\wedge dy \quad (0,25)$$

$$dw = 0 \Longleftrightarrow \varphi'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad (0,25)$$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = \frac{-1}{1+x^2}. \quad (0,25)$$

الجزء 2

(0,25)

- $w = A\,dx\wedge dy + B\,dx\wedge dz + C\,dy\wedge dz \in \Omega_2^{(1)}(\mathbb{R}^3)$

(0,25)

- $\eta = P\,dx + Q\,dy + R\,dz \in \Omega_1^{(1)}(\mathbb{R}^3)$.
- $w\wedge\eta = (AR - BQ + CP)\,dx\wedge dy\wedge dz$ (0,25)
- $\eta\wedge w = w\wedge\eta$ (0,25)

$$\cdot\, dw = \left[\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial x}\right] dx \wedge dy \wedge dz \quad (0,25)$$

$$\cdot\, d\eta = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx \wedge dz$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz \,. \quad (0,25)$$

$$\Omega_4(\mathbb{R}^3) \ni \overset{(0,25)}{dw \wedge \eta} = \overset{(0,25)}{w \wedge d\eta} = \overset{(0,25)}{d(w \wedge \eta)} = 0$$

$$\Omega_5(\mathbb{R}^3) \ni \overset{(0,25)}{dw \wedge d\eta} = \overset{(0,25)}{d\eta \wedge dw} = 0$$

$$\overset{(0,25)}{\eta \wedge \eta} = 0 \quad (1,5)$$

الجزء ج

$$\alpha(x,y,z) = \underbrace{\frac{2}{1+x^2}}_{A(x,y,z)} dx + \underbrace{\frac{z}{1+y^2z^2}}_{B(x,y,z)} dy + \underbrace{\frac{y}{1+y^2z^2}}_{C(x,y,z)} dz$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longmapsto f(u,v) = (u, v, v^2).$$

$$f_1(u,v) = u, \quad f_2(u,v) = v, \quad f_3(u,v) = v^2. \quad (0,1)$$

$$df_1(u,v) = du, \quad df_2(u,v) = dv, \quad df_3(u,v) = 2v\,dv$$

$$f^*\alpha = (A \circ f)\, df_1 + (B \circ f)\, df_2 + (C \circ f)\, df_3 \,. \quad (0,25)$$

$$f^*\alpha(u,v) = \frac{2}{1+u^2} du + \frac{3v^2}{1+v^6} dv \quad (0,25)$$