كلية العلوم الدقيقة والعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
فرع الرياضيات السنة الثالثة LMD (S6)

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

الإمتحان الإستدراكي في مادة الهندسة التفاضلية

يوم: 2015/06/01
المدة: ساعة ونصف
2014 - 2015

التمرين01: لنضع: $V=\left\{(x,y,z)\in IR^3;\ \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2=1\right\}$

1. برهن أن $V\neq\phi$، ثم بين أن V منوعة طبولوجية جزئية من IR^3، وعين بعدها.
2. عين الفضاء المماسي لـ V عند النقطة (x,y,z) (أي: $T_{(x,y,z)}V$).

التمرين02:

ليكن الشكل التفاضلي $w\in\Omega_1^{(1)}\left(IR^2\right)$، المعرف كما يلي:

$$w(x,y)=\frac{2xy}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\varphi(x)dy\ ;\forall(x,y)\in IR^2 .$$

1. أوجد التطبيق φ من صنف $C^1(IR)$، الذي يحقق $\varphi(0)=-1$ حتى يكون w شكل مغلوق.
2. من أجل φ التي تحصلت عليها في السؤال1، برهن بطريقتين مختلفتين أن w شكل دقيق.

التمرين03:

أ- لتكن M و N منوعتان طبولوجيتان قابلتان للتفاضل حيث: $dinM=m$ و $dinN=n$،
و $\varphi:M\to N$ تطبيق قابل للتفاضل.

1. عرف التطبيق φ^* بالتفصيل.
2. أكتب عبارة $w\in\Omega_p(N)$، ثم عبارة φ^*w.

ب- لنضع: $U=IR_+^*\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f:U\longrightarrow IR^3$$
$$(r,\theta,\varphi)\mapsto f(r,\theta,\varphi)=(r\cos\theta\cos\varphi,r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\varphi)$$

$$w(x,y,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$$

1. أحسب كل f^*w.

التنقيط:[التمرين1: 06 نقاط] [التمرين2: 06 نقاط] [التمرين3 أ: 3.5 نقاط] [التمرين3 ب: 4.5 نقاط]

بالتوفيق

تصحيح الامتحان الاستدراكي الخاص بمادة الهندسة التفاضلية ليوم 01/06/2015

حل التمرين 01 : ليكن: $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1\}$

1/ البرهان أن $V\neq\phi$ لدينا $(0,\sqrt{3},0)\in V$ إذن $\boxed{V\neq\phi}$ 0,5

البرهان أن V منوعة طبولوجية جزئية من $\mathbb{R}^3$ وتعيين بعدها.

لنضع:

0,5 $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$

$X=(x,y,z)\longmapsto f(x,y,z)=(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2$

لدينا $f^{-1}(\{1\})=V$ 0,5 ، يكفي أن نبرهن أن 1 قيمة عادية لـ f 0,25

$\Updownarrow$

ولهذا نبرهن أن من أجل كل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})$ لدينا $df(x,y,z)$ غامر 0,25 0,5

f قابل للتفاضل على $D=(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})\times\mathbb{R}$ ولدينا من أجل $X\in D$: $df(X):\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$

$$h=(h_1,h_2,h_3)\longmapsto df(X)(h)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(X),\frac{\partial f}{\partial y}(X),\frac{\partial f}{\partial z}(X)\right)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}$$

$$df(X)(h)=\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}-2),\ \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}-2),\ 2z\right)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{2(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=2-\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\boxed{df(X)(h)=\frac{2(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}(xh_1+yh_2)+2zh_3}\ 0,5$$

من أجل $(x,y,z)\in f^{-1}(\{1\})\Leftrightarrow f(x,y,z)=1\Leftrightarrow(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1\Rightarrow$ $z\neq0$ أو $\sqrt{x^2+y^2}-2\neq0$

$$df(X)(h)=\left(2x-\frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)h_1+\left(2y-\frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)h_2+2zh_3$$

$\Rightarrow$ 0,25 $\boxed{df(x,y,z)\neq0}$

$\Rightarrow$ 0,25 $\boxed{\dim[\mathrm{Im}\,df(x,y,z)]\geq1}$

من جهة أخرى: $\mathrm{Im}\,df(x,y,z)\subset\mathbb{R}$ 0,25 $\Rightarrow$ 0,25 $\boxed{\dim[\mathrm{Im}\,df(x,y,z)]\leq1}$

إذن $\boxed{\dim[\mathrm{Im}\,df(x,y,z)]=1}$ 0,5 ومنه المطلوب.

