معهد العلوم الدقيقة
السنة الثالثة S6
2010 - 2009

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

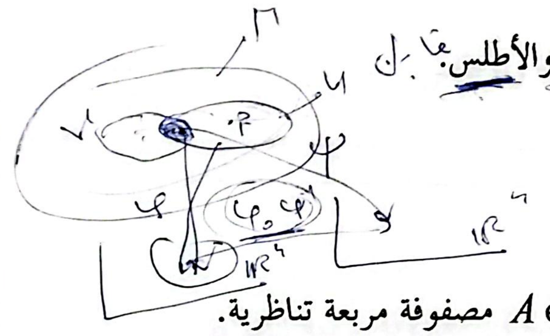
الامتحان الإستدراكي في مادة في الهندسة التفاضلية

يوم: 2010/06/21
المدة: ساعة ونصف
إعداد الأستاذ: بن ابراهيم.

التمرين01:

1. ما هو تعريف المنوعة الطبولوجية، مع تعريف كل من الخريطة والأطلس.

2. ما هو تعريف أطلسين متلائمين.



التمرين02:

1. ليكن التطبيق: $f : IR^n \longrightarrow IR$, $x \mapsto f(x) = x^T A x$ حيث: $A \in IR^{n\times n}$ مصفوفة مربعة تناظرية.

برهن أن: $\forall\, x,h \in IR^n \; ; \; f(x+h) - f(x) = L_x(h) + \|h\|\varphi(h)$

حيث: $L_x(h) = x^T A\, h + h^T A\, x \; ; \; \forall\, x,h \in IR^n$

والدالة $\varphi : IR^n \longrightarrow IR$ تحقق $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$.

2. برهن أن التطبيق $L_x(h)$ خطي بالنسبة لـ h، ثم استنتج أن f قابل للتفاضل على IR^n، وعين $D(f)(h)$.

3. ليكن $b \in IR^*$ بين أن المجموعة $M = \{x \in IR^n ; x^T A x = b\}$ هي منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل، وعين بعدها.

التمرين03: بين أن المجموعة $S^n = \left\{ (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in IR^{n+1} ; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$ منوعة طبولوجية جزئية من IR^{n+1}، وعين بعدها، ثم استنتج أنه من أجل كل $p \in S^n$ أن $T_p S^n = \{v \in IR^n ; p \perp v\}$.

التمرين04:

أ- ليكن الشكل التفاضلي: $w_{(x,y,z)} = \left[x^2 + y^2 - a^2\right] dx - 2a\,x\,y\,dy \in \Omega_1(IR^3)$،

حيث: $a \in IR$، أوجد f من صنف C^1 ذو المتغير x فقط حتى يكون fw شكل مغلوق.

ب- أحسب التفاضل الخارجي للأشكال التفاضلية على IR^3 الآتيــة:

1. $w_1(x,y,z) = 2x\,y^2\, dx + 2x^2\, y\, dy - 2z\, dz$

2. $w_2(x,y,z) = \dfrac{2\,dx}{1+x^2} + \dfrac{z\,dy}{1+y^2z^2} + \dfrac{y\,dz}{1+y^2z^2}$

ت- أحسب dw و $\varphi^* w$، حيث:

$$w\,(x,y,z) = \frac{1}{z}(y\,dx + x\,dy + dz) \in \Omega^1(IR^3) \quad / \quad \varphi : \left]0, \pi/2\right[\longrightarrow IR^3, \; t \mapsto \varphi(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$$

التنقيط: [التمرين1: 04نقاط] [التمرين2: 06نقاط] [التمرين3: 04نقاط] [التمرين3: 06نقاط]

بالتـــوفـيــق

01

تصحيح الامتحان الاستدراكي في مادة الهندسة التفاضلية

وذلك ليوم: 2015/06/21م

حل التمرين 01:

1/ تعريف المنوعة الطوبولوجية: M فضاء طوبولوجي منفصل يحقق الخاصية التالية:

