كلية العلوم الدقيقة والعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
فرع الرياضيات السنة الثالثة LMD (S6)

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

الإمتحان في مادة الهندسة التفاضلية

يوم: 2015/05/19
المدة: ساعة ونصف
2014 -2015

التمرين 01: ما هو تعريف الشكل التفاضلي ذو الرتبة p على $U \subset E$ حيث E فضاء شعاعي، ثم أكتب عبارته في حالة البعد المنتهي (أي: $\dim E = n$)، مع إعطاء مثال من أجل $n = 5$ و $p = 3$.

التمرين 02: لنضع: $S^1 = \left\{(x, y) \in IR^2;\ x^2 + y^2 = 1\right\}$، ونعرف ما يلي:

$$U_1 = \left\{(x, y) \in IR^2;\ x > 0\right\} \qquad U_3 = \left\{(x, y) \in IR^2;\ y > 0\right\}$$
$$U_2 = \left\{(x, y) \in IR^2;\ x < 0\right\} \qquad U_4 = \left\{(x, y) \in IR^2;\ y < 0\right\}$$

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow IR^2 \qquad \begin{cases} \varphi_i(x, y) = \left(\arctan \dfrac{y}{x}, x^2 + y^2 - 1\right) & ; i = 1,2 \\ \varphi_i(x, y) = \left(\arctan \dfrac{x}{y}, x^2 + y^2 - 1\right) & ; i = 3,4 \end{cases}$$

1. أثبت أن: $\varphi_i(U_i) = V$، مهما يكن، $i = 1,4$ حيث: $V = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\times \left]-1, +\infty\right[$.
2. برهن أن $A = \left\{(U_i, \varphi_i), i = \overline{1,4}\right\}$ يشكل أطلس قابلة للتفاضل على $IR^2 - \left\{(0,0)\right\}$.
3. بين أن S^1 منوعة طبولوجية جزئية من IR^2، وعين بعدها.

التمرين 03: لنضع $V = \left\{(x, y, z) \in IR^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 14,\quad x^3 + y^3 + z^3 = 36\right\}$

بين أن V منوعة طبولوجية جزئية من IR^3، وعين بعدها.

التمرين 04:

أ- أحسب كل من: $\alpha \wedge \beta$، و $\beta \wedge \alpha$، و $d\alpha$، و $d\beta$، و $d(\beta \wedge \alpha)$، و $d(\alpha \wedge \beta)$، و $d\alpha \wedge d\beta$ و $d\beta \wedge d\alpha$ حيث: $\alpha(x, y, z) = x\,y\,z\ dx + y\,z\ \ dy + (x + y + z)\ dz$

$$\beta(x, y, z) = \frac{2\ dx}{1 + x^2} + \frac{z\ dy}{1 + y^2 z^2} + \frac{y\ dz}{1 + y^2 z^2}$$

ب- لنضع: $U = IR_+^* \times \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$$f : U \longrightarrow IR^3$$
$$(r, \theta, \varphi) \mapsto f(r, \theta, \varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$w(x, y, z) = dx \wedge dy + \frac{yz}{x^2 + y^2} dx \wedge dz + \frac{xz}{x^2 + y^2} dy \wedge dz$$

1. أحسب كل من: $f^* w$، أوجد الشكل التفاضلي ϕ المعرف على U بحيث: $d\phi = f^* w$.
2. استنتج الشكل التفاضلي η المعرف على V بحيث: $d\eta = w$.

التنقيط: [التمرين1: 04 نقاط] [التمرين2: 06 نقاط] [التمرين3: 04 نقاط] [التمرين4: 06 نقاط]

بالتوفيق

حل الإمتحان الخاص بمادة الهندسة التفاضلية ليوم: 2015/05/19 (2014/2015)

حل التمرين 01

نقول أن w شكل تفاضلي ذو الرتبة p على U حيث $U \subset E$ حيث E فضاء شعاعي، إذا كان w تطبيق من U نحو $L_a^p(E)$ (مجموعة التطبيقات p-خطية المتناوبة على E). $w : U \longrightarrow L_a^p(E)$.

في حالة بعد منته $\dim E = n$ لدينا

$$w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c_{i_1, \dots, i_p} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} .$$

حيث: $c_{i_1, \dots, i_p} : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

مثال: $n=5$ و $p=3$ لدينا

$$w = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 5} c_{i_1, i_2, i_3} \, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3}$$

$$w = c_{1,2,3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + c_{1,2,4} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + c_{1,2,5} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_5 + c_{1,3,4} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + c_{1,3,5} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 + c_{1,4,5} dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_5 + c_{2,3,4} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + c_{2,3,5} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5 + c_{2,4,5} dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_5 + c_{3,4,5} dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 .$$

حل التمرين 03

لنضع $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 14, x^3+y^3+z^3 = 36\}$

البرهان أن V منوعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ وما بعدها؟

لنضع: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$X = (x,y,z) \longmapsto f(X) = (\underbrace{x^2+y^2+z^2-14}_{f_1(X)}, \underbrace{x^3+y^3+z^3-36}_{f_2(X)}) .$$

نلاحظ أن $V = f^{-1}(\{(0,0)\})$ ومنه يكفي أن نبرهن أن $(0,0)$ قيمة عادية لـ f

لنبرهن أن f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^3$ ونعين $df(X)$.

f_1 و f_2 كثيرات حدود ومنه f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^3$ ولدينا: $df(X) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$h \longmapsto df(X)(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$h = (h_1, h_2, h_3)^T \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} df(X)(h) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xh_1 + 2yh_2 + 2zh_3 \\ 3x^2h_1 + 3y^2h_2 + 3z^2h_3 \end{pmatrix} \\ \forall X \in \mathbb{R}^3, h \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

لنبرهن أن $(0,0)$ قيمة عادية لـ f أي أنه من أجل كل $X \in f^{-1}(\{(0,0)\})$ لدينا $df(X)$ غامر:

$$X \in f^{-1}(\{(0,0)\}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 14 \text{ —— } (1) \\ x^3+y^3+z^3 = 36 \text{ —— } (2) \end{cases}$$

يكفي أن نبرهن أن $\dim Ker(df(X)) = 1$ ـــ (3)

$$h \in Ker(df(X)) \Leftrightarrow df(X)(h) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(xh_1 + yh_2 + zh_3) = 0 \text{ — } (4) \\ 3(x^2h_1 + y^2h_2 + z^2h_3) = 0 \text{ — } (5) \end{cases}$$

$-y \times (4) + (5) \Leftrightarrow x(x-y)h_1 = z(y-z)h_3$ —— (6)

$-z \times (4) + (5) \Leftrightarrow x(x-z)h_1 = y(z-y)h_2$ —— (7)

$-x \times (4) + (5) \Leftrightarrow y(y-x)h_2 = z(x-z)h_3$ —— (8)

الحالات الممكنة:

$\boxed{1}$ $\boxed{x=y=z=0}$ (3 عناصر معدومة): من (1) و (2) مرفوضة.

$\boxed{2}$ (2 عناصر معدومة فقط) $\boxed{x=y=0 \text{ و } z \neq 0}$ (1) $\Leftrightarrow z^2 = 14 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{14}$ | (2) $\Leftrightarrow z^3 = 36$

مرفوض لأن $(\pm\sqrt{14})^3 \neq 36$.

$\boxed{3}$ (عنصر واحد فقط معدوم)

$\boxed{x=0 \text{ و } y \neq 0 \text{ و } z \neq 0}$ توجد حالتين في هذه الحالة ③

$\boxed{1.3}$ $\boxed{y=z}$ ومنه (1) $\Leftrightarrow 2y^2 = 14 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{7}$ | (2) $\Leftrightarrow y^3 = 18$

مرفوض لأن $(\pm\sqrt{7})^3 \neq 18$.

