ملخص الفصل الثاني: المنوعات الجزئية في $\mathbb{R}^n$

1.2 الغمر [Plongement]

ليكن $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ من صنف C^1 على U مفتوح في $\mathbb{R}^n$.

1.2 تعريف: تطبيق غمر

f غمر على U $\Leftrightarrow$ (1) f غمرسية على U. (2) f متباين من U نحو $\mathbb{R}^m$

2.2 تعريف: تطبيق غمر منتظم

f غمر منتظم على U $\Leftrightarrow$ (1) f غمر على U. (2) f مستشاكل من U نحو $f(U)$

[حيث: $f(U)$ مزود بطبولوجية أثر على $\mathbb{R}^m$]

3.2 ملاحظة: من أجل أن نبرهن أن f غمر منتظم على U يكفي أن نبرهن أنه غمر على U و f^{-1} مستمرة على $f(U)$.

2.2 منوعة جزئية: [نرمز لها بـ: م.ج].

4.2 تعريف: منوعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ بعدها p

$M \subset \mathbb{R}^n$ و $p \leq n$.

M منوعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ بعدها p $\dim M = p$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل $x \in M$، يوجد $U \subset \mathbb{R}^n$ جوار مفتوح لـ x_0، يوجد $V \subset \mathbb{R}^n$ جوار مفتوح لـ O، يوجد φ تشاكل تفاضلي من U نحو V بحيث $\varphi(x_0) = 0$ و $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p})$ ـــ (1)

(1) $\Leftrightarrow$ $(x \in U \cap M) \Leftrightarrow (\varphi_{p+1}(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0)$ ـــ (2)

(2) $\Leftrightarrow$ $(x \in U \cap M) \Leftrightarrow (\varphi_{i_1}(x) = \dots = \varphi_{i_{n-p}}(x) = 0)$

$I_{n-p} = \{1, \dots, n-p\}$ / $i: I_{n-p} \to I_{n-p}$, $k \mapsto i_k$ ، $i \in S_{n-p}$ تبديلة

5.2 ملاحظة: نقول أن M م.ج ما صنفها C^k من $\mathbb{R}^n$ إذا كانت φ من صنف C^k من U نحو V $(k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\})$.

• p بعد المنوعة الجزئية وحيد.

3.2 منوعة جزئية معرفة بوسيط.

6.2 تعريف: م.ج معرفة بوسيط.

ليكن U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تطبيق. نقول أن M م.ج من $\mathbb{R}^n$ معرفة بوسيط f إذا تحقق: $M = f(U)$.

7.2 نظرية:

ليكن U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تطبيق من صنف C^1 على U.

f غمر منتظم على U $\Rightarrow$ M م.ج بعدها n معرفة بوسيط f

8.2 تعريف: م.ج معرفة محليا بوسيط.

M م.ج معرفة محليا بوسيط $\Leftrightarrow$ من أجل كل $x \in M$، M معرفة محليا في جوار لـ x بوسيط ψ_x

$\Updownarrow$

من أجل كل $x \in M$، يوجد $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^p$ مفتوح جوار لـ O و $U_x \subset \mathbb{R}^n$ جوار لـ x وتطبيق $\psi_x: \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ بحيث $\psi_x(\tilde{U}) = U \cap M$.

9.2 نظرية

M م.ج من $\mathbb{R}^n$ $\dim M \leq p$ $\Rightarrow$ M م.ج معرفة محليا بوسيط غمر منتظم،

$\Updownarrow$

M م.ج معرفة محليا بوسيط غمر + مفتوح على M مزودة بطبولوجية الأثر على $\mathbb{R}^n$

10.2 ملاحظة

عندما تكون M م.ج معرفة بوسيط غمر إذن فهو غمرسية نقول أن M م.ج معرفة بغمرسة.

4.2 منوعة جزئية معرفة بمعادلات

11.2 تعريف

ليكن U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

بحيث: $a \in f(U)$، f قابل للتفاضل على U.

نقول أن a نقطة عادية point régulier لـ f إذا كانت f غمرية على B المعرفة كما يلي:

$B = f^{-1}(\{a\}) = \{x \in U : f(x) = a\}$.

تابع لملخص الفصل الثاني: المنوعات الجزئية في $\mathbb{R}^n$.

2.12: تطبيق

$M \subset \mathbb{R}^n$ م. ج. من $\mathbb{R}^n$ بعدها p $(p \leq n)$ إذن من أجل كل $x_0 \in M$ يوجد مفتوح $U \subset \mathbb{R}^n$ جوار لـ x_0 بحيث: 0 نقطة عادية لـ f و $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$

• نقول أن M م. ج. معرفة محليا بالمعادلة $f = 0$ ،

2.13 تطبيق :

U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و $f : U \to \mathbb{R}^m$ بحيث: 0 نقطة عادية لـ f إذن: $M = f^{-1}(\{0\})$ م. ج. من $\mathbb{R}^n$ بعدها $p = n - m$.

2.14 ملاحظة :

1/ في الحالة العامة إذا كان: $z \in f(U)$ و z نقطة عادية لـ f إذن $f^{-1}(\{z\})$ م. ج. من $\mathbb{R}^n$ وبعدها $p = n - m$ ،

2/ إذا كان f من صنف C^k على U إذن M م. ج. من صنف C^k .

