I- Rappel sur les dérivées partielles d'une fonction composée.

Exercice :

Soient : $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2$ Et $\begin{cases} x = 3u - v \\ y = u + 2v \end{cases}$

Calculer : $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} = 3\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(3x^2 + 4xy) + 2x^2 + 2y = 11x^2 12xy + 2y \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 - 4xy + 2(2x^2 + 2y) = x^2 - 4xy 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right) = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(3\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = 3\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right) = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(-\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) + 2\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right) = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(-\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) + 2\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial u} + 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial u} = 78x + 36y + 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial x}{\partial v} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial v} = -10x + 4y + 8 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial x}{\partial u} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial u} = 2x - 12y + 4 \end{cases}$$

Remarque : Considérons dans ce chapitre des fonctions à deux variables continues sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

II- Définitions et notations :

Définition 01 :

On appelle une équation à dérivées partielles (EDP) toute relation entre une fonction u à deux variables et ses dérivées partielles. Elle s'écrit :

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y} \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}}\right) = 0$$

Définition 02 :

On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles dans l'équation.

Définition 03 :

On dit qu'une EDP est linéaire si seulement si elle linéaire par rapport à la fonction u
Et ses dérivées partielles.

Définition 04 :

On dit qu'une EDP est homogène si seulement si le second membre de l'équation égale 0.

Exemples :

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{-x}$ EDP d'ordre 2, linéaire, et non homogène.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ EDP d'ordre 2, linéaire, et homogène.

$\frac{\partial u}{\partial x} - 2u^2 + \sin(x) = 0$ EDP d'ordre 1, non linéaire, et non homogène.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ EDP d'ordre 2, linéaire, et homogène.

$u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = 0$ EDP d'ordre 3, non linéaire, et homogène.

III- EDP d'ordre premier

Elle est de la forme : $A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = C(x,y) + D(u) \quad (E)$

Ou $A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = C(x,y,u)$

Avec : A, B, C, et D des fonctions à deux variables continues sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Méthodes de résolution :

a) Méthode des caractéristiques :

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = C(x,y,u) \quad (E)$$

Théorème :

La solution de l'équation (E) est donnée par : $\varphi(C_1, C_2) = 0$ Avec C_1 et C_2 deux Intégrales indépendantes de système des caractéristiques : $\dfrac{dx}{A(x,y)} = \dfrac{dy}{B(x,y)} = \dfrac{du}{C(x,y,u)}$

Remarque :

$\varphi(C_1, C_2) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = f(C_2)$ Avec f une fonction arbitraire.

Exemples :

$$(E_1) : \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = y \qquad A(x,y) = 1,\; B(x,y) = -1,\; C(x,y) = y$$

Le système des caractéristiques : $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{-1} = \dfrac{du}{y} \;\Longrightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{dy}{-1} \\ -dy = \dfrac{du}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = x + y \\ C_2 = u + \dfrac{1}{2}y^2 \end{cases}$

La solution générale est : $\varphi\left(x + y, u - \dfrac{1}{2}y^2\right) = 0$ ou $u(x,y) = -\dfrac{1}{2}y^2 + f(x+y)$ Avec f arbitraire.

$$(E_2) : x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2 \qquad A(x,y) = x,\; B(x,y) = y,\; C(x,y) = 2$$

On a : $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{du}{2} \;\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{y}{x} \\ C_2 = -2\,ln(x) + u \end{cases}$

La solution générale est donnée par : $\varphi\left(\dfrac{y}{x}, -2\,ln(x) + u\right) = 0$ ou $u(x,y) = 2ln(x) + f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Avec f une fonction arbitraire.

Remarque : Les fonctions arbitraires se détermine par des conditions initiales.