$\boxed{2.3}$ $\boxed{y \neq z}$ $x=0 \Leftrightarrow$ ⑥, ⑦ $\Leftrightarrow h_2 = h_3 = 0$

$h \in Ker(df(X)) \Leftrightarrow h = (h_1, 0, 0) = h_1(1, 0, 0)$.

$\boxed{4}$ لا يوجد عنصر معدوم $\boxed{x \neq 0, y \neq 0 \text{ و } z \neq 0}$

توجد 3 حالات في هذه الحالة $\boxed{4}$

$\boxed{1.4}$ $\boxed{x=y=z}$ ومنه (1) $\Leftrightarrow 3x^2 = 14 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{14}{3}}$ | (2) $\Leftrightarrow x^3 = 12$

مرفوضة لأن $(\pm\sqrt{\frac{14}{3}})^3 \neq 12$.

$\boxed{2.4}$ عنصرين متساويين فقط

$x = y \neq z$ ، في $(x=y)$ (6) و (8) $\Leftrightarrow h_3 = 0$

ومنه $(7) \Leftrightarrow h_2 = \frac{x(x-z)}{y(z-y)} h_1$

$$h \in Ker(df(X)) \Leftrightarrow h = \left(h_1, \frac{x(x-z)}{y(z-y)} h_1, 0\right) = \left(1, \frac{x(x-z)}{y(z-y)}, 0\right) h_1$$

$\boxed{3.4}$ لا توجد عناصر متساوية $\boxed{x \neq y \neq z \neq x}$

$(7) \Leftrightarrow h_2 = \frac{x(x-z)}{y(z-y)} h_1$ | $(6) \Leftrightarrow h_3 = \frac{x(x-y)}{z(y-z)} h_1$

$$h \in Ker(df(X)) \Leftrightarrow h = \left(h_1, \frac{x(x-z)}{y(z-y)} h_1, \frac{x(x-y)}{z(y-z)} h_1\right)$$

$$\Leftrightarrow h = \left(1, \frac{x(x-z)}{y(z-y)}, \frac{x(x-y)}{z(y-z)}\right) h_1 .$$

ومنه $\dim Ker(df(X)) = 1$ ومنه $\dim Im\, df(X) = 3 - 1 = 2$

إذن وهو المطلوب إذن V منوعة جزئية من $\mathbb{R}^3$

بعدها: $\boxed{\dim V = 1}$

حل التمرين 02: $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$

$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ | $U_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$

$U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}$ | $U_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < 0\}$

$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^2 ; \varphi_i(x,y) = (\arctan \frac{y}{x}, x^2+y^2-1) , i = 1,2$

$\varphi_i(x,y) = (\arctan \frac{x}{y}, x^2+y^2-1) , i = 3,4$.

$\boxed{1}$ إثبات أن $\varphi_i(U_i) = V, \forall i = \overline{1,4}$.

$V =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-1, +\infty[$. ?

$\forall (x,y) \in U_{1,2} : -\frac{\pi}{2} < \text{Arctan} \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$.

$x > 0$ (ou: $x < 0$), $y \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-1 > -1$

$\Rightarrow \forall (x,y) \in U_{1,2} : (\text{Arctan} \frac{y}{x}, x^2+y^2-1) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-1, +\infty[$

$\forall (x,y) \in U_{3,4} : -\frac{\pi}{2} < \text{Arctan} \frac{x}{y} < \frac{\pi}{2}$.

$\varphi_i(x,y)=(\arctan\frac{y}{x}, x^2+y^2-1)=(\alpha,\beta),\ i=\overline{1,2}$

$\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}=\alpha\\ x^2+y^2-1=\beta\end{cases}\iff\begin{cases}\tan\alpha=\frac{y}{x}\\ x^2+y^2=\beta+1\end{cases}\iff\begin{cases}y=x\tan\alpha\\ x^2+x^2\tan^2\alpha=\beta+1\end{cases}$

$\iff\begin{cases}y=x\tan\alpha\\ x^2(1+\tan^2\alpha)=\beta+1\iff x=\sqrt{\frac{\beta+1}{1+\tan^2\alpha}},\end{cases}$ $\boxed{\beta\in V,\ \beta>-1\ (\Rightarrow)\ \beta+1>0}$ $\boxed{x>0,\ (x,y)\in U_i,\ i=1,2}$

$y=\tan\alpha\sqrt{\frac{\beta+1}{1+\tan^2\alpha}},$

$\boxed{\varphi_i^{-1}(\alpha,\beta)=\sqrt{\frac{\beta+1}{1+\tan^2\alpha}}(1,\tan\alpha),\ \forall(\alpha,\beta)\in V \quad i=\overline{1,2}}$

$\varphi_i(x,y)=(\arctan\frac{x}{y}, x^2+y^2-1)=(\alpha,\beta),\ i=\overline{3,4}.$

$\begin{cases}\arctan\frac{x}{y}=\alpha\\ x^2+y^2-1=\beta\end{cases}\iff\begin{cases}x=y\tan\alpha.\\ y^2\tan^2\alpha+y^2=\beta+1\end{cases}$

$\iff\begin{cases}x=y\tan\alpha\\ y^2(\tan^2\alpha+1)=\beta+1\iff y=\sqrt{\frac{\beta+1}{1+\tan^2\alpha}}.\end{cases}$ $\boxed{\beta+1>0}$ $\boxed{y>0,\ (x,y)\in U_i,\ i=3,4}$

$\Rightarrow x=\tan\alpha\sqrt{\frac{\beta+1}{1+\tan^2\alpha}}$

$\boxed{\varphi_i^{-1}(\alpha,\beta)=\sqrt{\frac{\beta+1}{1+\tan^2\alpha}}(\tan\alpha,1),\ \forall(\alpha,\beta)\in V \quad i=3,4}$

φ_i^{-1} مستمرة على V ومنه φ_i مستمرة لكل من U_i نحو V.

U_i مفتوح في $\mathbb{R}^2$ ؟

لدينا φ_i مستمرة على U_i ولدينا $\varphi_i^{-1}(V)=U_i$ و V مفتوح في $\mathbb{R}^2$ (جداء مفتوحين) اذن U_i مفتوح في $\mathbb{R}^2$

ومنه (U_i,φ_i) خريطة على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

لدينا $\bigcup_{i=1,4}U_i=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ اذن $\mathcal{A}$ أطلس على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

لنبرهن ان $\mathcal{A}$ أطلس قابل للتفاضل ؟

لدينا $U_1\cap U_2=\phi$ اذن (U_1,φ_1) و (U_2,φ_2) متلائمتين

و $U_3\cap U_4=\phi$ اذن (U_3,φ_3) و (U_4,φ_4) متلائمتين

$U_1\cap U_3\neq\phi$:

$U_1\cap U_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0,\ y>0\}.$

$\Rightarrow\varphi_1(U_1\cap U_3)=\varphi_3(U_1\cap U_3)=]0,\frac{\pi}{2}[\times]-1,+\infty[=V_1$

$(x,y)\in U_1\cap U_3\iff x>0,y>0 \to \frac{x}{y}>0\Rightarrow 0<\arctan\frac{x}{y}<\frac{\pi}{2}$ و $\frac{y}{x}>0\Rightarrow 0<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$

$\varphi_{13}:V_1\to V_1:\ \varphi_{13}(\alpha,\beta)=\varphi_1\circ\varphi_3^{-1}(\alpha,\beta)$

$\varphi_{13}(\alpha,\beta)=\left(\arctan\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right),\beta\right),\ \forall(\alpha,\beta)\in V_1.$

φ_{13} قابل للتفاضل على V_1.