من أجل كل نقطة $p\in M$ يوجد جوار U مستشاكل مع مفتوح من $\mathbb{R}^n$ أي يوجد تطبيق $\varphi: U\to\varphi(U)\subseteq\mathbb{R}^n$

حيث φ مستشاكل، نسمي الزوج (U,φ) خريطة. (1)

تعريف الأطلس: هو مجموعة الخرائط $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ حيث: I قابلة للعد و: $M=\bigcup_{i\in I}U_i$. (1)

2/ تعريف الأطلسين متلائمين: لا يوجد هذا الاصطلاح؟ (1)

حل التمرين 02:

1/ ليكن التطبيق: $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$.

$x\longmapsto f(x)=x^TAx$

المطلوب البرهان: $\begin{cases} f(x+h)-f(x)=L_x(h)+\|h\|\varphi(h) & (1)\\ \forall x,h\in\mathbb{R}^n\end{cases}$

حيث: $L_x(h)=x^TAh+h^TAx,\ \forall x,h\in\mathbb{R}^n$

والدالة: $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تحقق: $\lim_{h\to0}\varphi(h)=0$.

لدينا: $f(x+h)-f(x)=(x+h)^TA(x+h)-x^TAx$

$f(x+h)-f(x)=(x^T+h^T)A(x+h)-x^TAx$

$=\cancel{x^TAx}+x^TAh+h^TAx+h^TAh-\cancel{x^TAx}$

$f(x+h)-f(x)=x^TAh+h^TAx+h^TAh$.

$\boxed{f(x+h)-f(x)=L_x(h)+h^TAh}$ — (2) (1)

بالمطابقة بين العلاقتين (1) و(2) نجد: (0,5)

$\boxed{\varphi(h)=\frac{h^TAh}{\|h\|}\Rightarrow\lim_{h\to0}\varphi(h)=0}$ (0,5)

ومنه المطلوب.

2/ البرهان أن $L_x(h)$ خطي بالنسبة لـ h واستنتاج أن f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^n$ وتعيين $Df(x)(h)$؟

لدينا: $L_x(h)=x^TAh+h^TAx$

A تناظرية: $(A^T=A)$: $h^TAx=h^TA^Tx=(Ah)^Tx$

$\Rightarrow h^TAx=x^TAh\Rightarrow\boxed{L_x(h)=2x^TAh}$ — (3)

$\forall h_1,h_2\in\mathbb{R}^n,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$L_x(\alpha h_1+\beta h_2)=2x^TA(\alpha h_1+\beta h_2)$ (1)

$=\alpha(2x^TAh_1)+\beta(2x^TAh_2)$

$\boxed{\Rightarrow L_x(\alpha h_1+\beta h_2)=\alpha L_x(h_1)+\beta L_x(h_2)}$

ومنه $L_x(h)$ خطي بالنسبة لـ h (0,5) (0,5)

ومن العلاقة (1) لدينا: $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)-L_x(h)}{\|h\|}=\lim\varphi(h)=0$

و $L_x(h)$ خطي إذن f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^n$.

ولدينا (0,5)

$\boxed{Df(x)(h)=L_x(h)=2x^TAh}$ — (4)

(انظر إلى العلاقة (3)).

3/ ليكن $b\in\mathbb{R}^*$ المطلوب البرهان أن المجموعة M المعرفة

$M=\{x\in\mathbb{R}^n,\ x^TAx=b\}$.

هي منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل مع تعيين بعدها؟

لدينا $M=f^{-1}(b)$ ومنه يكفي أن نبرهن أن b قيمة عادية لـ f $\Leftrightarrow$ $\forall x\in f^{-1}(b).\ (x^TAx=b)$

لدينا $Df(x)$ غامر؟ (0,5)

أي لنبرهن أن: $\forall y\in\mathbb{R},\ \exists\tilde{h}\in\mathbb{R}^n: Df(x)(\tilde{h})=y$ ؟

$y=\frac{2b}{2b}y=\frac{2(x^TAx)}{2b}y$. [لأن $b=x^TAx$]

$y=2x^TA\left(\frac{xy}{2b}\right)=Df(x)\left(\frac{xy}{2b}\right)$

يكفي أخذ $\tilde{h}=\frac{xy}{2b}$ ومنه Df(x) غامر.

