امتحان في مادة الهندسة التفاضلية

التمرين 01:

أ. ما هو تعريف المنوعة الجزئية من $\mathbb{R}^n$.

ب. من أجل a و b و c أعداد حقيقية موجبة تماما، نعرف:

$$V = \left\{(x,y,z)\epsilon\mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$$

ولتكن الدالة f المعرفة كما يلي:

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

1. برهن أن f مستمرة وقابلة التفاضل على $\mathbb{R}^3$.
2. أحسب df وعين مصفوفته اليعقوبية، وأدرس رتبتها حسب قيم (x,y,z) في $\mathbb{R}^3$.
3. استنتج $r_{(x,y,z)}f$ رتبة التطبيق f على V.
4. بين V منوعة الجزئية من $\mathbb{R}^3$، وما هو بعدها.
5. أحسب $T_{(x,y,z)}V$ من أجل $(x,y,z)\epsilon V$ (وتعيين إسمه في الفضاء).

التمرين 02:

أ. ما هو تعريف الشكل p-خطي على E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$، و الشكل p–خطي المتناوب على E (حيث $p\epsilon\mathbb{N}$).

ب. لتعتبر الأشكال التفاضلية التالية:

$$\alpha(x,y,z) = cos(xyz)dx + (x^2z-y)dy + tan(yz)dz$$
$$\beta(x,y,\theta,t) = sin(xyt)dx\wedge dy\wedge d\theta + x\ arcsin(\theta^2)dx\wedge dy\wedge dt$$
$$+\frac{1}{y}ln(x^2+y^2)dx\wedge d\theta\wedge dt + (x^2\theta-y)^2dy\wedge d\theta\wedge dt$$

أحسب كل من: $\beta\wedge\alpha$، و $\alpha\wedge\beta$ و $d\beta$، و $d\alpha$ ، و $d\alpha\wedge\beta$ و $\beta\wedge d\alpha$ ، و $d(\alpha\wedge\beta)$ و $d(\beta\wedge\alpha)$ ، $d\beta\wedge d\alpha$، و $d\alpha\wedge d\beta$

ج.

لنضع: $U = IR_+^* \times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f: U \longrightarrow IR^3$$
$$(r,\theta,\varphi) \mapsto f(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$w(x,y,z) = dx\wedge dy + \frac{yz}{x^2+y^2}dx\wedge dz + \frac{xz}{x^2+y^2}dy\wedge dz$$

1. أحسب كل من: f^*w ، أوجد الشكل التفاضلي ϕ المعرف على U بحيث: $d\phi = f^*w$.
2. استنتج الشكل التفاضلي η المعرف على V بحيث: $d\eta = w$.

بالتوفيق

Scanné avec CamScanner

تصحيح إمتحان مادة الهندسة التفاضلية ليوم: 2026/05/11

حل التمرين 01:

I: تعريف المنوعة الجزئية من $\mathbb{R}^n$:

$M \subset \mathbb{R}^n$ و $p \leq n$.

نقول أن M منوعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ بعدها p:

من أجل كل $x \in M$.

يوجد $U \subset \mathbb{R}^n$ جوار مفتوح لـ x.

ويوجد $V \subset \mathbb{R}^n$ جوار مفتوح لـ $0 \in \mathbb{R}^n$.

ويوجد φ تشاكل تفاضلي من U نحو V.

بحيث: $\varphi(x) = 0$

و $\varphi(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}^p\right)$

ب. من أجل $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ نعرف:

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

ولتكن الدالة f المعرفة كما يلي:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

أ) البرهان أن f مستمرة وقابلة للتفاضل على $\mathbb{R}^3$:

بما أن f كثير حدود، إذن f مستمرة وقابلة للتفاضل على $\mathbb{R}^3$.