$\varphi_{31}:V_1\to V_1\ \ \varphi_{31}(\alpha,\beta)=\varphi_3\circ\varphi_1^{-1}(\alpha,\beta)$

$\varphi_{31}(\alpha,\beta)=\left(\arctan\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right),\beta\right)=\varphi_{31}(\alpha,\beta).\ \forall(\alpha,\beta)$

ومنه (U_1,U_3) و (U_3,U_1) متلائمتين.

$x\in\mathbb{R},\ y>0$ (ou: $y<0$) $\Rightarrow x^2+y^2>0,\ x^2+y^2-1>-1$

$\forall(x,y)\in U_{3,4}:\ (\arctan\frac{x}{y}, x^2+y^2-1)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-1,+\infty[$

ومنه $\varphi_i(U_i)=V=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-1,+\infty[,\ \forall i=\overline{1,4}$

2] لنبرهن أن $\mathcal{A}=\{(U_i,\varphi_i),\ i=\overline{1,4}\}$ أطلس ق.ت على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

• لنبرهن أن (U_i,φ_i) خريطة محلية $i=\overline{1,4}$.

• φ_i دالة مركبة من دالة $\arctg\alpha$ وكثير حدود ومنه φ_i معرفة ومستمرة على U_i

• φ_i تقابل من U_i نحو V ؟

• φ_i غامرة من U_i نحو V لأن $\varphi_i(U_i)=V$.

• φ_i متباينة من U_i نحو V من أجل كل $i=\overline{1,4}$.

$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in U_i:\ \varphi_i(x_1,y_1)=\varphi_i(x_2,y_2).$

$\Rightarrow\begin{cases}\arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right)=\arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right) & \text{si } i=1,2\\ \arctan\left(\frac{x_1}{y_1}\right)=\arctan\left(\frac{x_2}{y_2}\right). & \text{si } i=3,4\\ x_1^2+y_1^2-1=x_2^2+y_2^2-1 & \forall i=\overline{1,4}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2} & ,\text{si } i=\overline{1,2}\ \text{——}(1)\\ \frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2} & ,\text{si } i=\overline{3,4}\ \text{——}(2)\\ x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2 & ,\ i=\overline{1,4}\ \text{——}(3).\end{cases}$

$(1)\iff\exists\alpha\in\mathbb{R}\ \ y_1=\alpha x_1,\ y_2=\alpha x_2$ ——(4)

بتعويض (4) في (3) نجد: $x_1^2+\alpha^2x_1^2=x_2^2+\alpha^2x_2^2$

$\iff\begin{cases}(1+\alpha^2)x_1^2=(1+\alpha^2)x_2^2\iff x_1^2=x_2^2\\ 1+\alpha^2\neq0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x_1=x_2}, & x_1>0,\ x_2>0\ \text{——}(5)\\ \text{ou}\\ x_1=-x_2 & \text{مرفوض}\end{cases}$

بتعويض (5) في (4) نجد: $\boxed{y_1=y_2}.$

بنفس الطريقة من أجل $i=\overline{3,4}$:

$(2)\iff\exists\beta:\ x_1=\beta y_1,\ x_2=\beta y_2$ ——(6)

بتعويض (6) في (3) $\beta^2y_1^2+y_1^2=\beta y_2^2+y_2^2$

$\iff\begin{cases}(1+\beta^2)y_1^2=(1+\beta^2)y_2^2\iff y_1^2=y_2^2.\\ 1+\beta^2\neq0\end{cases}$

$\iff\begin{cases}\boxed{y_1=y_2}, & y_1>0,\ y_2>0\ \text{——}(7)\\ \text{ou}\\ y_1=-y_2 & \text{مرفوض}.\end{cases}$

بتعويض (7) في (6) نجد: $\boxed{x_1=x_2}$

اذن φ_i متباينة اذن φ_i تقابل

اذن من أجل $i=\overline{1,4}$ يوجد φ_i^{-1} معرف كما يلي:

$\varphi_i^{-1}:V\longrightarrow U_i\ ;\ \varphi_i^{-1}(\alpha,\beta)=(x,y)$

$$+\left(\frac{xy^2z}{1+y^2z^2}-\frac{2(x+y+z)}{1+x^2}\right)dx\wedge dz+$$
$$+\left(\frac{y^2z-xz-yz-z^2}{1+y^2z^2}\right)dy\wedge dz.$$

$\beta\wedge\alpha=(-1)^1\alpha\wedge\beta \Leftrightarrow \boxed{\beta\wedge\alpha=-\alpha\wedge\beta}$

حساب $d\alpha$ و $d\beta$: $\alpha=a_1dx+a_2dy+a_3dz$.

$a_1(x,y,z)=xyz,\ a_2(x,y,z)=yz;\ a_3(x,y,z)=x+y+z.$

$\beta=b_1dx+b_2dy+b_3dz$;

$b_1(x,y,z)=\frac{2}{1+x^2},\ b_2(x,y,z)=\frac{z}{1+y^2z^2},\ b_3(x,y,z)=\frac{y}{1+y^2z^2}.$

$d\alpha=da_1\wedge dx+da_2\wedge dy+da_3\wedge dz.$

$d\alpha=\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy+\left(\frac{\partial a_3}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial z}\right)dx\wedge dz+\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)dy\wedge dz.$

$\boxed{d\alpha=xz\,dy\wedge dx+(1-xy)\,dx\wedge dz+(1-y)\,dy\wedge dz}$

$d\beta=\left[\frac{\cancel{1+y^2z^2}-\cancel{2y^2z^2}-\cancel{1-y^2z^2}+\cancel{2y^2z^2}}{(1+y^2z^2)^2}\right]dy\wedge dz$

$\boxed{d\beta=0}$

$d(\beta\wedge\alpha)=d\beta\wedge\alpha+(-1)^{+1}\beta\wedge d\alpha.$

$$\boxed{d(\beta\wedge\alpha)=\left(\frac{2(y-1)}{1+x^2}+\frac{\cancel{\quad}+z}{1+y^2z^2}\right)dx\wedge dy\wedge dz}$$

$\boxed{d(\alpha\wedge\beta)=d[-(\beta\wedge\alpha)]=-d(\beta\wedge\alpha).}$

$\boxed{d\alpha\wedge d\beta=0}$. $\boxed{d\beta\wedge d\alpha=0}$.

ب] لنضع: $U=\mathbb{R}_+^*\times]0,\frac{\pi}{2}[\times]0,\frac{\pi}{2}[$: $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^3$.