إذن b قيمة عادية لـ f وبالتالي (0,5)

$\boxed{M=f^{-1}(b)\ \text{منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل}}$

$\dim M=\dim\mathbb{R}^n-\dim\mathbb{R}=n-1\Rightarrow\boxed{\dim M=n-1}$ (0,5)

حل التمرين 03:

بين أن المجموعة S^n منوعة قابلة للتفاضل في $\mathbb{R}^{n+1}$ مع تعيين بعدها واستنتاج أن:

$\forall p\in S^n$:

$T_pS^n=\{v\in\mathbb{R}^{n+1},\ p\perp v\}$. (0,5)

ليكن التطبيق $f:\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}$. لنبرهن أن 1 قيمة عادية لـ f (0,5)

$x=(x_1,\dots,x_{n+1})\longmapsto x_1^2+\dots+x_{n+1}^2$

لنعين Df(x).

$Df(x):\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}$.

$h=(h_1,\dots,h_{n+1})\longmapsto Df(x)(h)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x)\right)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_{n+1}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow Df(x)(h)=(2x_1,\dots,2x_{n+1})\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_{n+1}\end{pmatrix}$

$\boxed{\Rightarrow Df(x)(h)=2h_1x_1+\dots+2h_{n+1}x_{n+1}}$ (0,5)

البرهان أن 1 قيمة عادية لـ f: لدينا $S^n=f^{-1}(1)$

$\left(\forall x\in f^{-1}(1)\ \ Df(x)\ \text{غامر}.\right)\Leftrightarrow\left(\text{1 قيمة عادية لـ } f\right)$ (0,5)

Df(x) غامر أي من أجل كل $y\in\mathbb{R}\Rightarrow$ يوجد $\tilde{h}\in\mathbb{R}^{n+1}$.

بحيث $Df(x)(\tilde{h})=y$ ؟ (0,5)

$x\in f^{-1}(1)\Rightarrow x_1^2+\dots+x_{n+1}^2=1$.

02

تابع لتصحيح الامتحان الاستدراكي في مادة الهندسة التفاضلية

وذلك ليوم 2021/06/10

$y = y(x_1^2+\dots+x_{n+1}^2) = 2\left(\frac{x_1 y}{2}\right)x_1 + \dots + 2\left(\frac{x_{n+1} y}{2}\right)x_{n+1}$

يكون إذن $h = \left(\frac{x_1 y}{2}, \dots, \frac{x_{n+1} y}{2}\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$\Rightarrow y = Df(x)(h)$ $\Rightarrow$ 0,25 . $Df(x)$ غامر

إذن 1 قيمة عادية لـ $f \Leftarrow S^{n}$ م. ج. ت. ق. في $\mathbb{R}^{n+1}$.

استنتاج أنه من أجل كل $p\in S^{n}$: $T_pS^n = \{v\in\mathbb{R}^{n+1}, p\perp v\}$

لدينا من أجل كل $p\in S^{n}$: $T_pS^n = \ker(Df(p))$ 0,25

$v\in T_pS^n \Leftrightarrow v\in \ker(Df(p)) \Leftrightarrow Df(p)(v) = 0$

1 $\Leftrightarrow 2p_1v_1+\dots+2p_{n+1}v_{n+1} = 0$,

$\Leftrightarrow 2\langle p, v\rangle = 0 \Leftrightarrow p\perp v$: وهو المطلوب

بعد S^n : $\dim S^n = n$ 0,5

حل التمرين 04:

أ/ ليكن $w(x,y,z) = [x^2+y^2-a^2]dx - 2axy\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$،

المطلوب إيجاد $f\in C^1$ ذات المتغير x فقط حتى يكون fw شكل مغلوق؟ أي $d(fw) = 0$.