ب) حساب df وتعيين المصفوفة اليعقوبية ودراسة رتبتها حسب قيم $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$df : \mathbb{R}^3 \longrightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$
$$(x,y,z) \longmapsto d_{(x,y,z)} f.$$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$d_{(x,y,z)} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(h_1,h_2,h_3) \mapsto d_{(x,y,z)} f(h_1,h_2,h_3)$$

$$d_{(x,y,z)} f(h_1,h_2,h_3) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$

$$d_{(x,y,z)} f(h_1,h_2,h_3) = 2\left[\frac{x}{a^2}h_1 + \frac{y}{b^2}h_2 + \frac{z}{c^2}h_3\right]$$

مصفوفة اليعقوبية هي $\begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix}$.

دراسة رتبة $d_{(x,y,z)} f$ حسب قيم $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

توجد حالتين:

حالة (1): أحد المتغيرات x أو y أو z ينعدم.

فإن هذه الحالة $rg\left(d_{(x,y,z)} f\right) = 1$.

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

حالة (2): تنعدم جميع المتغيرات: $x = y = z = 0$

فإن هذه الحالة $rg\left(d_{(0,0,0)} f\right) = 0$

3. إستنتاج $rg_{(x,y,z)} f$ رتبة f على V.

لدينا $(0,0,0) \notin V$. (بالتعويض).

إذن من أجل $(x,y,z) \in V$.

$$rg_{(x,y,z)} f = rg\left(d_{(x,y,z)} f\right) = 1.$$

4) بين أن V منوعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ وبعدها؟

لدينا من أجل $(x,y,z) = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2}{3a^2} + \frac{b^2}{3b^2} + \frac{c^2}{3c^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

إذن $V \neq \phi$.

ولدينا $V = f^{-1}(\{0\})$.

يكفي أن نبرهن أن 0 نقطة قابلة لـ f.

أي أن f غمرية على $V = f^{-1}(\{0\})$.

من السؤال (3) لدينا من أجل كل $(x,y,z) \in V$

$$rg_{(x,y,z)} f = 1$$

إذن $d_{(x,y,z)} f$ غامرة من $\mathbb{R}^3$ إلى $\mathbb{R}$ وهذا يعني f غمرية على V. وهو المطلوب.

إذن V منوعة جزئية بعدها 2.

[أي: $\dim V = 3 - 1 = 2$.]

Scanné avec CamScanner

$+x\arcsin(\theta^2)\,dx\wedge dy\wedge dt+$
$+\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)\,dx\wedge d\theta\wedge dt+$
$+(x^2\theta-y)^2\,dy\wedge d\theta\wedge dt.$

حساب:

$$\alpha\wedge\beta(x,y,z,\theta,t)=\cos(xyz)(x^2\theta-y)^2\,dx\wedge dy\wedge d\theta\wedge dt$$
$+(x^2z-y)\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)\,dy\wedge dx\wedge d\theta\wedge dt.$
$+\tan(yz)\sin(xyt)\,dz\wedge dx\wedge dy\wedge d\theta$
$+\tan(yz)\,x\arcsin(\theta^2)\,dz\wedge dx\wedge dy\wedge dt$
$+\tan(yz)\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)\,dz\wedge dx\wedge d\theta\wedge dt$
$+\tan(yz)(x^2\theta-y)^2\,dz\wedge dy\wedge d\theta\wedge dt.$

$$\alpha\wedge\beta(x,y,z,\theta,t)=\left[\cos(xyz)(x^2\theta-y)^2-\left(\frac{x^2z-y}{y}\right)\ln(x^2+y^2)\right]dx\wedge dy\wedge d\theta\wedge dt+\tan(yz)\left[\sin(xyt)\,dx\wedge dy\wedge dz\wedge d\theta\right.$$
$+x\arcsin(\theta^2)\,dx\wedge dy\wedge dz\wedge dt+$
$-\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)\,dx\wedge dz\wedge d\theta\wedge dt+$
$\left.-(x^2\theta-y)^2\,dy\wedge dz\wedge d\theta\wedge dt\right]$

$$\beta\wedge\alpha(x,y,z,\theta,t)=(-1)^{1.3}\,\alpha\wedge\beta(x,y,z,\theta,t).$$

$$\beta\wedge\alpha(x,y,z,\theta,t)=-\alpha\wedge\beta(x,y,z,\theta,t).$$

نضع حيث $\alpha=f_1\,dx+f_2\,dy+f_3\,dz$.

