حل السلسلة رقم (1) حول الحساب التفاضلي لمادة: الهندسة التفاضلية

حل التمرين 01: العلاقة بين الاشتقاق والتفاضل

لتكن الدالة $f:]a,b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

المطلوب: إيجاد العلاقة بين إشتقاق وتفاضل الدالة f عند النقطة x_0.

لنبرهن أن: أولا:

$\left(f \text{ قابل للاشتقاق عند } x_0\right) \Rightarrow \begin{cases} f \text{ قابل للتفاضل عند } x_0 \\ \forall h\in\mathbb{R}: df_{x_0}(h)=f'(x_0)h \end{cases}$ ؟

لدينا:

$\begin{cases} f \text{ قابل للاشتقاق} \\ \text{عند } x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \right)$

نستعمل تبديل المتغير $h = x - x_0$ ومنه $h \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

حسب تعريف النهاية

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall h,\ |h|<\delta$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0).h}{|h|} \right| < \varepsilon.$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)-f'(x_0).h}{|h|} = 0$$

إذن f قابل للتفاضل عند x_0 ولدينا:

$\forall h\in\mathbb{R},\quad df_{x_0}(h) = f'(x_0).h$

ثانيا:

$\begin{cases} f \text{ قابلة للتفاضل} \\ \text{عند النقطة } x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ قابلة للاشتقاق} \\ \text{عند } x_0 \text{ ولدينا} \\ f'(x_0) = df_{x_0}(1) \end{cases}$ ؟

لنفرض أن f قابلة للتفاضل عند النقطة x_0

ومنه يوجد تطبيق خطي $df_{x_0}\in L(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-df_{x_0}(h)}{|h|} = 0.$$

لدينا $L(\mathbb{R},\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ ومنه

$df_{x_0}\in L(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Rightarrow \exists a\in\mathbb{R},\ df_{x_0}(h) = a.h$

إذن،

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-a.h}{|h|} = 0.$$

حسب تعريف النهاية

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0\ \forall h.\ |h|<\delta.$

$$\left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-a.h}{|h|} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a \right| < \varepsilon$$

إذن

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند x_0

ولدينا $f'(x_0) = a = df_{x_0}(1)$.

حل التمرين 02: تفاضل التطبيق الثابت والمطابق

أ) البرهان أن: $\varphi: E \to E$، دالة ثابتة في E.

$x \mapsto \varphi(x) = a$ ، $a\in E$.

قابلة للتفاضل على E وأن $d\varphi = 0$ في E؟

نقوم بحساب النهاية من أجل $x\in E$:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)-0}{|h|} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\cancel{a}-\cancel{a}}{|h|} = 0$$

إذن φ قابلة للتفاضل عند $x\in E$ ولدينا

$\forall h\in E,\quad d\varphi_x(h) = 0$

ومنه φ دالة الثابت على E قابلة للتفاضل على E وتفاضلها هو الدالة المعدومة.

أي $d\varphi = 0$ على E.

ب) البرهان أن الدالة المطابقة على E، Id_E قابلة للتفاضل على E، وأن:

$\forall x\in E,\quad d(Id_E)_x = Id_E$

من أجل كل $x\in E$ نقوم بحساب النهاية:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{Id_E(x+h)-Id_E(x)-Id_E(h)}{|h|} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}-\cancel{h}}{|h|} = 0$$

ومنه Id_E الدالة مطابقة على E قابلة التفاضل على E ولدينا $\forall x\in E,\ d(Id_E)_x = Id_E$

حل التمرين 03: تفاضل التطبيق الخطي.

$f: E \to F$ تطبيق خطي، E و F ف.ش على K،

$\dim E < +\infty$ و $\dim F < +\infty$ إذن f قابل للتفاضل على E، ولدينا، $\forall x\in E,\ df_x = f$.

فمن أجل كل $x\in E$ نقوم بحساب النهاية:

$$\lim_{\substack{h\neq 0\\ h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)-f(h)}{|h|} =$$

بما أن f خطي إذن

$$= \lim_{\substack{h\neq 0\\ h\to 0}} \frac{\cancel{f(x)}+\cancel{f(h)}-\cancel{f(x)}-\cancel{f(h)}}{|h|} = 0.$$

ومنه f تطبيق الخطي قابل للتفاضل على E

ولدينا $\forall x\in E,\ df_x = f$.

حل التمرين 04: حساب التفاضلي.

لتكن دالة f معرفة على $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}.\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

دراسة إستمرار وقابلية التفاضل على E وكذلك هل f من صنف C^1 على $\mathbb{R}^2$؟.

f دالة ناطقة كثير حدود بسطا على كثير حدود في المقام إذن f مستمرة وقابلة للتفاضل ومن صنف C^1 (بل من صنف C^∞) على مجموعة تعريف الدالة ناطقة وهنا على $\mathbb{R}-\{(0,0)\}$ ومنه يكفي الدراسة عند النقطة $(x_0,y_0)=(0,0)$.