لنضع: $w = c_1dx + c_2dx$

$\{c_1(x,y) = x^2+y^2-a \,;\ c_2(x,y) = -2axy, \ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

ومنه إذن: $\boxed{d(fw) = df\wedge w + f\,dw}$ —(1)

حساب dw؟

$dw = dc_1\wedge dx + dc_2\wedge dy$.

$dc_1 = \frac{\partial c_1}{\partial x}dx + \frac{\partial c_1}{\partial y}dy$

$dc_2 = \frac{\partial c_2}{\partial x}dx + \frac{\partial c_2}{\partial y}dy$.

$(dw)(x,y) = \frac{\partial c_1}{\partial y}(x,y)\,dy\wedge dx + \frac{\partial c_2}{\partial x}(x,y)\,dx\wedge dy$

$\boxed{(dw)(x,y) = -2y(a+1)\,dx\wedge dy}$ —(2) $\cancel{0{,}1}$

إيجاد df؟

$\begin{cases} f(x,y) = f(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

$\boxed{df(x,y) = f'(x)\,dx}$ —(3) $\cancel{0{,}1}$

تعويض كل من (2) و(3) في (1) نجد،

$d(fw)(x,y) = (f'(x)dx)\wedge[(x^2+y^2-a)dx - (2axy)dy]$

$\cancel{0{,}1}$ $+ f(x)\,2y(a+1)\,dx\wedge dy$. —(4)

$\boxed{d(fw)(x,y) = 2y[f'(x)xa + f(x)(a+1)]\,dx\wedge dy}$

لدينا (fw) مغلوق $\Leftrightarrow$ $\{d(fw) = 0\}$.

$\Leftrightarrow 2y[f'(x)xa + f(x)(a+1)] = 0$

$\Leftrightarrow ax f'(x) + (a+1)f(x) = 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

ومنه f حل معادلة تفاضلية التالية: 0,25

$axu' + (a+1)u = 0$ —— (5)

من أجل $a\neq 0$:

$(5) \Leftrightarrow ax\frac{du}{dx} = (1+a)u \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{1+a}{a}\frac{dx}{x}$ (e.v.s)

$\Rightarrow \int\frac{du}{u} = \frac{1+a}{a}\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = \frac{1+a}{a}\ln|x| + K$

$|u| = e^K|x|^{\frac{1+a}{a}} \Rightarrow \boxed{u = C|x|^{\frac{1+a}{a}}, C\in\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = C|x|^{\frac{1+a}{a}}, C\in\mathbb{R}}$ 0,25

من أجل $a = 0$: لدينا f الدالة المعدومة

ب/ حساب التكامل التفاضلي:

$w_1(x,y,z) = 2xy^2dx + 2x^2y\,dy - 2z\,dz$ /1

$dw_1(x,y,z) = (4xy)\,dy\wedge dx + 4xy\,dx\wedge dy$

$\boxed{dw_1(x,y,z) = 0}$ 1

$w_2(x,y,z) = \frac{2\,dx}{1+x^2} + \frac{z}{1+y^2z^2}dy + \frac{y\,dz}{1+y^2z^2}$. /2

$dw_2(x,y,z) = \frac{1-y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2}dz\wedge dy + \frac{1-y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2}dy\wedge dz$ 1

$\Rightarrow \boxed{dw_2(x,y,z) = 0}$

ج) حساب dw و φ^*w حيث،

$w(x,y,z) = \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy + \frac{1}{z}dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$

$\varphi :]0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longmapsto \varphi(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$.