$f_1(x,y,z)=\cos(xyz)$. $f_2(x,y,z)=(x^2z-y)$

$f_3(x,y,z)=\tan(yz)$

$d\alpha=df_1\wedge dx+df_2\wedge dy+df_3\wedge dz.$

$df_i=\frac{\partial f_i}{\partial x}dx+\frac{\partial f_i}{\partial y}dy+\frac{\partial f_i}{\partial z}dz$. $i=\overline{1,3}$.

$d\alpha=\frac{\partial f_1}{\partial y}dy\wedge dx+\frac{\partial f_1}{\partial z}dz\wedge dx+$
$+\frac{\partial f_2}{\partial x}dx\wedge dy+\frac{\partial f_2}{\partial z}dz\wedge dy+$
$\frac{\partial f_3}{\partial x}dx\wedge dz+\frac{\partial f_3}{\partial y}dy\wedge dz.$

$d\alpha=\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy+$
$+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)dx\wedge dz+$
$+\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)dy\wedge dz.$

5) حساب $T_{(x,y,z)}V$ من أجل $(x,y,z)\in V$

$$T_{(x,y,z)}V=\ker\left(d_{(x,y,z)}f\right).$$

$$=\left\{(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3,\ d_{(x,y,z)}f(h_1,h_2,h_3)=0\right\}$$

$$T_{(x,y,z)}V=\left\{(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3,\ \frac{x}{a^2}h_1+\frac{y}{b^2}h_2+\frac{z}{c^2}h_3=0\right\}$$

معادلة مستقيم في فضاء $\mathbb{R}^3$.

حل التمرين 02:

أ) تعريف الشكل p- خطي على E في شدة $\mathbb{R}$ والشكل p- خطي متناوب على E $(p\in\mathbb{N})$.

تعبير التطبيق: $f:E^p\longrightarrow\mathbb{R}$.

$(x_1,\dots,x_p)\longmapsto f(x_1,\dots,x_p)$.

نقول أن f p- خطي على E إذا كان خطي بالنسبة لكل مركبة x_j حيث $j=\overline{1,p}$ أي

$\forall j=\overline{1,p},\ \forall x_j^1,x_j^2\in E,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$f(x_1,\dots,x_{j-1},\alpha x_j^1+\beta x_j^2,x_{j+1},\dots,x_p)=$

$=\alpha f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j^1,x_{j+1},\dots,x_p)$
$+\beta f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j^2,x_{j+1},\dots,x_p)$.

نقول أن f p خطي متناوب على E إذا تحقق:

أ) f p- خطي على E

ب) من أجل كل $j=\overline{1,p}$:

$$\left\{x_j=x_{j+1}\right\}\Rightarrow\left\{f(x_1,\dots,x_j,x_{j+1},\dots,x_p)=0\right\}.$$

ب) لنعتبر الأشكال التفاضلية التالية:

$$\alpha(x,y,z)=\cos(xyz)\,dx+(x^2z-y)\,dy+\tan(yz)\,dz.$$

$$\beta(x,y,\theta,t)=\sin(xyt)\,dx\wedge dy\wedge d\theta+$$

Scanné avec CamScanner

تابع لتصحيح إمتحان مادة الهندسة التفاضلية ليوم: 26/05/2011

$$-xy(x^2\theta-y)^2-\tan(yz)\left[4x^3\theta^2-4xy\theta+\frac{1}{y^2}\ln(x^2+y^2)\right.$$
$$\left.-\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2x\theta}{\sqrt{1-\theta^4}}-xy\cos(xyt)\right]dx\wedge dy\wedge dz\wedge d\theta\wedge dt$$

$$d\alpha(x,y,z)=\left[2xz+yz\sin(xyz)\right]dx\wedge dy$$
$$+\left[xy\sin(xyz)\right]dx\wedge dz$$
$$+\left[z+z\tan^2(yz)-x^2\right]dy\wedge dz$$

$d(\beta\wedge\alpha)=d(-\alpha\wedge\beta)\Rightarrow$ $\boxed{d(\beta\wedge\alpha)=-d(\alpha\wedge\beta)}$

$d\alpha\wedge d\beta\in\Omega_6(\mathbb{R}^5)\Rightarrow$ $\boxed{d\alpha\wedge d\beta=0}$.