Exemple :

(E) : $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = u \\ u(0,y) = \sin(y) \end{cases}$ le système des caractéristiques :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{u} \;\Longrightarrow \begin{cases} xdx = dy \\ dx = \dfrac{du}{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = y - \dfrac{1}{2}x^2 \\ C_2 = -x + ln(u) \end{cases}$$

Alors la solution générale est :

$$\varphi\left(y-\frac{1}{2}x^2,-x+ln(u)\right)=0 \text{ ou } u(x,y)=e^{x+f\left(y-\frac{1}{2}x^2\right)}.$$

On a $u(0,y)=sin(y) \Rightarrow f(y)= ln(\sin(y))$ Alors la solution particulière de (E) est :

$$u(x,y)=e^{x+ln\left(sin\left(y-\frac{1}{2}x^2\right)\right)}.$$

b) Méthode de séparation des variables :

$(E): A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}=0$ Avec A et B des fonctions d'une seule variable.

Posons : $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X'(x)Y(y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=X(x)Y'(y)$$

Remplaçant dans (E) : $AX'(x)Y(y)+BX(x)Y'(y)=0$

On obtient un système EDO suivants : $A\frac{X'}{X}=-B\frac{Y'}{Y}=k$ (constante)

Intégrer les deux EDO, et remplacer X,Y dans u.

Exemples :

$(E_1):\ y\frac{\partial u}{\partial x}+x^2\frac{\partial u}{\partial y}=0$ Posons : $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=X'(x)Y(y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=X(x)Y'(y)\end{cases} \Rightarrow\ yX'(x)Y(y)+x^2X(x)Y'(y)=0 \Rightarrow \frac{-1}{x^2}\frac{X'}{X}=\frac{1}{y}\frac{Y'}{Y}=k \text{ (cte)}$$

$$\begin{cases}\frac{-1}{x^2}\frac{X'}{X}=k\\ \frac{1}{y}\frac{Y'}{Y}=k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{X'}{X}=-kx^2\\ \frac{Y'}{Y}=ky\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}ln|X|=\frac{-k}{3}x^3+c_1\\ ln|Y|=\frac{k}{2}y^2+c_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X=C_1e^{\frac{-k}{3}x^3}\\ Y=C_2e^{\frac{k}{2}y^2}\end{cases}$$

Alors : $u(x,y)=X(x)\,Y(y)=C_1e^{\frac{-k}{3}x^3}C_2e^{\frac{k}{2}y^2}=C_1C_2e^{\frac{-k}{3}x^3+\frac{k}{2}y^2}=Ce^{\frac{-k}{3}x^3+\frac{k}{2}y^2}.$

(E_2) : $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2xy^2 \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ Posons : $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = X'(x)Y(y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = X(x)Y'(y) \end{cases} \Rightarrow \; X'(x)Y(y) + 2xy^2X(x)Y'(y) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2x}\frac{X'}{X} = -y^2\frac{Y'}{Y} = k \text{ (cte)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x}\dfrac{X'}{X} = k \\ -y^2\dfrac{Y'}{Y} = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{X'}{X} = 2xk \\ \dfrac{Y'}{Y} = -\dfrac{k}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ln|X| = kx^2 + c_1 \\ ln|Y| = \dfrac{k}{y} + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = C_1e^{kx^2} \\ Y = C_2e^{\frac{k}{y}} \end{cases}$$

Alors : $u(x,y) = X(x)\,Y(y) = C_1C_2e^{kx^2}e^{\frac{k}{y}} = C_1C_2e^{kx^2+\frac{k}{y}} = Ce^{kx^2+\frac{k}{y}}$.

c) Méthode des coordonnées :

(E) : $a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} = c$ Avec $a, b,$ et c des constantes.

Pour la résoudre posons le changement : $\begin{cases} s = ax + by \\ t = bx - ay \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} = a\dfrac{\partial u}{\partial s} + b\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y} = b\dfrac{\partial u}{\partial s} - a\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$ Remplaçons dans l'équation (E), on obtient :

$$a^2\frac{\partial u}{\partial s} + b^2\frac{\partial u}{\partial s} = c \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{c}{a^2+b^2} \quad \Rightarrow \; u(x,y) = \frac{c}{a^2+b^2}s + f(t),$$ f Arbitraire.