$dw(x,y,z) = \frac{1}{z}\cancel{dy\wedge dx} - \frac{y}{z^2}dz\wedge dx + \frac{1}{z}\cancel{dx\wedge dy}$

$-\frac{x}{z^2}dz\wedge dy$. 1

$\boxed{dw(x,y,z) = \frac{1}{z^2}(y\,dx\wedge dz + x\,dy\wedge dz)}$

حساب φ^*w: نضع، $w = a_1dx + a_2dy + a_3dz$

حيث $a_1(x,y,z) = \frac{y}{z}, a_2(x,y,z) = \frac{x}{z}, a(x,y,z) = \frac{1}{z}$.

$\varphi_1(t) = \sin t, \varphi_2(t) = \cos t, \varphi_3(t) = \sin 2t$.

$\boxed{\varphi^*w(t) = (a_1\circ\varphi)(t)\,d\varphi_1(t) + (a_2\circ\varphi)(t)\,d\varphi_2(t) + (a_3\circ\varphi)(t)\,d\varphi_3(t)}$

$(a_1\circ\varphi)(t) = a_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)} \Rightarrow \boxed{(a_1\circ\varphi)(t) = \frac{\cos t}{\sin 2t}}$

$\boxed{(a_2\circ\varphi)(t) = \frac{\sin t}{\sin 2t}}$, $\boxed{(a_3\circ\varphi)(t) = \frac{1}{\sin(2t)}}$

$d\varphi_1(t) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t)\,dt = \varphi_1'(t)\,dt \Rightarrow \boxed{d\varphi_1(t) = \cos t}$

$\boxed{d\varphi_2(t) = -\sin dt}$, $\boxed{d\varphi_3(t) = 2\cos(2t)\,dt}$

$\varphi^*w(t) = \frac{\cos t}{\sin 2t}.\cos t\,dt + \frac{\sin t}{\sin 2t}(-\sin dt) +$

$+ \frac{2\cos(2t)}{\sin(2t)}.dt$.

$\varphi^*w(t) = \left[\frac{\cos^2 t}{\sin 2t} - \frac{\sin^2 t}{\sin 2t} + \frac{2\cos(2t)}{\sin(2t)}\right]dt$

(لدينا $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$) إذن

$\boxed{\varphi^*w(t) = \frac{3\cos(2t)}{\sin(2t)}dt = 3\cot g(2t)\,dt}$ 1

01

تصحيح الامتحان الاستدراكي في مادة الهندسة التفاضلية

وذلك اليوم: 2015/06/21 م

حل التمرين 01

01/ تعريف المنوعة الطبولوجية: M فضاء طبولوجي منفصل يحقق الخاصية التالية، من أجل كل نقطة $p \in M$ يوجد جوار U مستشاكل مع مفتوح من $\mathbb{R}^n$ أي يوجد تطبيق $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ حيث φ مستشاكل، نسمي الزوج (U, φ) خريطة. (1) (1)

تعريف الأطلس: هو مجموعة الخرائط $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ حيث: I قابلة للعد و: $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. (1)

02/ تعريف الملبس متلاشي: لا يوجد هذا الإصطلاح؟ (1)

حل التمرين 02

01/ ليكن التطبيق: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^T A x$

المطلوب البرهان: $\begin{cases} f(x+h) - f(x) = L_x(h) + \|h\| \varepsilon(h) & \text{---}(1) \\ \forall x, h \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

حيث: $L_x(h) = x^T A h + h^T A x, \ \forall x, h \in \mathbb{R}^n$

و الدالة: $\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق: $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

لدينا: $f(x+h) - f(x) = (x+h)^T A (x+h) - x^T A x$

$f(x+h) - f(x) = (x^T + h^T) A (x+h) - x^T A x$

$= \cancel{x^T A x} + x^T A h + h^T A x + h^T A h - \cancel{x^T A x}$

$f(x+h) - f(x) = x^T A h + h^T A x + h^T A h$.

$\boxed{f(x+h) - f(x) = L_x(h) + h^T A h}$ —(2) (1)

بالمطابقة بين العلاقتين (1) و (2) نجد: (0,5)

$\boxed{\varepsilon(h) = \dfrac{h^T A h}{\|h\|} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0}$ (0,5)

ومنه المطلوب.