* دراسة إستمرار عند $(0,0)$؟:

لابد أن نبرهن أن $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ ؟

أي لنبرهن: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ ؟

(ط1) طريقة الحصر:

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3y}{2xy}\right|$$

[باستعمال القاعدة $a^2+b^2 \geq 2ab$]

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}x^2$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$$

ومنه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

إذن f مستمرة عند $(0,0)$

(ط2) طريقة الإحداثيات القطبية: $(x,y)\xrightarrow[r\to 0]{}(0,0)$ ، $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\sin^3\theta\cos\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2\sin^3\theta\cos\theta = 0.$$

وهو المطلوب.

دراسة قابلية التفاضل الدالة f عند $(0,0)$:

حسب ما سبق f قابلة للتفاضل على $\mathbb{R}-\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}-\{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}-\{(0,0)\}$$

لنبرهن أن f قابلة للإشتقاق الجزئي بالنسبة لـ x (على التوالي بالنسبة لـ y) عند $(0,0)$ أي أن $\frac{\partial f}{\partial x}$ معرفة عند $(0,0)$ (على التوالي: $\frac{\partial f}{\partial y}$ معرفة عند $(0,0)$).

تذكير:

f قابلة للإشتقاق الجزئي بالنسبة لـ x عند (x_0,y_0) $\Longleftrightarrow$ $\lim_{\substack{h\neq 0\\ h\to 0}} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = l_1$ نهاية موجودة و $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=l_1$

f قابلة للإشتقاق الجزئي بالنسبة لـ y عند (x_0,y_0) $\Longleftrightarrow$ $\lim_{\substack{h\neq 0\\ h\to 0}} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = l_2$ نهاية موجودة و $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=l_2$

f قابلة للتفاضل عند (x_0,y_0) $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجودة عند (x_0,y_0)

ولدينا

$$df_{(x_0,y_0)}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k$$

$\forall (h,k)\in\mathbb{R}^2$

تابع حل السلسلة رقم (01) حول الحساب التفاضلي لمادة الهندسة التفاضلية

. دراسة قابلية إشتقاق الجزئي لـ f بالنسبة لـ x عند $(0,0)$ [أي هل $\frac{\partial f}{\partial x}$ موجودة عند $(0,0)$؟]

نقوم بحساب النهاية:

$$\lim_{\substack{h\neq 0\\ h\to 0}} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{\substack{h\neq 0\\ h\to 0}} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = \lim_{\substack{h\neq 0\\ h\to 0}} \frac{0}{h} = 0$$

إذن f تقبل إشتقاق الجزئي بالنسبة لـ x عند $(0,0)$ ولدينا $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

. دراسة قابلية إشتقاق الجزئي لـ f بالنسبة لـ y عند $(0,0)$ [أي هل $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجودة عند $(0,0)$؟]

نقوم بحساب النهاية:

$$\lim_{\substack{k\neq 0\\ k\to 0}} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{\substack{k\neq 0\\ k\to 0}} \frac{\frac{0}{k^2}-0}{k} = \lim_{\substack{k\neq 0\\ k\to 0}} \frac{0}{k} = 0$$

إذن f تقبل إشتقاق الجزئية بالنسبة لـ y عند $(0,0)$ ولدينا $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

إذن:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

إذن $\boxed{f \text{ قابلة للتفاضل على } \mathbb{R}^3}$

* دراسة كون f من صنف C^1 على $\mathbb{R}^2$؟

حسب ما سبق f من صنف C^1 على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ يكفي الدراسة عند $(0,0)$ من أجل ذلك لابد أن نبرهن أن $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرة عند النقطة $(0,0)$ أي نبرهن أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \ ?$$

يمكننا إستعمال إحدى طرق المعروفة مثل: الحصر أو الإحداثيات القطبية

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta;\ (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow r\to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^5(\cos^4\theta\sin\theta + 3\cos^2\theta\sin^3\theta)}{r^4\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}_{1}} = 0$$

وهو المطلوب

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^5(\cos^5\theta - \cos^3\theta\sin^2\theta)}{r^4\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}_{1}} = 0$$

وهو المطلوب، ومنه $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ مستمرتين في النقطة $(0,0)$ ومنه f من صنف C^1 على $\mathbb{R}^2$.

ب) نفس السؤال مع الدالة g معرفة من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}$:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2}, & \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\} \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

نفس الطريقة في جزء (أ) مع الدالة f.

g دالة ناطقة كثير حدود في بسطها وكثير حدود في المقام إذن f مستمرة وقابلة للتفاضل ومن صنف C^1 (بل من صنف C^∞) على $\mathbb{R}-\{(0,0)\}$ ويبقى الدراسة عند النقطة $(0,0)$.

$$\left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3y}{2x^2y}\right| \leq \frac{1}{2}|x|.$$

إذن f مستمرة عند $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y^3 - x^6y}{(x^4+y^2)^2}$$

نحسب نهاية $\frac{\partial f}{\partial x}$ لما (x,y) تؤول إلى $(0,0)$ على المسارين $y=x$ و $y=x^2$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^8}{4x^8} = \frac{1}{2}} \ (1)$$