$d\beta\wedge d\alpha\in\Omega_6(\mathbb{R}^5)\Rightarrow$ $\boxed{d\beta\wedge d\alpha=0}$

$f:U\to\mathbb{R}^3$, $U=\mathbb{R}_+^*\times]0,\frac{\pi}{2}[\times]0,\frac{\pi}{2}[$ نضع

$(r,\theta,\varphi)\mapsto f(r,\theta,\varphi)=(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$w(x,y,z)=dx\wedge dy+\frac{yz}{x^2+y^2}dx\wedge dz+\frac{xz}{x^2+y^2}dy\wedge dz$

1) حساب f^*w .

نضع $f_1(r,\theta,\varphi)=r\cos\theta\cos\varphi$.

$f_2(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta\cos\varphi$ ، $f_3(r,\theta,\varphi)=r\sin\varphi$.

$a(x,y,z)=\frac{yz}{x^2+y^2}$ ، $b(x,y,z)=\frac{xz}{x^2+y^2}$.

لدينا بتعريف:

$$\boxed{f^*w=df_1\wedge df_2+(a\circ f)\,df_1\wedge df_3+(b\circ f)\,df_2\wedge df_3}$$

$(a\circ f)(r,\theta,\varphi)=a(f_1(r,\theta,\varphi),f_2(r,\theta,\varphi),f_3(r,\theta,\varphi))$ (1)

$=a(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

$=\frac{(r\sin\theta\cos\varphi)(r\sin\varphi)}{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}$

$=\frac{\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$.

$\boxed{(a\circ f)(r,\theta,\varphi)=\sin\theta\tan\varphi}$ (2)

$(b\circ f)(r,\theta,\varphi)=\frac{(r\cos\theta\cos\varphi)(r\sin\varphi)}{r\cos\varphi}$

$\boxed{(b\circ f)(r,\theta,\varphi)=\cos\theta\tan\varphi}$ (3)

$df_i=\frac{\partial f_i}{\partial r}dr+\frac{\partial f_i}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial f_i}{\partial\varphi}d\varphi$, $i=\overline{1,3}$ (4)

$df_1(r,\theta,\varphi)=\cos\theta\cos\varphi\,dr-r\sin\theta\cos\varphi\,d\theta-r\cos\theta\sin\varphi\,d\varphi$

$df_2(r,\theta,\varphi)=\sin\theta\cos\varphi\,dr+r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta-r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi$

$df_3(r,\theta,\varphi)=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi$.

بتعويض كل من (2), (3), (4) في (1) وتبسيط نجد الأخير:

$$f^*w(r,\theta,\varphi)=\left[r-2r\sin^2\varphi\cos^2\theta\right]dr\wedge d\theta+$$
$$+r^2\sin(2\varphi)\cos\theta\,d\theta\wedge d\varphi$$
$$+r\sin(2\varphi)\tan\varphi\,dr\wedge d\varphi.$$

نضع: $\beta=g_1dx\wedge dy\wedge d\theta+g_2dx\wedge dy\wedge dt+$
$+g_3dx\wedge d\theta\wedge dt+g_4dy\wedge d\theta\wedge dt$.

$g_1(x,y,\theta,t)=\sin(xyt)$ ‖ $g_3(x,y,\theta,t)=\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)$.

$g_2(x,y,\theta,t)=x\arcsin\theta^2$ ‖ $g_4(x,y,\theta,t)=(x^2\theta-y)^2$

$d\beta=dg_1\wedge dx\wedge dy\wedge d\theta+dg_2\wedge dx\wedge dy\wedge dt+$
$+dg_3\wedge dx\wedge d\theta\wedge dt+dg_4\wedge dy\wedge d\theta\wedge dt$.