$\dim V=\dim\mathbb{R}^3-\dim\mathbb{R}=3-1\Rightarrow\boxed{\dim V=2}$ 0,5

2/ تعيين الفضاء $T_{(x,y,z)}V$ ؛

$\boxed{T_{(x,y,z)}V=\mathrm{Ker}[df(x,y,z)]}$ 0,5

$T_{(x,y,z)}V=\{(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3:\ df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3)=0\}.$

$$\boxed{T_{(x,y,z)}V=\left\{(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3:\ \frac{2(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}(xh_1+yh_2)+2zh_3\right\}}.\ 0,5$$

معادلة مستوي في الفضاء.

حل التمرين 02 : ليكن: $\omega(x,y)=\frac{2xy}{(1+x^2)^2}dx+\varphi(x)dy,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 0,5

1) إيجاد φ حتى يكون ω شكل مغلوق حيث $\varphi(0)=-1$.

ω شكل مغلوق $\Leftrightarrow d\omega=0$. لنضع.. $a(x,y)=\frac{2xy}{(1+x^2)^2}$ ، $\omega=a\,dx+\varphi\,dy$

ومنه $\boxed{d\omega=da\wedge dx+d\varphi\wedge dy=\left(\varphi'-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy=0}\Leftrightarrow\varphi'(x)=\frac{\partial a}{\partial y}(x,y).$

$\Rightarrow\boxed{\varphi'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}}$ 0,5 $\Rightarrow\varphi(x)=\int\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx=\boxed{\frac{-1}{1+x^2}}+c=\varphi(x)$ 0,5 0,5

$\varphi(0)=-1+c=-1\Leftrightarrow\boxed{c=0}$ 0,5 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\varphi(x)=\frac{-1}{1+x^2}}$

تابع لتصحيح الإمتحان الاستدراكي الخاص بمادة الهندسة التفاضلية ليوم 01/06

ج) البرهان بطريقتين مختلفتين أن w شكل دقيق.

الطريقة 01: بما أن w معرف على $\mathbb{R}^2$، و $\mathbb{R}^2$ محدب ومنه فهو نجمي بالنسبة لجميع نقاطه، إذن حسب نظرية بوانكاريه w مغلوق $\Leftrightarrow$ w دقيق. (0.1) (0.1)

الطريقة 02: طريقة الحساب المباشر: f موجودة: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث $df = w$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = w \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} & (1) \quad (0.1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{1+x^2} & (2) \quad (0.1) \end{cases}$$

لنكامل ② بالنسبة لـ y نجد: $f(x,y) = \frac{-y}{1+x^2} + g(x)$ ——(3) (0.1)

لنشتق ③ بالنسبة لـ x نجد: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} + g'(x)$ ——(4) (0.1)

بالمطابقة بين ① و ④ نجد: $g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c$

يكفي أخذ $C = 0$ أي $g(x) = 0$ ومنه بالتعويض في ③ نجد

$$\boxed{f(x,y) = \frac{-y}{1+x^2}} \quad (0.1)$$

ومنه w شكل دقيق.

حل التمرين 03: أ- لتكن M و N م. ط. ق. ت حيث $\dim M = m$ و $\dim N = n$.

و $\varphi: M \to N$ تطبيق قابل للتفاضل

أ) تعريف φ^*: (0.5) (0.1)

$$\varphi^*: \Omega_p(N) \longrightarrow \Omega_p(M)$$
$$w \longmapsto \varphi^* w \in \Omega_p(M)$$

(0.1)

$$\boxed{\forall x \in M: (\varphi^* w)(x)(h_1, \ldots, h_p) = w(\varphi(x))(d\varphi(x)h_1, \ldots, d\varphi(x)h_p) \;; \forall h_i \in T_x M,\ i = \overline{1,p}}$$

$$\varphi: M \longrightarrow N \Rightarrow d\varphi(x): T_x M \to T_{\varphi(x)} N.$$

$$x \in M \Rightarrow \varphi(x) \in N \ (0.1) \quad ; \quad h_i \in T_x M \Rightarrow d\varphi(x) h_i \in T_{\varphi(x)} N \ (0.1)$$

ب) عبارة $w \in \Omega_p(N) \Leftrightarrow$ (0.1)

$$\boxed{w = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} C_{i_1, \ldots, i_p} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}}$$

حيث $C_{i_1, \ldots, i_p}: N \longrightarrow \mathbb{R}$.