02/ البرهان أن $L_x(h)$ خطي بالنسبة لـ h واستنتاج أن f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^n$ وتعيين $Df(h)$؟

لدينا: $L_x(h) = x^T A h + h^T A x$

A متناظرة: $(A^T = A)$: $h^T A x = h^T A^T x = (Ah)^T x$

$\Rightarrow h^T A x = x^T A h \Rightarrow \boxed{L_x(h) = 2x^T A h}$ —(3)

$\forall h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$L_x(\alpha h_1 + \beta h_2) = 2x^T A (\alpha h_1 + \beta h_2)$ (1)

$= \alpha(2x^T A h_1) + \beta(2x^T A h_2)$

$\boxed{\Rightarrow L_x(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha L_x(h_1) + \beta L_x(h_2)}$

ومنه $L_x(h)$ خطي بالنسبة لـ h (0,5) (0,5)

ومن العلاقة (1) لدينا: $\lim \dfrac{f(x+h) - f(x) - L_x(h)}{\|h\|} = \lim \varepsilon(h) = 0$

و $L_x(h)$ خطي إذن f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^n$.

ولدينا (0,5)

$\boxed{Df(x)(h) = L_x(h) = 2x^T A h}$ —(4)

(أنظر إلى العلاقة (3)).

03/ ليكن $b \in \mathbb{R}^*$ المطلوب البرهان أن المجموعة M المعرفة

$M = \{x \in \mathbb{R}^n, \ x^T A x = b\}$.

هي منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل مع تعيين بعدها؟

لدينا $M = f^{-1}(b)$ ومنه يكفي أن نبرهن أن b قيمة عادية لـ f $\Leftrightarrow \forall x \in f^{-1}(b) \ (x^T A x = b)$

لدينا $Df(x)$ غامر؟ (0,5)

أي لنبرهن أنه: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists \tilde{h} \in \mathbb{R}^2 : Df(x)(\tilde{h}) = y$؟

$y = \dfrac{2b}{2b} y = \dfrac{2(x^T A x)}{2b} y$. [لأن $b = x^T A x$]

$y = 2x^T A \left(\dfrac{xy}{2b}\right) = Df(x)\left(\dfrac{xy}{2b}\right)$

يكفي أخذ $\tilde{h} = \dfrac{xy}{2b}$ ومنه $Df(x)$ غامر.

إذن b قيمة عادية لـ f وإذا فمن (0,5)

$\boxed{M = f^{-1}(b) \text{ منوعة طبولوجية قابلة للتفاضل}}$

$\dim M = \dim \mathbb{R}^n - \dim \mathbb{R} = n - 1 \Rightarrow \boxed{\dim M = n-1}$ (0,5)

حل التمرين 03

لنبين أن المجموعة S^n م.ط.ق.ت في $\mathbb{R}^{n+1}$ مع تعيين بعدها واستنتاج أن:

$\forall p \in S^n$: $T_p S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}, \ p \perp v\}$. (0,5)

ليكن التطبيق $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ لنبرهن أن 1 قيمة عادية لـ f.

لنعين $Df(x)$: $Df(x) : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$h = (h_1, \dots, h_{n+1}) \longmapsto Df(x)(h) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x)\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n+1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Df(x)(h) = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n+1} \end{pmatrix}$

$\boxed{\Rightarrow Df(x)(h) = 2h_1 x_1 + \dots + 2h_{n+1} x_{n+1}}$ (0,5)

البرهان أن 1 قيمة عادية لـ f: لدينا: $S^n = f^{-1}(1)$

$\left(f \text{ قيمة عادية لـ } 1\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in f^{-1}(1) \quad Df(x) \text{ غامر}\right)$

$Df(x)$ غامر أي من أجل كل $y \in \mathbb{R}$ يوجد $h \in \mathbb{R}^{n+1}$ يحقق $Df(x)(\tilde{h}) = y$؟ (0,5)

$x \in f^{-1}(1) \Rightarrow x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$.