$(r,\theta,\varphi)\mapsto f(r,\theta,\varphi)=(\overbrace{r\cos\theta\cos\varphi}^{f_1},\overbrace{r\sin\theta\cos\varphi}^{f_2},\overbrace{r\sin\varphi}^{f_3}).$

$w(x,y,z)=dx\wedge dy+a(x,y,z)dx\wedge dz+b(x,y,z)dy\wedge dz$

حيث $a(x,y,z)=\frac{yz}{x^2+y^2}$ ، $b(x,y,z)=\frac{xz}{x^2+y^2}.$

1) حساب f^*w وإيجاد ϕ بحيث $d\phi=f^*w$ ؟

$\boxed{f^*w=df_1\wedge df_2+(a\circ f)df_1\wedge df_3+(b\circ f)df_2\wedge df_3.}$

$(a\circ f)(r,\theta,\varphi)=\frac{r^2\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}.$

$(a\circ f)(r,\theta,\varphi)=\frac{r^2\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\boxed{(a\circ f)=\sin\theta\,tg\varphi}$

$(b\circ f)(r,\theta,\varphi)=\frac{r^2\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}$

$\Rightarrow\boxed{(b\circ f)(r,\theta,\varphi)=\cos\theta\,tg\varphi}$

$df_i(r,\theta,\varphi)=\frac{\partial f_i}{\partial r}(r,\theta,\varphi)dr+\frac{\partial f_i}{\partial\theta}(r,\theta,\varphi)d\theta+\frac{\partial f_i}{\partial\varphi}(r,\theta,\varphi)d\varphi.\quad i=\overline{1,3}.$

$U_2\cap U_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x<0, y<0\}$ $U_2\cap U_4\neq\phi$

$\varphi_2(U_2\cap U_4)=\varphi_4(U_2\cap U_4)=V_1.$

$\varphi_{24}:V_1\longrightarrow V_1.\ \varphi_{24}=\varphi_2\circ\varphi_4^{-1}=\varphi_1\circ\varphi_3^{-1}=\varphi_{13}$

$\varphi_{42}:V_1\longrightarrow V_1;\ \varphi_{42}=\varphi_4\circ\varphi_2^{-1}=\varphi_3\circ\varphi_1^{-1}=\varphi_{31}.$

ومنه (U_1,φ_1) و (U_4,φ_4) متلائمتين

$U_1\cap U_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0, y<0\}.$ $U_1\cap U_4\neq\phi$.

$\varphi_1(U_1\cap U_4)=\varphi_4(U_1\cap U_4)=]-\frac{\pi}{2},0[\times]1,+\infty[=V_2.$

$(x,y)\in U_1\cap U_4\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\y<0\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}<0\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{x}{y}<0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\frac{y}{x}<0\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<0$

$\varphi_{14}:V_2\longrightarrow V_2:\ \varphi_{14}=\varphi_1\circ\varphi_4^{-1}.$

$\varphi_{14}(\alpha,\beta)=\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right),\beta\right),\ \forall(\alpha,\beta)\in V_2.$

φ_{14} قابلة للتفاضل على V_2.

$\varphi_{41}:V_2\longrightarrow V_2\quad\varphi_{41}=\varphi_4\circ\varphi_1^{-1}.$

$\varphi_{41}(\alpha,\beta)=\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right),\beta\right)=\varphi_{14}(\alpha,\beta),\ \forall(\alpha,\beta)\in V_2.$

ومنه (U_1,φ_1) و (U_4,φ_4) متلائمتين.

$U_2\cap U_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x<0, y>0\}.$ $U_2\cap U_3\neq\phi$.

$\varphi_2(U_2\cap U_3)=\varphi_3(U_2\cap U_3)=V_2.$

$\varphi_{23}:V_2\longrightarrow V_2:\ \varphi_{23}=\varphi_2\circ\varphi_3^{-1}=\varphi_1\circ\varphi_4^{-1}=\varphi_{14}$

$\varphi_{32}:V_2\longrightarrow V_2:\ \varphi_{32}=\varphi_3\circ\varphi_2^{-1}=\varphi_4\circ\varphi_1^{-1}=\varphi_{41}$

ومنه (V_2,φ_2) و (U_3,φ_3) متلائمتين.

إذن $\mathcal{A}$ أطلس قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

3 البرهان S^1 متنوعة طبولوجية من $\mathbb{R}^3$ وعيّن بعدها:

$\varphi_i(U_i\cap S^1)=\varphi_i(U_i)\cap\varphi_i(S^1),\ i=\overline{1,4}$
$\qquad=V\cap\varphi_i(S^1)$

$\varphi_i(S^1)=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times\{0\}.\qquad i=\overline{1,4}$

$\Rightarrow\varphi_i(U_i\cap S^1)=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times\{0\}.\ i=\overline{1,4}$

إذن S^1 متنوعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ بعدها 1 .

حل التمرين [i]: 04

$\beta(x,y,z)=\frac{2dx}{1+x^2}+\frac{zdy+ydz}{1+y^2z^2}$

$\alpha(x,y,z)=xyz\,dx+yz\,dy+(x+y+z)dz.$

$\alpha\wedge\beta(x,y,z)=\frac{xyz^2}{1+y^2z^2}dx\wedge dy+\frac{xy^2z}{1+y^2z^2}dx\wedge dz+$
$+\frac{2yz}{1+x^2}dy\wedge dx+\frac{y^2z}{1+y^2z^2}dy\wedge dz+$
$+\frac{2(x+y+z)}{1+x^2}dz\wedge dx+\frac{xz+yz+z^2}{1+y^2z^2}dz\wedge dy.$

$\alpha\wedge\beta(x,y,z)=\left(\frac{xyz^2}{1+y^2z^2}-\frac{2yz}{1+x^2}\right)dx\wedge dy+$

تابع لحل الامتحان الخاص بمادة الهندسة التفاضلية ليوم : 19/05/10

$df_1(r,\theta,\varphi) = \cos\theta\cos\varphi\, dr - r\sin\theta\cos\varphi\, d\theta - r\cos\theta\sin\varphi\, d\varphi$

$df_2(r,\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi$

$df_3(r,\theta,\varphi) = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi.$

$dr\wedge d\varphi$

$df_1\wedge df_2(r,\theta,\varphi) = r\cos^2\theta\cos^2\varphi\, dr\wedge d\theta - r\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\, dr\wedge d\varphi$
$- r\sin^2\theta\cos^2\varphi\, d\theta\wedge dr + r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\, d\theta\wedge d\varphi.$
$- r\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\wedge dr - r^2\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\wedge d\theta.$

$df_1\wedge df_2(r,\theta,\varphi) = r\cos^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, dr\wedge d\theta$
$+ r^2\cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta\wedge d\varphi.$

$\boxed{df_1\wedge df_2(r,\theta,\varphi) = r\cos^2\theta\, dr\wedge d\theta + r^2\cos\varphi\sin\varphi\, d\theta\wedge d\varphi}$

$df_1\wedge df_3(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\, dr\wedge d\theta$
$+ [r\cos\theta\cos^2\varphi + r\cos\theta\sin^2\varphi]\, dr\wedge d\varphi$
$+ [-r\sin\theta\cos^2\varphi]\, d\theta\wedge d\varphi.$

$\boxed{df_1\wedge df_3(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\, dr\wedge d\theta + r\cos\theta\, dr\wedge d\theta - r^2\sin\theta\cos^2\varphi\, d\theta\wedge d\varphi}$

$df_2\wedge df_3(r,\theta,\varphi) = -r\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\, dr\wedge d\theta$
$+ [r\sin\theta\cos^2\varphi + r\sin\theta\sin^2\varphi]\, dr\wedge d\varphi$
$+ r^2\cos\theta\cos^2\varphi\, d\theta\wedge d\varphi.$

$\boxed{df_2\wedge df_3(r,\theta,\varphi) = -r\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\, dr\wedge d\theta + r\sin\theta\, dr\wedge d\varphi + r^2\cos\theta\cos^2\varphi\, d\theta\wedge d\varphi}$

$f^*w(r,\theta,\varphi) = r\cos^2\varphi\, dr\wedge d\theta + r^2\cos\varphi\sin\varphi\, d\theta\wedge d\varphi.$
$+ r\sin^2\theta\sin^2\varphi\, dr\wedge d\theta + r\cos\theta\sin\theta\, tg\varphi\, dr\wedge d\varphi$
$- r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\, d\theta\wedge d\varphi - r\cos^2\theta\sin^2\varphi\, dr\wedge d\theta$
$+ r\cos^2\theta\sin\theta\, tg\varphi\, dr\wedge d\varphi + r^2\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\, d\theta\wedge d\varphi$

$\boxed{f^*w(r,\theta,\varphi) = [r - 2r\sin^2\varphi\cos^2\theta]\, dr\wedge d\theta + r^2\sin(2\varphi)\cos^2\theta\, d\theta\wedge d\varphi + r\sin(2\theta)\, tg\varphi\, dr\wedge d\varphi}$

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

..وم الدقيقة والعلوم الطبيعة والحياة — يوم: 2015/05/19

..رياضيات والإعلام الآلي — المدة: ساعة ونصف

..الرياضيات السنة الثالثة LMD (S6) — 2015 - 2014

الإمتحان في مادة الهندسة التفاضلية

التمرين01: ما هو تعريف الشكل التفاضلي ذو الرتبة p على $U \subset E$ حيث E فضاء شعاعي، ثم أكتب عبارته في حالة البعد المنتهي (أي: $\dim E = n$)، مع إعطاء مثال من أجل $n=5$ و $p=3$.