$d\beta=\left[\frac{\partial g_4}{\partial x}-\frac{\partial g_3}{\partial y}+\frac{\partial g_2}{\partial\theta}-\frac{\partial g_1}{\partial t}\right]dx\wedge dy\wedge d\theta\wedge dt$.

$$\boxed{d\beta(x,y,\theta,t)=\left[4x^3\theta^2-4xy\theta+\frac{1}{y^2}\ln(x^2+y^2)-\frac{2}{x^2+y^2}\right.}$$
$$\left.+\frac{2x\theta}{\sqrt{1-\theta^4}}-xy\cos(xyt)\right]dx\wedge dy\wedge d\theta\wedge dt$$

$d\alpha\wedge\beta(x,y,z,\theta,t)=xy(x^2\theta-y)^2dx\wedge dz\wedge dy\wedge d\theta\wedge dt$
$+(z+z\tan^2(yz)-x^2)\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)dy\wedge dz\wedge dx\wedge d\theta\wedge dt$

$$\boxed{d\alpha\wedge\beta(x,y,z,\theta,t)=\left[(z+z\tan^2(yz)-x^2)\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)\right.}$$
$$\left.-xy(x^2\theta-y)^2\right]dx\wedge dy\wedge dz\wedge d\theta\wedge dt.$$

$\beta\wedge d\alpha=(-1)^{3\times2}d\alpha\wedge\beta\Rightarrow$ $\boxed{\beta\wedge d\alpha=d\alpha\wedge\beta}$

تذكير: $w\in\Omega^p(U)$, $\eta\in\Omega^q(U)$ حيث $p,q\in\mathbb{N}$

$d(w\wedge\eta)=dw\wedge\eta+(-1)^pw\wedge d\eta$.

$d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^1\alpha\wedge d\beta$ أي:

$\boxed{d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta-\alpha\wedge d\beta}$

$\alpha\wedge d\beta$ حساب Ω_5 ؛ $\Omega_5=\{0\}$!

$\alpha\wedge d\beta(x,y,z,\theta,t)=\tan(yz)\left[4x^3\theta^2-4xy\theta+\frac{1}{y^2}\ln(x^2+y^2)\right.$
$\left.-\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2x\theta}{\sqrt{1-\theta^4}}-xy\cos(xyt)\right]dz\wedge dx\wedge dy\wedge d\theta\wedge dt$

$\alpha\wedge d\beta(x,y,z,\theta,t)=\tan(yz)\left[4x^3\theta^2-4xy\theta+\frac{1}{y^2}\ln(x^2+y^2)\right.$
$\left.-\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2x\theta}{\sqrt{1-\theta^4}}-xy\cos(xyt)\right]dx\wedge dy\wedge dz\wedge d\theta\wedge dt$

$d(\alpha\wedge\beta)(x,y,z,\theta,t)=\left[(z+z\tan^2(yz)-x^2)\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)\right.$

Scanné avec CamScanner

1) تعريف المجموعة الجزئية من $\mathbb{R}^n$: نقول أن $M \subset \mathbb{R}^n$ جزئية من $\mathbb{R}^n$ بعدها p و $p \in \mathbb{N}$ إذا تحقق: $\forall x_0 \in M, \exists U = U \in \mathcal{V}(x_0), \exists V = V \in \mathcal{V}(0_{\mathbb{R}^n})$: يوجد φ تشاكل تفاضلي من U نحو V بحيث $\varphi(x_0) = 0$ و $\varphi(U \cap M) = V \cap \{\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}\}$

ب)

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\} \quad a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$$

لنضع:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

البرهان أن f مستمرة وقابلة للتفاضل على $\mathbb{R}^3$.

بما أن f كثير حدود، إذن f مستمرة وقابلة للتفاضل على $\mathbb{R}^3$.