02

تابع لتصحيح الإمتحان الإستدراكي في مادة الهندسة التفاضلية

وذلك ليوم: 2010/06/21

$y = y(x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2) = 2\left(\frac{x_1 y}{2}\right)x_1 + \dots + 2\left(\frac{x_{n+1}y}{2}\right)x_{n+1}$

يكفي أخذ $h = \left(\frac{x_1 y}{2}, \dots, \frac{x_{n+1} y}{2}\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$\Rightarrow y = Df(x)(h)$. $\Rightarrow$ $Df(x)$ غامر . (0,5)

إذن 1 قيمة عادية لـ $f \Rightarrow S^{n}$ م. ج. ت. ت. في $\mathbb{R}^{n+1}$.

• استنتاج أنه من أجل كل $p \in S^{n}$ $T_pS^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1},\ p \perp v\}$

لدينا من أجل كل $p \in S^{n}$ لدينا $T_pS^n = \ker(Df(p))$ (0,5)

$v \in T_pS^n \Leftrightarrow v \in \ker(Df(p)) \Leftrightarrow Df(p)(v) = 0$

(1) $\Leftrightarrow 2p_1v_1 + \dots + 2p_{n+1}v_{n+1} = 0$,

وهو مطلوب: $\Leftrightarrow 2\langle p, v\rangle = 0 \Leftrightarrow p \perp v$

حل التمرين 04: بعد S^{n} : $\boxed{\dim S^{n} = n}$ (0,5)

i/ ليكن $w(x,y,z) = [x^2 + y^2 - a^2]dx - 2axy\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$,

المطلوب بإيجاد $f \in C^1$ ذات المتغير x فقط حتى يكون fw شكل مغلوق؟ أي $d(fw) = 0$.

لنضع: $w = c_1 dx + c_2 dy$

$\{c_1(x,y) = x^2 + y^2 - a\ ;\ c_2(x,y) = -2axy\ ,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

ومنه إذن: $\boxed{d(fw) = df \wedge w + f\,dw}$ — (1)

حساب dw ؟ $dw = dc_1 \wedge dx + dc_2 \wedge dy$.

$dc_1 = \frac{\partial c_1}{\partial x}dx + \frac{\partial c_1}{\partial y}dy$

$dc_2 = \frac{\partial c_2}{\partial x}dx + \frac{\partial c_2}{\partial y}dy$.

$(dw)(x,y) = \frac{\partial c_1}{\partial y}(x,y)\,dy \wedge dx + \frac{\partial c_2}{\partial x}(x,y)\,dx \wedge dy$

$\boxed{(dw)(x,y) = -2y(a+1)\,dx \wedge dy}$ — (2) ~~0,5~~

إيجاد df ؟

$\begin{cases} f(x,y) = f(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

$\boxed{df(x,y) = f'(x)\,dx}$ — (3) ~~0,5~~

تعويض كل من (2) و(3) في (1) نجد،

$d(fw)(x,y) = (f'(x)dx) \wedge [(x^2 + y^2 - a)dx - (2axy)dy]$

~~0,5~~ $- f(x)\,2y(a+1)\,dx \wedge dy$.

— (4) $\boxed{d(fw)(x,y) = 2y[f'(x)xa + f(x)(a+1)]\,dx \wedge dy}$

لدينا (fw) مغلوق $\Leftrightarrow (d(fw) = 0)$

$\Leftrightarrow 2y[f'(x)xa + f(x)(a+1)] = 0$

$\Leftrightarrow ax f'(x) + (a+1)f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ومنه نحصل على معادلة تفاضلية التالية: (0,5)

$axu' + (a+1)u = 0$ —— (5)

من أجل $a \neq 0$:

$(5) \Leftrightarrow ax\frac{du}{dx} = -(1+a)u \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{1+a}{a}\frac{dx}{x}$ (e.v.s)