التمرين02: لنضع: $S^1 = \{(x,y)\in IR^2;\ x^2+y^2=1\}$، ونعرف ما يلي:

$$U_1 = \{(x,y)\in IR^2;\ x>0\} \qquad U_3 = \{(x,y)\in IR^2;\ y>0\}$$
$$U_2 = \{(x,y)\in IR^2;\ x<0\} \qquad U_4 = \{(x,y)\in IR^2;\ y<0\}$$

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow IR^2 \qquad \begin{cases} \varphi_i(x,y) = \left(\arctan\dfrac{y}{x}, x^2+y^2-1\right) & ;i=1,2 \\ \varphi_i(x,y) = \left(\arctan\dfrac{x}{y}, x^2+y^2-1\right) & ;i=3,4 \end{cases}$$

1. أثبت أن: $\varphi_i(U_i) = V$، مهما يكن $i=1,4$ حيث: $V = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\times \left]-1,+\infty\right[$.
2. برهن أن $A = \{(U_i,\varphi_i), i=\overline{1,4}\}$ يشكل أطلس قابلة للتفاضل على $IR^2-\{(0,0)\}$.
3. بين أن S^1 منوعة طبولوجية جزئية من IR^2، وعين بعدها.

التمرين03: لنضع $V = \{(x,y,z)\in IR^3;\ x^2+y^2+z^2=14,\quad x^3+y^3+z^3=36\}$

بين أن V منوعة طبولوجية جزئية من IR^3، وعين بعدها.

التمرين04:

أ- أحسب كل من: $\alpha\wedge\beta$، و $\beta\wedge\alpha$، و $d\alpha$، و $d\beta$، و $d(\beta\wedge\alpha)$، و $d(\alpha\wedge\beta)$، و $d\alpha\wedge d\beta$ و $d\beta\wedge d\alpha$ حيث: $\alpha(x,y,z) = xyz\,dx + yz\,dy + (x+y+z)\,dz$

$$\beta(x,y,z) = \frac{2\,dx}{1+x^2} + \frac{z\,dy}{1+y^2z^2} + \frac{y\,dz}{1+y^2z^2}$$

ب- لنضع: $U = IR_+^* \times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f : U \longrightarrow IR^3$$
$$(r,\theta,\varphi) \mapsto f(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$w(x,y,z) = dx\wedge dy + \frac{yz}{x^2+y^2}dx\wedge dz + \frac{xz}{x^2+y^2}dy\wedge dz$$

1. أحسب كل من: f^*w، أوجد الشكل التفاضلي ϕ المعرف على U بحيث: $d\phi = f^*w$.
2. استنتج الشكل التفاضلي η المعرف على V بحيث: $d\eta = w$.

التنقيط: [التمرين1: 04 نقاط] [التمرين2: 06 نقاط] [التمرين3: 04 نقاط] [التمرين4: 06 نقاط]

بالتوفيق

تمرين 01 (6 نقاط)

② . له شكل تفاضلي من الرتبة p على U $\Longleftrightarrow$ (كل تطبيق من U نحو $L^p_a(E)$)

. في حالة البعد المنتهي : $\dim E = n$: $w=\sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} C_{i_1\dots i_p}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}$ (1)

حيث $C_{i_1,\dots,i_p}: U\longrightarrow\mathbb{R}$ (0,5)

. مثال : $n=5$ و $p=3$: $w=\sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq 5} C_{i_1,i_2,i_3}\, dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge dx_{i_3}$

$$w=C_{1,2,3}\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3+C_{1,2,4}\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4+C_{1,2,5}\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_5+C_{1,3,4}\,dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4+C_{1,3,5}\,dx_1\wedge dx_3\wedge dx_5+C_{1,4,5}\,dx_1\wedge dx_4\wedge dx_5+C_{2,3,4}\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4+C_{2,3,5}\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_5+C_{2,4,5}\,dx_2\wedge dx_4\wedge dx_5+C_{3,4,5}\,dx_3\wedge dx_4\wedge dx_5$$ (2,5)

تمرين 02 : (6 نقاط)

$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$.

① اثبات أن $\varphi_i(U_i)=V$ من أجل : $i=1,2$ حيث : $V=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-1,+\infty[$

$\forall (x,y)\in U_{1,2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ y\in\mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x}\in\mathbb{R}\ \dots\ (\text{موجب}) \\ x^2+y^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2} \\ x^2+y^2-1>-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall (x,y)\in U_{1,2}$: $\varphi_{1,2}(x,y)=\left(\operatorname{Arctan}\frac{y}{x},\ x^2+y^2-1\right)\in V=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-1,+\infty[$ (0,25)

إذن : $\varphi_{1,2}(U_{1,2})=V$.

$\forall (x,y)\in U_{3,4} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y}\in\mathbb{R} \quad \text{موجود} \\ x^2+y^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arctan}\frac{x}{y}<\frac{\pi}{2} \\ x^2+y^2-1>-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall (x,y)\in U_{3,4}$: $\varphi_{3,4}(x,y)=\left(\operatorname{Arctan}\frac{x}{y},\ x^2+y^2-1\right)\in V=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-1,+\infty[$ (0,25)

②

$\varphi_{1,2}: U_{1,2}\longrightarrow V$

$(x,y)\longmapsto\varphi_{1,2}(x,y)=\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ x^2+y^2-1\right)$ (0,25)

$\varphi_{1,2}$ مستمرة على $U_{1,2}$ لأنها دالة مركبة من كثير حدود و دالة مستمرة على مجموعة تعريفها

$\varphi_{1,2}$: غامرة من $U_{1,2}$ في V لأن $\varphi_{1,2}(U_{1,2})=V$ (0,25)

$\varphi_{1,2}$ متباينة من $U_{1,2}$ في V : لدينا $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in U_{1,2}$ (0,25)

$\varphi_{1,2}(x_1,y_1)=\varphi_{1,2}(x_2,y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}=\operatorname{arctg}\frac{y_2}{x_2} \\ x_1^2+y_1^2-1=x_2^2+y_2^2-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2} \\ x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\alpha\in\mathbb{R}: y_1=\alpha x_1,\ y_2=\alpha x_2 \\ x_1^2+\alpha^2x_1^2=x_2^2+\alpha^2x_2^2 \\ (1+\alpha^2)x_1^2=(1+\alpha^2)x_2^2\end{cases}$ $(1+\alpha^2\neq 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2=x_2^2 \\ y_1=\alpha x_1,\ y_2=\alpha x_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=\alpha x_1=\alpha x_2=y_2\end{cases}$ (x_1 و x_2 من نفس الإشارة في $U_{1,2}$)

إذن $\varphi_{1,2}$ تقابل من $U_{1,2}$ نحو V إذن $\varphi_{1,2}^{-1}$ موجودة : $\varphi_{1,2}^{-1}: V\longrightarrow U_{1,2}$

$\varphi_{3,4}: U_{3,4}\longrightarrow V$

$(x,y)\longmapsto\varphi_{3,4}(x,y)=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\ x^2+y^2-1\right)$.

