السلسلة رقم 03

التمرين 01: 1. أكمل الفراغات: $\alpha\in\Omega^{\cdot}(\cdot)$ و $\beta\in\Omega^{\cdot}(\cdot)$ حيث:

$$\beta(x,y)=y\,dx+x\,dy \qquad \alpha(x,y,z)=x\,dy\wedge dz$$

2. أحسب كل من: $\alpha\wedge\beta$، $\beta\wedge\alpha$، و$d(\alpha\wedge\beta)$، و$d(\beta\wedge\alpha)$، و$d\alpha$، و$d\beta$، و$d\alpha\wedge d\beta$، و$d\beta\wedge d\alpha$.

3. نفس السؤال مع أخذ: $\alpha(x,y,z)=\cos(xyz)\,dx+\left(x^2z-y\right)dy+\tan(yz)\,dz$

$$\beta(x,y,t)=x^2\cos y\,dx\wedge dy+(t-2xy)\,dy\wedge dt$$

التمرين 02: ليكن $w(x,y,z)=a(x,y,z)\,dx+b(x,y,z)\,dy+c(x,y,z)\,dz$، أحسب dw.

التمرين 03: لنضع $\eta=df_1\wedge df_2$، أحسب $d\eta$ حيث: f_1 و f_2 الدوال المعرفة كما يلي:

$$f_1(x,y,z)=\frac{1}{z^3}Arc\tan\left(\frac{x}{y}\right) \qquad f_2(x,y,z)=\frac{1}{z^2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

التمرين 04: لنضع:

$$\varphi: IR^3\longrightarrow IR^2$$
$$(x,y,z)\mapsto\varphi(x,y,z)=\left(x^2,yz\right)$$

$$\eta(u,v)=uv\,du\wedge dv \qquad w(u,v)=v^2\,du+dv$$

أحسب كل من: φ^*w، $\varphi^*\eta$، و $\varphi^*w\wedge\varphi^*\eta$، و $w\wedge\eta$، و $\varphi^*(w\wedge\eta)$.

التمرين 05: ليكن الشكل التفاضلي: $w_{(x,y,z)}=\left[x^2+y^2-a^2\right]dx-2axy\,dy\in\Omega_1\left(IR^3\right)$،

حيث: $a\in IR$، أوجد f من صنف C^1 ذو المتغير x فقط حتى يكون fw شكل مغلوق.

التمرين 06: أحسب dw و φ^*w، حيث: $w(x,y,z)=\frac{y}{z}dx+\frac{x}{z}dy+\frac{1}{z}dz\in\Omega_1\left(IR^3\right)$

و

$$\varphi: \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow IR^3$$
$$t\mapsto\varphi(t)=(\sin t,\cos t,\sin 2t)$$

التمرين 07: ليكن $w=\sum_{1\le i,j\le 4}a_{ij}\,dx_i\wedge dx_j\in\Omega_2\left(IR^4\right)$ بحيث يحقق: $\forall 1\le i,j\le 4;\ a_{ij}=-a_{ji}$

1. برهن أن: $w=2\sum_{1\le i<j\le 4}a_{ij}\,dx_i\wedge dx_j$.

2. أوجد العلاقة بين المعاملات $\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le 4}$ حتى يكون لدينا: $w\wedge w=0$.

3. إذا تحقق هذا الشرط لنضع: $\alpha=\sum_{i=1}^{4}a_{1i}\,dx_i\in\Omega_1\left(IR^4\right)$، بين أنه يوجد $\beta\in\Omega_1\left(IR^4\right)$ بحيث: $w=\alpha\wedge\beta$.

التمرين08: ليكن $w \in \Omega_1(IR^2)$ بحيث: $w(x,y)=(2x+y)dx+(2y+x)dy$

1. بين أن w شكل تفاضلي مغلق.
2. استنتج أن w شكل تفاضلي دقيق، ثم أوجد الدالة g من صنف C^1 في IR^2 بحيث: $dg = w$.

التمرين09: أحسب كل من: $\alpha \wedge \beta$، و $\beta \wedge \alpha$، و $d\alpha$، و $d\beta$، و $d(\beta \wedge \alpha)$، و $d(\alpha \wedge \beta)$، و $d\alpha \wedge d\beta$ و $d\beta \wedge d\alpha$ و $f^*\alpha$، و $f^*\beta$ و $f^* d\alpha$، و $f^* d\beta$ حيث:

$$\alpha(x,y,z) = 2xy^2\, dx + 2x^2 y\, dy - 2z\, dz$$

$$\beta(x,y,z) = \frac{2\, dx}{1+x^2} + \frac{z\, dy}{1+y^2z^2} + \frac{y\, dz}{1+y^2z^2}$$

و

$$f : IR^2 \longrightarrow IR^3$$
$$t \longrightarrow f(u,v) = (uv, v^2)$$

التمرين10: ليكن الشكل التفاضلي: $w(x,y) = \dfrac{2xy}{(1+x^2)^2}dx + \varphi(x)dy \in \Omega_1^{(1)}(IR^2)$.

أوجد التطبيق φ من صنف C^1 ذو المتغير x فقط حتى يكون fw شكل مغلوق.

التمرين11: ليكن الشكل التفاضلي w حيث: $w(x,y) = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} \in \Omega_1(IR^2 - \{(0,0)\})$

أ. بين أن w شكل تفاضلي مغلق، هل يمكننا استعمال نظرية بوانكاري لكي نبرهن أنه w دقيق.

ب. ابحث عن الدالة f التي تحقق: $df = w$، وهل w دقيق.

ج. أحسب $\varphi^* w$، حيث: φ التطبيق المعرف:

$$\varphi : [0,1] \to IR^2 - \{(0,0)\}$$
$$t \mapsto \varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

التمرين12: لنضع $U = IR_+^* \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ أحسب كل $f^* w$ حيث:

$$f : U \longrightarrow IR^3$$
$$(r,\theta,\varphi) \mapsto f(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$w(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$$

التمرين13: ليكن الشكل التفاضلي: $w(x,y) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$

ليكن φ التطبيق المعرف:

$$\varphi : [0,1] \to IR^2 - \{(0,0)\}$$
$$(t) \mapsto \varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

1. أحسب $\varphi^* w$.
2. ثم أحسب التكامل: $\int_\varphi w$.