$\Rightarrow \int\frac{du}{u} = -\frac{1+a}{a}\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = -\frac{1+a}{a}\ln|x| + K$

$|u| = e^{K}|x|^{-\frac{1+a}{a}} \Rightarrow \boxed{u = c|x|^{-\frac{1+a}{a}},\ c \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = c|x|^{-\frac{1+a}{a}},\ c \in \mathbb{R}}$ (0,5)

من أجل $a = 0$ لدينا f الدالة المعدومة

ب/ حساب التفاضل الخارجي:

1/ $w_1(x,y,z) = 2xy^2dx + 2x^2y\,dy - 2z\,dz$

$dw_1(x,y,z) = (4xy)\,dy \wedge dx + 4xy\,dx \wedge dy$

$\boxed{dw_1(x,y,z) = 0}$ (1)

2/ $w_2(x,y,z) = \frac{2\,dx}{1+x^2} + \frac{z}{1+y^2z^2}dy + \frac{y\,dz}{1+y^2z^2}$.

$dw_2(x,y,z) = \frac{1-y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2}dz \wedge dy + \frac{1-y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2}dy \wedge dz$ (1)

$\Rightarrow \boxed{dw_2(x,y,z) = 0}$

ت) حساب dw و $\varphi^* w$ حيث

$w(x,y,z) = \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy + \frac{1}{z}dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$

$\varphi :]0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longmapsto \varphi(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$.

$dw(x,y,z) = \cancel{\frac{1}{z}dy \wedge dx} - \frac{y}{z^2}dz \wedge dx + \cancel{\frac{1}{z}dx \wedge dy}$

$- \frac{x}{z^2}dz \wedge dy$ (1)

$\boxed{dw(x,y,z) = \frac{1}{z^2}(y\,dx \wedge dz + x\,dy \wedge dz)}$

حساب $\varphi^* w$: نضع $w = a_1dx + a_2dy + a_3dz$

حيث $a_1(x,y,z) = \frac{y}{z}$, $a_2(x,y,z) = \frac{x}{z}$, $a(x,y,z) = \frac{1}{z}$.

$\varphi_1(t) = \sin t$, $\varphi_2(t) = \cos t$, $\varphi_3(t) = \sin 2t$.

$\boxed{\varphi^* w(t) = (a_1 \circ \varphi)(t)\,d\varphi_1(t) + (a_2 \circ \varphi)(t)\,d\varphi_2(t) + (a_3 \circ \varphi)(t)\,d\varphi_3(t)}$

$(a_1 \circ \varphi)(t) = a_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)} \Rightarrow \boxed{(a_1 \circ \varphi)(t) = \frac{\cos t}{\sin 2t}}$

$\boxed{(a_2 \circ \varphi)(t) = \frac{\sin t}{\sin 2t}}$, $\boxed{(a_3 \circ \varphi)(t) = \frac{1}{\sin(2t)}}$

$d\varphi_1(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t)\,dt = \varphi_1'(t)\,dt \Rightarrow \boxed{d\varphi_1(t) = \cos t\,dt}$

$\boxed{d\varphi_2(t) = -\sin t\,dt}$, $\boxed{d\varphi_3(t) = 2\cos(2t)\,dt}$

$\varphi^* w(t) = \frac{\cos t}{\sin 2t}\cdot\cos t\,dt + \frac{\sin t}{\sin 2t}(-\sin t\,dt) + \frac{2\cos(2t)}{\sin(2t)}\cdot dt$.

$\varphi^* w(t) = \left[\frac{\cos^2 t}{\sin 2t} - \frac{\sin^2 t}{\sin 2t} + \frac{2\cos(2t)}{\sin(2t)}\right]dt$

لدينا ($\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$)

$\boxed{\varphi^* w(t) = \frac{3\cos(2t)}{\sin(2t)}\,dt = 3\cot g(2t)\,dt}$ (1)