$\varphi_{3,4}$ مستمرة على $U_{3,4}$ لأنها دالة مركبة من كثير حدود و دالة مستمرة على مجموعة تعريفها.

$\varphi_{3,4}$ غامرة من $U_{3,4}$ في V لأن $\varphi_{3,4}(U_{3,4})=V$.

$\varphi_{3,4}$ متباينة من $U_{3,4}$ في V : لدينا $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in U_{3,4}$

$\varphi_{3,4}(x_1,y_1)=\varphi_{3,4}(x_2,y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x_1}{y_1}=\operatorname{arctg}\frac{x_2}{y_2} \\ x_1^2+y_1^2-1=x_2^2+y_2^2-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2} \\ x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists\beta\in\mathbb{R}: x_1=\beta y_1,\ x_2=\beta y_2 \\ \beta^2y_1^2+y_1^2=\beta^2y_2^2+y_2^2 \\ (\beta^2+1)y_1^2=(\beta^2+1)y_2^2\end{cases}$ $(\beta^2+1\neq 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1^2=y_2^2 \\ x_1=\beta y_1,\ x_2=\beta y_2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1=y_2 \\ x_2=\beta y_1=\beta y_2=x_1\end{cases}$ (y_1 و y_2 من نفس الإشارة في $U_{3,4}$)

إذن $\varphi_{3,4}$ تقابل من $U_{3,4}$ نحو V إذن $\varphi_{3,4}^{-1}$ موجودة : $\varphi_{3,4}^{-1}: V\longrightarrow U_{3,4}$

$\varphi^{-1}_{1,2} : V \longrightarrow U_{1,2}$, $\varphi^{-1}_{1,2}(\alpha,\beta) = (x,y)$

$\varphi_{1,2}(x,y) = (\text{Arctg}\frac{y}{x}, x^2+y^2-1) = (\alpha,\beta)$

$\iff \begin{cases}\text{Arctg}\frac{y}{x}=\alpha \\ x^2+y^2-1=\beta\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{y}{x}=tg\alpha \\ x^2+y^2=\beta+1\end{cases} \iff \begin{cases} y = x\,tg\alpha \\ x^2+x^2tg^2\alpha=\beta+1\end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2=\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha} \\ y = x\,tg\alpha\end{cases} \iff \begin{cases} x=\pm\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}} \\ y=\pm\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}}\cdot tg\alpha\end{cases}$ $\begin{pmatrix}(x,y)\in U_1 \Rightarrow x> \\ (x,y)\in U_2\Rightarrow x<\end{pmatrix}$

(0,25)

$\varphi^{-1}_{1,2}(\alpha,\beta) = \pm\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}}(1, tg\alpha)$ (0,25) مستمرة على V $\varphi^{-1}_{1,2}$

$\varphi^{-1}_{1,2}$ مستمرة على V لأنها مركبة دوال مستمرتين على V.

$\varphi^{-1}_{1,2}(V)=U_{1,2}$ ولدينا: $\varphi_{1,2}$ مستمرة على $U_{1,2}$: $U_{1,2}$ مفتوح في $\mathbb{R}^2$ (0,25)

و V مفتوح في $\mathbb{R}^2$ (V جداء مفتوحين) ⇐ $U_{1,2}$ مفتوح في $\mathbb{R}^2$.

إذن (U_1,φ_1) و (U_2,φ_2) خريطتين في $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

$\varphi^{-1}_{3,4}: V\longrightarrow U_{3,4}$: $\varphi^{-1}_{3,4}(\alpha,\beta)=(x,y)$

$\varphi_{3,4}(x,y) = (\text{Arctg}\frac{x}{y}, x^2+y^2-1)=(\alpha,\beta)$

$\iff\begin{cases}\text{arctg}\frac{x}{y}=\alpha\\x^2+y^2-1=\beta\end{cases}\iff\begin{cases}\frac{x}{y}=tg\alpha\\x^2+y^2=\beta+1\end{cases}\iff\begin{cases}x=y\,tg\alpha\\y^2tg^2\alpha+y^2=\beta+1\end{cases}$

$\iff\begin{cases}y^2=\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}\\x=y\,tg\alpha\end{cases}\iff\begin{cases}y=\pm\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}}\\x=\pm tg\alpha\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}}\end{cases}$ $\begin{pmatrix}(x,y)\in U_3\Rightarrow y>0\\(x,y)\in U_4\Rightarrow y<0\end{pmatrix}$

$\boxed{(\alpha,\beta)\in V \iff \beta\in]-1,+\infty[\iff \beta>-1 \iff \beta+1>0}$

$\varphi^{-1}_{3,4}(\alpha,\beta)=\pm\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}}(tg\alpha,1)$ مستمرة على V $\varphi^{-1}_{3,4}$

$\varphi^{-1}_{3,4}$ مستمرة على V لأنها مركبة دوال مستمرتين على V.

$\varphi^{-1}_{3,4}(V)=U_{3,4}$ ولدينا: $\varphi_{3,4}$ مستمرة على $U_{3,4}$: $U_{3,4}$ مفتوح في $\mathbb{R}^2$

و V مفتوح في $\mathbb{R}^2$ (V جداء مفتوحين) ⇐ $U_{3,4}$ مفتوح في $\mathbb{R}^2$.

إذن (U_3,φ_3) و (U_4,φ_4) خريطتين في $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

ينتج (0,25) $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}=\bigcup_{i=1,4}U_i$ ومنه $\mathcal{A}$ يشكل أطلس على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

لنبرهن أن $\mathcal{A}$ أطلس قابل للتفاضل.

لدينا $\boxed{U_1\cap U_2=\phi}$ إذن (U_1,φ_1) و (U_2,φ_2) متلائمتين (0,25)

$U_1\cap U_3\neq\phi$.

$U_1\cap U_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0, y>0\}$.

$\forall(x,y)\in U_1\cap U_3 \iff \begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}\iff\begin{cases}\frac{y}{x}>0\\\frac{x}{y}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<\text{arctg}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}\\0<\text{arctg}\frac{x}{y}<\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$\varphi_1(U_1\cap U_3)=\varphi_3(U_1\cap U_3)=]0,\frac{\pi}{2}[\times]-1,+\infty[=V_1$ (0,25)

$\varphi_{13}: V_1\longrightarrow V_1$: $\varphi_{13}(\alpha,\beta)=\varphi_1\circ\varphi_3^{-1}(\alpha,\beta)=\varphi_1(\varphi_3^{-1}(\alpha,\beta))$

$\varphi_{13}(\alpha,\beta)=(\text{arctg}(\frac{1}{tg\alpha}),\beta)$, $\forall(\alpha,\beta)\in V_1$ (0,25)

$\varphi_{31}: V_1\longrightarrow V_1$: $\varphi_{31}(\alpha,\beta)=\varphi_3\circ\varphi_1^{-1}(\alpha,\beta)=\varphi_3(\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}}, tg\alpha\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}})$

$\varphi_{31}(\alpha,\beta)=(\text{arctg}(\frac{1}{tg\alpha}),\beta)$, $\forall(\alpha,\beta)\in V_1$ (0,25)

نلاحظ أن φ_{13} و φ_{31} قابل للتفاضل ومنه (U_3,φ_3) و (U_1,φ_1) متلائمة

$\boxed{U_2\cap U_4\neq\phi}$

$U_2\cap U_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x<0, y<0\}$

$\varphi_2(U_2\cap U_4)=\varphi_4(U_2\cap U_4)=V_1$

$\varphi_{24}: V_1\to V_1$: $\varphi_{24}=\varphi_2\circ\varphi_4^{-1}=\varphi_1\circ\varphi_3^{-1}=\varphi_{13}\Rightarrow$ φ_{24} قابل للتفاضل على V_1

$\varphi_{42}: V_1\to V_1$: $\varphi_{42}=\varphi_4\circ\varphi_2^{-1}=\varphi_3\circ\varphi_1^{-1}=\varphi_{31}\Rightarrow$ φ_{42} قابل للتفاضل على V_1

إذن (U_2,φ_2) و (U_4,φ_4) متلائمة (0,25)

لدينا $\boxed{U_3\cap U_4=\phi}$ إذن (U_3,φ_3) و (U_4,φ_4) متلائمتين (0,25)

$\boxed{U_1\cap U_4\neq\phi}$.