Alors : $u(x,y) = \dfrac{c}{a^2+b^2}(ax+by) + f(bx - ay)$.

Exemple :

(E_1) : $\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2$

Posons le changement : $\begin{cases} s = x - 2y \\ t = -2x - y \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial s} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y} = -2\dfrac{\partial u}{\partial s} - \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation (E_1), on obtient :

$$5\frac{\partial u}{\partial s} = 2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{2}{5} \;\Rightarrow\; u(x,y) = \frac{2}{5}s + f(t),$$ f Fonction arbitraire.

Alors : $u(x,y) = \dfrac{2}{5}(x - 2y) + f(-2x - y)$.

$$(E_2) : \begin{cases} 4\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x,y) = y^3 \end{cases}$$

Posons le changement : $\begin{cases} s = 4x - 3y \\ t = -3x - 4y \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} = 4\dfrac{\partial u}{\partial s} - 3\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y} = -3\dfrac{\partial u}{\partial s} - 4\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation (E), on obtient :

$$25\frac{\partial u}{\partial s} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \;\Rightarrow\; u(x,y) = f(t),$$ Avec f Fonction arbitraire.

Alors la solution générale est : $u(x,y) = f(-3x - 4y)$.

On a $u(0,y) = y^3 \;\Rightarrow f(-4y) = y^3 \;\Rightarrow f(y) = \dfrac{-1}{64}y^3$

Alors : $u(x,y) = \dfrac{-1}{64}(-3x - 4y)^3 = \dfrac{1}{64}(3x + 4y)^3$.

IV- EDP linéaire de second ordre

On appelle une EDP linéaire de second ordre dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, une équation de la forme :

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + F(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x,y)u = H(x,y)$$

On peut poser : $D(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + F(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y} + G(x,y)u - H(x,y) = F\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

L'équation devient : $A(x,y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

Classification des EDP de second ordre

Posons : $\Delta = B^2 - 4AC$ on distingue trois cas :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \text{ On dit que l'EDP est de type Hyperbolique} \\ \Delta = 0 \text{ On dit que l'EDP est de type Parabolique} \\ \Delta < 0 \text{ On dit que l'EDP est de type Elliptique} \end{cases}$$

Exemples :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \Delta = 25 > 0 \text{ Alors l'EDP est hyperbolique.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \qquad \Delta = 0 \quad \text{Alors l'EDP est parabolique.}$$

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3u = 0 \qquad \Delta = -4x^2y^2 \quad \text{Alors l'EDP est} \begin{cases} \text{Elliptique si } x \text{ et } y \neq 0 \\ \text{Parabolique si } x \text{ ou } y = 0 \end{cases}.$$

Méthodes de résolution

Méthode directe :

Exemples :

$$(E_1) \; : \; \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ysin(x) \\ u(x,0) = x^2 \\ u(x,2) = \dfrac{4}{3}\sin(x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ysin(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \int ysin(x)dy = \frac{1}{2}y^2\sin(x) + f(x) \quad , \; f \text{ Fonction arbitraire.}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int \left(\frac{1}{2}y^2\sin(x) + f(x)\right)dy = \frac{1}{6}y^3\sin(x) + yf(x) + g(x).$$

Avec g une fonction arbitraire.

$$\begin{cases} u(x,0) = x^2 \\ u(x,2) = \dfrac{4}{3}\sin(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 \\ f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{6}y^3\sin(x) + \left(1 - \frac{1}{2}y\right)x^2.$$

$$(E_2)\ :\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3 \\ u(0,y)=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0)=x^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}=-3 \ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-u\right)=-3 \ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial x}-u=\int -3dy$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}-u=-3y+f(x)$ EDO linéaire , $\quad f$ arbitraire.