2.5 فضاء المماس لمنوعة جزئية

2.15 توطئة

من أجل $x \in \mathbb{R}^n$ لتضع المجموعة ،

$\{x\} \times \mathbb{R}^n = \{(x, u), u \in \mathbb{R}^n\}$

مزود بالعمليتين التاليتين.

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

$(x, u) + (x, v) = (x, u + v).$

$\lambda (x, u) = (x, \lambda u)$

فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ متشاكل مع $\mathbb{R}^n$ ونرمز بـ $\mathbb{R}^n \equiv \{x\} \times \mathbb{R}^n$

2.16 تعريف: شعاع مماس لمنوعة جزئية

ليكن M م. ج. من $\mathbb{R}^n$ بعدها p و $x_0 \in M$ ، شعاع $(x_0, u) \in \{x_0\} \times \mathbb{R}^n$ نقول أنه شعاع مماس للمنوعة الجزئية M في x_0 إذا وفقط إذا وجد I مجال جوار لـ 0 في $\mathbb{R}$ ومنحنى $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ بحيث ،

(1) $\gamma(I) \subset M$

(2) γ من صنف C^1 على I .

(3) $\gamma(0) = x_0$ ،

(4) $\gamma'(0) = u$.

2.17 ترميز:

مجموعة الأشعة المماسية للمنوعة الجزئية $M \subset \mathbb{R}^n$ في النقطة x_0 نرمز لها بـ $T_{x_0}M$ ،

$$T_{x_0}M = \{u \in \mathbb{R}^n ; \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n, \gamma \in C^1(]-\varepsilon, \varepsilon[)$$
$$\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset M, \gamma(0) = x_0, \gamma'(0) = v\}$$

2.18 توطئة :

من أجل كل $x_0 \in M$ ، $T_{x_0}M$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^n$. $\dim T_{x_0}M = \dim M = p$ ،

2.19 توطئة : من أجل $x_0 \in M$ ، M م. ج. من $\mathbb{R}^n$ لنعرف المجموعة $\mathcal{K}_{x_0}$ كما يلي ،

$$\mathcal{K}_{x_0} = \{\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n, \gamma \in C^1(]-\varepsilon, \varepsilon[),$$
$$\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset M ; \gamma(0) = x_0\}.$$

نعرف العلاقة "$\sim$" في $\mathcal{K}_{x_0}$ كما يلي

$$(\gamma_1 \sim \gamma_2) \Leftrightarrow (\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)).$$

العلاقة "$\sim$" علاقة تكافؤ في $\mathcal{K}_{x_0}$ وكل عنصر من $(\mathcal{K}_{x_0})/_{\sim}$ يمثل نفس الشعاع المماس u.

يمكننا أن نكتب: $(\mathcal{K}_{x_0})/_{\sim} \equiv T_{x_0}M$.

2.20 تعريف: فضاء الليفي المماس ،

M م. ج. من $\mathbb{R}^n$ بعدها p المجموعة التي نرمز لها بـ TM والمعرفة كما يلي :

$$TM = \bigcup_{x\in M} T_x M$$

تسمى الفضاء الليفي المماس لـ M .

2.21 ملاحظة :

1) TM ليس دائما فضاء شعاعي .

2) $x_1 \neq x_2$ ، إذن $T_{x_1}M \cap T_{x_2}M = \phi$.

2.22 نظرية : فضاء مماس لمنوعة ج معرفة بوسيط

U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ ، $f: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تطبيق من صنف C^1 على U ، $f: U$ غمر منتظم على U ، إذن

$M = f(U)$ م.ج. من $\mathbb{R}^n$ بعدها n ولدينا

$$T_{f(x)} M = d_x f(\mathbb{R}^p), \forall x\in U$$

$$TM = df(\mathbb{R}^p) = \bigcup_{x\in U} d_x f(\mathbb{R}^p).$$

2.23 نظرية : فضاء المماس لمنوعة ج معرفة بمعادلات

U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و $f: U \to \mathbb{R}^m$.

$z \in f(U)$ و z قيمة عادية لـ f ، إذن

$M = f^{-1}(\{z\})$ م.ج. من $\mathbb{R}^n$ بعدها $p = n-m$

$$T_x M = \ker(d_x f), \forall x \in M$$ و

$$TM = \ker(df) = \bigcup_{x\in M} \ker(d_x f).$$

2.6 منوعة جزئية ذات حافة

2.24 نظرية : م.ج. من $\mathbb{R}^n$ ذات حافة

$M \subset \mathbb{R}^n$ و $p \le n$:

{M م.ج. من $\mathbb{R}^n$ ذات حافة بعدها p} $\Leftrightarrow$ {من أجل $x_0 \in M$ ؛ يوجد $U \subset \mathbb{R}^n$ جوار مفتوح لـ x_0 ويوجد $V \subset \mathbb{R}^n$ جوار مفتوح لـ 0 ، يوجد φ تشاكل تفاضلي من U نحو V بحيث : i] $\varphi(x_0) = 0$ ، ii] $\varphi(U\cap M) = V \cap (H_+^p \times \{0\}^{n-p})$ (3)}

حيث: $H_+^p = \mathbb{R}^{p-1}\times\mathbb{R}_+ = \{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p, x_p \geq 0\}$

(4) $(x \in U\cap M) \Leftrightarrow (\varphi_p(x) \geq 0, \varphi_{p+1}(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0) \Leftrightarrow$ (3)