$U_1\cap U_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0, y<0\}$.

$\forall(x,y)\in U_1\cap U_4\iff\begin{cases}x>0\\y<0\end{cases}\iff\begin{cases}\frac{y}{x}<0\\\frac{x}{y}<0\end{cases}\iff\begin{cases}-\frac{\pi}{2}<\text{arctg}\frac{y}{x}<0\\-\frac{\pi}{2}<\text{arctg}\frac{x}{y}<0\end{cases}$

$\varphi_1(U_1\cap U_4)=\varphi_4(U_1\cap U_4)=]-\frac{\pi}{2},0[\times]-1,+\infty[=V_2$.

$\varphi_{14}: V_2\to V_2$: $\varphi_{14}(\alpha,\beta)=\varphi_1[\varphi_4^{-1}(\alpha,\beta)]=\varphi_1(-\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}}tg\alpha, -\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}})$

$\varphi_{14}(\alpha,\beta)=(\text{arctg}(\frac{1}{tg\alpha}),\beta)$, $\forall(\alpha,\beta)\in V_2$.

$\varphi_{41}: V_2\to V_2$: $\varphi_{41}(\alpha,\beta)=\varphi_4[\varphi_1^{-1}(\alpha,\beta)]=\varphi_4(\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}}, tg\alpha\sqrt{\frac{\beta+1}{1+tg^2\alpha}})$.

$\varphi_{41}(\alpha,\beta)=(\text{arctg}(\frac{1}{tg\alpha}),\beta)$, $\forall(\alpha,\beta)\in V_2$.

نلاحظ أن φ_{14} و φ_{41} قابلة للتفاضل ومنه (U_1,φ_1) و (U_4,φ_4) متلائمة

$\boxed{U_2\cap U_3\neq\phi}$

$U_2\cap U_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x<0, y>0\}$.

$\varphi_2(U_2\cap U_3)=\varphi_3(U_2\cap U_3)=V_2$.

$\varphi_{23}: V_2\to V_2$: $\varphi_{23}=\varphi_2\circ\varphi_3^{-1}=\varphi_1\circ\varphi_4^{-1}=\varphi_{14}\Rightarrow$ φ_{23} قابل للتفاضل على V_2

$\varphi_{32}: V_2\to V_2$: $\varphi_{32}=\varphi_3\circ\varphi_2^{-1}=\varphi_4\circ\varphi_1^{-1}=\varphi_{41}\Rightarrow$ φ_{32} قابل للتفاضل على V_2

إذن (U_2,φ_2) و (U_3,φ_3) متلائمة

وفي الأخير إذن $\mathcal{A}$ أطلس قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

3) البرهان أن S^1 منوعة جزئية في $\mathbb{R}^3$ وما هو بعدها.

$\forall i=\overline{1,4}$: $\varphi_i(U_i\cap S^1)=\varphi_i(U_i)\cap\varphi_i(S^1)=V\cap]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times\{0\}=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times\{0\}$ (0,1)

$\forall(x,y)\in U_i\cap S^1 \iff \begin{cases}(x,y)\in U_i\\(x,y)\in S^1\end{cases}\iff\begin{cases}(x,y)\in U_i\\x^2+y^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi_{1,2}(x,y)=(\text{arctg}\frac{y}{x},x^2+y^2-1)=(\text{arctg}\frac{y}{x},0)\\\varphi_{3,4}(x,y)=(\text{arctg}\frac{x}{y},x^2+y^2-1)=(\text{arctg}\frac{y}{x},0)\end{cases}$

إذن S^2 منوعة جزئية بعدها هو 1 (0,1)

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 14,\ x^3+y^3+z^3 = 36\}$ (6ن) حل التمرين 03 $\boxed{1+}$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad f_2 \qquad f_1 \qquad (1,2,3) \in V$ ① $V \neq \emptyset$ لوجود

$x = (x,y,z) \longmapsto f(x) = (x^2+y^2+z^2-14,\ x^3+y^3+z^3-36)$ (0,5) ②

(0,1) f قابل للتفاضل على $\mathbb{R}^3$ ، (كثيرات حدود).

$df(x) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$h \longmapsto df(x)(h) = \begin{pmatrix} 2x h_1 + 2y h_2 + 2z h_3 \\ 3x^2 h_1 + 3y^2 h_2 + 3z^2 h_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1) \end{matrix}$$

لنبرهن أنه من أجل كل $x \in f^{-1}((0,0))$ ، $df(x)$ غامر (0,5)

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 14 & — ① \\ x^3+y^3+z^3 = 36 & — ② \end{cases}$$

$V = f^{-1}(\{(0,0)\})$ (0,5) $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\{(0,0)\})$

$\dim \operatorname{Im} df(x) = 3 - \dim \operatorname{Ker} df(x)$ (0,25) (0,25) يكفي أن نبرهن أن $\dim \operatorname{Ker} df(x) = 1$ — (3)

$$h \in \operatorname{Ker} df(x) \Leftrightarrow df(x)(h) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x h_1 + y h_2 + z h_3 = 0 & — (4) \\ x^2 h_1 + y^2 h_2 + z^2 h_3 = 0 & — (5) \end{cases}$$

$-y \times (4) + (5) \Leftrightarrow x(x-y) h_1 = z(y-z) h_3$ — (6) $\qquad \boxed{\dim V = 3-2 = 1}$ (0,5)

$-z \times (4) + (5) \Leftrightarrow x(x-z) h_1 = y(z-y) h_2$ — (7)

$-x \times (4) + (5) \Leftrightarrow y(y-x) h_2 = z(x-z) h_3$ — (8)

الحالات الممكنة: $\boxed{1+}$

يمكننا تقسيمها بعدد العناصر المعدومة إلى 4 أقسام دراسية.

$\boxed{\text{القسم 1}}$ 3 عناصر معدومة أي $\boxed{x=y=z=0}$. في ① و ② مرفوضة.

$\boxed{\text{القسم 2}}$ عنصرين معدومين والثالث غير معدوم.

مثال $\boxed{x=y=0 \text{ و } z \neq 0}$ ① $\Leftrightarrow z^2 = 14 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{14}$ و ② $\Leftrightarrow z^3 = 36$

[العناصر متناظرة] مرفوض لأن $(\pm\sqrt{14})^3 \neq 36$.

$\boxed{\text{القسم 3}}$ عنصر واحد فقط معدوم:

مثال $\boxed{x=0 \text{ و } y \neq 0 \text{ و } z \neq 0}$ توجد في هذا القسم حالتين:

$\boxed{\text{القسم 3}}\boxed{\text{الحالة 1}}$ $x=0$ و $y=z\neq 0$: ① $\Leftrightarrow z^2 = 7 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{7}$ و ② $\Leftrightarrow z^3 = 18$

مرفوض لأن $(\pm\sqrt{7})^3 \neq 18$.