ومنه: (0.1)

$$\boxed{\varphi^* w = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} (C_{i_1, \ldots, i_p} \circ \varphi) \, d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p}}$$

ب- لنضع $U = \mathbb{R}_+^* \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$ و $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$(r,\theta,\varphi) \mapsto f(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

لنضع $f_1(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta\cos\varphi$، $f_2(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi$، $f_3(r,\theta,\varphi) = r\sin\varphi$.

و

$$w(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz.$$

لنضع:

$$a(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{y}{x^2+y^2}\right),\ b(x,y,z) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x}{x^2+y^2}\right),\ c(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

ومنه $w = a\,dx + b\,dy + c\,dz$.

حساب $f^* w$: (0.1)

$$\boxed{f^* w = (a \circ f)\, df_1 + (b \circ f)\, df_2 + (c \circ f)\, df_3} \quad (1)$$

لدينا:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi = r^2\cos^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = r^2\cos^2\varphi}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r} \quad (r > 0)$$

تصحيح الامتحان الاستدراكي الخاص بمادة الهندسة التفاضلية ليوم ٠١/6/٢٠٢١م

$$(a\circ\varphi)(r,\theta,\varphi)=\frac{\cancel{r}\cos\theta\cos\varphi}{\cancel{r}}+\frac{\cancel{r}\sin\theta\,\cancel{\cos\varphi}}{r^{\cancel{2}}\cos^{\cancel{2}}\varphi}\Rightarrow\boxed{(a\circ\varphi)(r,\theta,\varphi)=\cos\theta\cos\varphi+\frac{\sin\theta}{r\cos\varphi}}\quad(2)$$

$$(b\circ\varphi)(r,\theta,\varphi)=\frac{\cancel{r}\sin\theta\cos\varphi}{\cancel{r}}-\frac{\cancel{r}\cos\theta\,\cancel{\cos\varphi}}{r^{\cancel{2}}\cos^{\cancel{2}}\varphi}\Rightarrow\boxed{(b\circ\varphi)(r,\theta,\varphi)=\sin\theta\cos\varphi-\frac{\cos\theta}{r\cos\varphi}}\quad(3)\quad 0,1$$

$$(c\circ\varphi)(r,\theta,\varphi)=\frac{\cancel{r}\sin\varphi}{\cancel{r}}\Longrightarrow\boxed{(c\circ\varphi)(r,\theta,\varphi)=\sin\varphi}\quad(4)\quad 0,1$$

$$d\varphi_1(r,\theta,\varphi)=\cos\theta\cos\varphi\,dr-r\sin\theta\cos\varphi\,d\theta-r\cos\theta\sin\varphi\,d\varphi\quad(5)\quad 0,1$$

$$d\varphi_2(r,\theta,\varphi)=\sin\theta\cos\varphi\,dr+r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta-r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi\quad(6)\quad 0,5$$

$$d\varphi_3(r,\theta,\varphi)=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi\quad(7)\quad 0,1$$

بتعويض (2)، (3)، (4)، (5)، (6)، (7) في (8) نجد:

$$(f^*w)(r,\theta,\varphi)=\left(\cos\theta\cos\varphi+\frac{\sin\theta}{r\cos\varphi}\right)\left(\cos\theta\cos\varphi\,dr-r\sin\theta\cos\varphi\,d\theta-r\cos\theta\sin\varphi\,d\varphi\right)+$$

$$+\left(\sin\theta\cos\varphi-\frac{\cos\theta}{r\cos\varphi}\right)\left(\sin\theta\cos\varphi\,dr+r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta-r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi\right)+$$

$$+\sin\varphi\left(\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi\right).$$

$$(f^*w)(r,\theta,\varphi)=\left[\cos^2\theta\cos^2\varphi+\cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}}+\sin^2\theta\cos^2\varphi-\cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}}+\sin^2\varphi\right]dr+$$

$$+\left[-r\cancel{\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi}-\sin^2\theta+r\cancel{\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi}-\cos^2\theta\right]d\theta+$$

$$+\left[-r\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi-\frac{\cos\theta\sin\theta\sin\varphi}{\cos\varphi}-r\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\cos\theta\sin\theta\sin\varphi}{\cos\varphi}+r\cos\varphi\sin\varphi\right]d\varphi \quad 0,5$$

$$\boxed{(f^*w)(r,\theta,\varphi)=dr-d\theta}\quad 0,5$$