2) حساب df وتعيين المجموعة اليعقوبية ودراسة رتبة df حسب (x,y,z)

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $d_{(x,y,z)} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(h_1,h_2,h_3) \mapsto d_{(x,y,z)} f(h_1,h_2,h_3)$

$df : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $(x,y,z) \mapsto d_{(x,y,z)} f$

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ d_{(x,y,z)} f(h_1,h_2,h_3) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \frac{2x}{a^2} h_1 + \frac{2y}{b^2} h_2 + \frac{2z}{c^2} h_3$$

دراسة رتبة $d_{(x,y,z)} f$ حسب قيم (x,y,z) في $\mathbb{R}^3$.

حالة (1) $(x,y,z) = (0,0,0)$, $d_{(0,0,0)} f = 0$ ومنه $rg(d_{(0,0,0)} f) = 0$.

حالة (2) $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, $d_{(x,y,z)} f \neq 0$ ومنه $rg(d_{(x,y,z)} f) = 1$

3) تعيين V حل (ف نبذة) $rg_{(x,y,z)} f$

لدينا $(0,0,0) \notin V$ إذن: $\forall (x,y,z) \in V$, $rg_{(x,y,z)} f = rg(d_{(x,y,z)} f) = 1$

4) البرهان أن V م.ج من $\mathbb{R}^3$ بإيجاد بعدها، أي f غمرية على V.

$V = f^{-1}(\{0\})$ و 0 نقطة عادية $\Rightarrow V \neq \emptyset$

$\dim V = 3 - 1 = 2$. V م.ج من $\mathbb{R}^3$ وبعدها 2. لدينا $rg_{(x,y,z)} f = 1$.

5) في السؤال 3 لدينا $\forall (x,y,z) \in V$, $T_{(x,y,z)} V = \ker(d_{(x,y,z)} f)$

$$T_{(x,y,z)} V = \left\{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3, \ \frac{x}{a^2} h_1 + \frac{y}{b^2} h_2 + \frac{z}{c^2} h_3 = 0\right\}.$$

معادلة مستوي في فضاء $\mathbb{R}^3$.

Scanné avec CamScanner

التمرين 02 : [10 نقاط]

أ) تعريف: الشكل p- خطي على E ، الشكل p- خطي متناوب على E. /2

E ف. ش على IR لتعتبر التطبيق

$$f: E^p \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1,\dots,x_p) \mapsto f(x_1,\dots,x_p)$$ (0,5)

نقول أن f p- خطي على E إذا كان خطي بالنسبة لكل مركبة x_j حيث $j=\overline{1,p}$: (0,5)

أي:

$$\forall j=\overline{1,p},\ \forall x_j^1, x_j^2 \in E,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$
$$f(x_1,\dots,x_{j-1},\alpha x_j^1+\beta x_j^2,x_{j+1},\dots,x_p)=\alpha f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j^1,x_{j+1},\dots,x_p)+\beta f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j^2,x_{j+1},\dots,x_p).$$ (0,5)

نقول أن f p- خطي متناوب على E إذا تحقق: / f p- خطي على E (0,5) ← عد بذكر

$$\forall j=\overline{1,p-1},\quad x_j=x_{j+1} \Rightarrow f(x_1,\dots,x_j,x_j,x_{j+2},\dots,x_p)=0.$$ (0,5)

ب) لتعتبر الأشكال التفاضلية:

$$\alpha(x,y,z)=\cos(xyz)\,dx+(x^2z-y)\,dy+\tan(yz)\,dz.$$

$$\beta(x,y,\theta,t)=\sin(xyz)\,dx\wedge dy\wedge d\theta+x\arcsin(\theta^2)\,dx\wedge dy\wedge dt+\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)\,dx\wedge d\theta\wedge dt+(x^2\theta-y)^2\,dy\wedge d\theta\wedge dt.$$

$$\alpha\wedge\beta(x,y,z,\theta,t)=\Big[\cos(xyz)(x^2\theta-y)^2-(x^2z-y)\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)\Big]dx\wedge dy\wedge d\theta\wedge dt+\tan(yz)\Big[\sin(xyt)\,dx\wedge dy\wedge dz\wedge d\theta+x\arcsin(\theta^2)\,dx\wedge dy\wedge dz\wedge dt-\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)\,dx\wedge dz\wedge d\theta\wedge dt-(x^2\theta-y)^2\,dy\wedge dz\wedge d\theta\wedge dt\Big]$$ (0,5)