$\boxed{\text{القسم 3}}\boxed{\text{الحالة 2}}$ $\boxed{x=0 \text{ و } 0 \neq y \neq z \neq 0}$. (6) $\Leftrightarrow h_3 = 0$ و (7) $\Leftrightarrow h_2 = 0$.

$h \in \operatorname{Ker}(df(x)) \Leftrightarrow h = (h_1,0,0) = h_1(1,0,0) \Rightarrow \boxed{\dim \operatorname{Ker} df(x) = 1}$

$\boxed{\text{القسم 4}}$ جميع العناصر غير معدومة: يمكننا تقسيم هذا القسم إلى 3 حالات حسب العناصر المتساوية

$\boxed{\text{القسم 4}}\boxed{\text{الحالة 1}}$ جميع العناصر متساوية أي $\boxed{x=y=z\neq 0}$ ① $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{14}{3}}$ و ② $\Leftrightarrow z^3 = 12$

مرفوضة لأن $\left(\pm\sqrt{\frac{14}{3}}\right)^3 \neq 12$.

$\boxed{\text{القسم 4}}\boxed{\text{الحالة 2}}$ عنصرين فقط متساويين:

مثال: $\boxed{x=y\neq z}$

بما أن $x=y \Leftrightarrow x-y=0$ إذن بالتعويض في (6) و (8) نجد $h_3 = 0$

وبما أن $x\neq 0$ و $y \neq 0$ و $z \neq y$ و $x \neq z$ لدينا (7) $\Leftrightarrow h_2 = \frac{x(x-z)}{y(z-y)} h_1$

$h \in \operatorname{Ker}(df(x)) \Leftrightarrow h = \left(h_1, \frac{x(x-z)}{y(z-y)} h_1, 0\right) = h_1\left(1, \frac{x(x-z)}{y(y-z)}, 0\right) \Rightarrow \boxed{\dim \operatorname{Ker} df(x) = 1}$

$\boxed{\text{القسم 4}}\boxed{\text{الحالة 3}}$ العناصر مختلفة مثنى مثنى $\boxed{x \neq y \neq z \neq x}$

بما أن $x \neq 0$ و $y \neq 0$ و $z \neq 0$ و $x \neq y$ و $x \neq z$ و $x \neq z$ إذن (6) $\Leftrightarrow h_3 = \frac{x(x-y)}{z(y-z)} h_1$ و (7) $\Leftrightarrow h_2 = \frac{x(x-z)}{y(z-y)} h_1$

$h \in \operatorname{Ker} df(x) \Leftrightarrow h = \left(h_1, \frac{x(x-z)}{y(z-y)}, \frac{x(x-y)}{z(y-z)}\right) h_1 \Leftrightarrow \boxed{\dim \operatorname{Ker} df(x) = 1}$

وهو المطلوب

التمرين 04

أ) 3 نقاط

$\alpha(x,y,z) = xyz\,dx + yz\,dy + (x+y+z)\,dz$

$\alpha = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz \;;\; a_1(x,y,z) = xyz \,,\; a_2(x,y,z) = yz \,,\; a_3 = x+y+z$

$\beta(x,y,z) = \frac{2}{1+x^2}dx + \frac{z}{1+y^2z^2}dy + \frac{y}{1+y^2z^2}dz.$

$\beta = b_1 dx + b_2 dy + b_3 dz \;;\; b_1(x,y,z) = \frac{2}{1+x^2} \,,\; b_2(x,y,z) = \frac{z}{1+y^2z^2} \,,\; b_3 = \frac{y}{1+y^2z^2}.$

① حساب $\alpha\wedge\beta$:

$$\alpha\wedge\beta(x,y,z) = \left(\frac{xyz^2}{1+y^2z^2} - \frac{2yz}{1+x^2}\right)dx\wedge dy + \left(\frac{xy^2z}{1+y^2z^2} - \frac{2(x+y+z)}{1+x^2}\right)dx\wedge dz + \left(\frac{y^2z - xz - yz - z^2}{1+y^2z^2}\right)dy\wedge dz.$$ (0,1)

$\beta\wedge\alpha = (-1)^1\,\alpha\wedge\beta$ (0,1)

② حساب $d\alpha$ و $d\beta$.

نضع $\omega(x,y,z) = A\,dx + B\,dy + C\,dz.$

$$d\omega(x,y,z) = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right)dx\wedge dz + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right)dy\wedge dz.$$

لدينا لما $A = a_1$ و $B = a_2$ و $C = a_3$: $\omega = \alpha$ ومنه

$d\alpha = xz\,dy\wedge dx + (1-xy)\,dx\wedge dz + (1-y)\,dy\wedge dz.$ (0,1)

ولما $A = b_1$ و $B = b_2$ و $C = b_3$: $\omega = \beta$, نجد

$d\beta = \left(\frac{1-y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2} - \frac{1-y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2}\right)dy\wedge dz = 0 \;\Rightarrow\; d\beta = 0$ (0,1)

③ حساب $d(\beta\wedge\alpha)$ و $d(\alpha\wedge\beta)$

$d(\beta\wedge\alpha) = \cancel{d\beta\wedge\alpha} + (-1)^1\beta\wedge d\alpha = \left(\frac{2(y-1)}{1+x^2} + \frac{\cancel{\;\;} + z}{1+y^2z^2}\right)dx\wedge dy\wedge dz$ (0,1)

$d(\alpha\wedge\beta) = d(-\beta\wedge\alpha) = -d(\beta\wedge\alpha)$ $\boxed{d(\alpha\wedge\beta) = -d(\beta\wedge\alpha)}$ (0,25)

④ حساب $d\beta\wedge d\alpha$, $d\alpha\wedge d\beta$

$d\alpha\wedge \cancel{d\beta} = 0$ (0,25) , $\cancel{d\beta}\wedge d\alpha = 0$ (0,1)

ب) 2 نقطة

$f(r,\theta,\varphi) = (f_1(r,\theta,\varphi), f_2(r,\theta,\varphi), f_3(r,\theta,\varphi))$

$$\begin{cases} f_1(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta\cos\varphi \\ f_2(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi \\ f_3(r,\theta,\varphi) = r\sin\varphi. \end{cases}$$

$\omega = dx\wedge dy + a\,dx\wedge dz + b\,dy\wedge dz.$

$a(x,y,z) = \frac{yz}{x^2+y^2} \,,\; b(x,y,z) = \frac{xz}{x^2+y^2}.$

① حساب $f^*\omega$:

$f^*\omega = df_1\wedge df_2 + (a\circ f)\,df_1\wedge df_3 + (b\circ f)\,df_2\wedge df_3.$ (0,25)

$(a\circ f)(r,\theta,\varphi) = \sin\theta\,tg\varphi$ (0,125) ; $(b\circ f)(r,\theta,\varphi) = \cos\theta\,tg\varphi$ (0,1)

$df_i(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f_i}{\partial r}(r,\theta,\varphi)dr + \frac{\partial f_i}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi)d\theta + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi)d\varphi \;:\; \forall i = \overline{1,3}.$

$df_1(r,\theta,\varphi) = \cos\theta\cos\varphi\,dr - r\sin\theta\cos\varphi\,d\theta - r\cos\theta\sin\varphi\,d\varphi$ (0,1)

$df_2(r,\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi\,dr + r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi$ (0,1)

$df_3(r,\theta,\varphi) = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\theta.$ (0,1)

$$(f^*\omega)(r,\theta,\varphi) = [r - 2r\cos^2\theta\sin^2\varphi]\,dr\wedge d\theta + r\sin(2\theta)\,tg\varphi\,dr\wedge d\varphi + r^2\cos^2\theta\sin(2\varphi)\,d\theta\wedge d\varphi.$$ (0,15)