$\beta\wedge\alpha=(-1)^{1\times 3}\alpha\wedge\beta$; $\beta\wedge\alpha=-\alpha\wedge\beta$ (0,5)

$$d\alpha(x,y,z)=d(\cos(xyz))\wedge dx+d(x^2z-y)\wedge dy+d(\tan(yz))\wedge dz.$$ (0,5)

$$d\alpha(x,y,z)=\big[2xz+x^2y\sin(xyz)\big]dx\wedge dy+\big[xy\sin(xyz)\big]dx\wedge dz+\big[z+z\tan^2(yz)-x^2\big]dy\wedge dz.$$

$$d\beta(x,y,\theta,t)=\Big[4x^3\theta^2-4xy\theta+\frac{1}{y^2}\ln(x^2+y^2)-\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2x\theta}{\sqrt{1-\theta^4}}-xy\cos(xyt)\Big]dx\wedge dy\wedge d\theta\wedge dt$$ (0,5)

$$d\alpha\wedge\beta(x,y,z,\theta,t)=\Big[(z+zt^2\tan(yz)-x^2)-\frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)-xy(x^2\theta-y)^2\Big]dx\wedge dy\wedge dz\wedge d\theta\wedge dt$$ (0,5)

$\beta\wedge d\alpha=(-1)^{3\times 2}d\alpha\wedge\beta=-d\alpha\wedge\beta$ (0,5) ; $d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^1\alpha\wedge d\beta \Rightarrow d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta-\alpha\wedge d\beta$ (0,5)

$$\alpha\wedge d\beta(x,y,z,\theta,t)=\tan(yz)\Big[4x^3\theta^2-4xy\theta+\frac{1}{y^2}\ln(x^2+y^2)-\frac{2}{x^2+y^2}-xy(x^2\theta-y)^2\Big]dx\wedge dy\wedge dz\wedge d\theta\wedge dt$$ (0,5)

$d(\beta\wedge\alpha)=-d(\alpha\wedge\beta)$ (0,5) ; $d\alpha\wedge d\beta=0$ (0,5) ; $d\beta\wedge d\alpha=0$ (0,5)

ج) $f: U=]\mathbb{R}_+^*\times]0,\tfrac{\pi}{2}[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (0,5)

$(r,\theta,\varphi) \mapsto (r\cos\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$

$f_1(r,\theta,\varphi)$; $f_2(r,\theta,\varphi)$; $f_3(r,\theta,\varphi)$

$$\omega(x,y,z)=dx\wedge dy+\frac{yz}{x^2+y^2}dx\wedge dz+\frac{xz}{x^2+y^2}dy\wedge dz.$$

$\alpha(x,y,z)$; (x,y,z) ; (x,y,z) (0,5)

$$f^*\omega=df_1\wedge df_2+(a\circ f)\,df_1\wedge df+(b\circ f)\,df_2\wedge df_3$$ (0,5)

$(a\circ f)(r,\theta,\varphi)=\sin\theta\,tg$ (0,5) ; $b\circ f(r,\theta,\varphi)=\cos\theta\,tg\varphi$ (0,5)

$$df_1(r,\theta,\varphi)=\cos\theta\cos\varphi\,dr-r\sin\theta\cos\varphi\,d\theta-r\cos\theta\sin\varphi\,d\varphi$$ (0,5)

$$df_2(r,\theta,\varphi)=\sin\theta\cos\varphi\,dr+r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta-r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi$$ (0,5)

$$df_3(r,\theta,\varphi)=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi$$ (0,5)

$$f^*\omega(r,\theta,\varphi)=\big[r-2r\sin^2\varphi\cos^2\theta\big]dr\wedge d\theta+r^2\sin(2\varphi)\cos\theta\,d\theta\wedge d\varphi+r\sin(2\varphi)\,tg\varphi\,dr\wedge d\varphi.$$ (0,5)

Scanné avec CamScanner