$$\begin{cases} u_0=ke^x \\ u_p=3y+e^x\displaystyle\int f(x)e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow\ u(x,y)=ke^x+3y+e^x\int f(x)e^{-x}dx$$

$$\begin{cases} u(0,y)=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0)=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+3y+\displaystyle\int f(x)e^{-x}dx=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ ke^x+e^x\displaystyle\int f(x)e^{-x}dx+f(x)=x^2 \ \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$(2)-e^x(1)$: $f(x)=x^2+ye^x$ et $\int f(x)e^{-x}dx=\int (x^2e^{-x}+y)dx=yx-(x^2+2x+2)e^{-x}$.

(1) : $k=2-3y$. Alors : $u(x,y)=(yx-3y+2)e^x+3y-x^2-2x-2$.

Remarque :

On peut poser : $v=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

Méthode des caractéristiques :

Pour résoudre une EDP par cette méthode on suit les étapes suivantes :

Première étape : chercher la solution de l'équation des caractéristiques suivante :

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-B\frac{dy}{dx}+C=0 \ \text{ Avec : } A, B \text{ et } C \text{ des coéfficients de l'EDP.}$$

ON distingue trois cas : $\begin{cases} \Delta > 0 \ , \ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} \\ \Delta = 0 \ , \ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B}{2A} \\ \Delta < 0 \ , \ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B \pm i\sqrt{-\Delta}}{2A} \end{cases}$

Intégrer les deux équations différentielles, et posons : $C_1 = \varphi(x,y)$ et $C_2 = \phi(x,y)$

Deuxième étape : chercher la forme canonique de l'EDP.

Poser le changement suivant : $\begin{cases} s = C_1 = \varphi(x,y) \\ t = C_2 = \phi(x,y) \end{cases}$

Ecrire l'EDP en fonction des nouvelles variables s et t.

Remarque : On appelle la nouvelle équation la forme canonique de l'EDP.

Troisième étape : Résoudre la nouvelle EDP. Et écrire la solution en fonction de x et y.

Exemples :

(E_1) : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ Forme canonique de (E_1).

Etape 1 : Résoudre l'équation caractéristique :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx} - 4\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 0 \\ \dfrac{dy}{dx} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = C_1 \\ y = 4x + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = y \\ C_2 = -4x + y \end{cases}$$

Etape 2 : La forme canonique de (E_1)

Posons : $\begin{cases} s = y \\ t = y - 4x \end{cases}$, d'ou $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} = -4\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = -4\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = -4\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = -4\dfrac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases}$

(E_1) : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ est la forme canonique de (E_1).

$$(E_2):\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Etape 1 :

l'équation caractéristique : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$ nous donne : $\frac{dy}{dx} = \pm 1$.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 \\ \frac{dy}{dx} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + C_1 \\ y = -x + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = y - x \\ C_2 = y + x \end{cases}$$

Etape 2 : La forme canonique de (E_2)

Posons : $\begin{cases} s = y - x \\ t = y + x \end{cases}$, d'ou $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{du}{dy} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dy} + \frac{du}{dt}\frac{dt}{dy} = \frac{du}{ds} + \frac{du}{dt} \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = 0$$ Forme canonique de (E_2).

Etape 3 :

$u = ?$ solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = f(s) \Rightarrow u(x,y) = \int f(s)ds + gt) \Rightarrow u(x,y) = F(s) + g(t)$$

Avec : F, g des fonctions arbitraires.

La solution générale de (E_2) est : $u(x,y) = F(y-x) + g(y+x)$.

$$(E_3):\ x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad u = ?$$

Etape 1 : L'équation caractéristique :

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \pm\left(\frac{y}{x}\right)^2 .$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = xC_1 \\ y = \dfrac{C_2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{y}{x} \\ C_2 = xy \end{cases}$$

Etape 2 : La forme canonique de (E_3)

Posons : $\begin{cases} s = \dfrac{y}{x} \\ t = xy \end{cases}$, d'ou $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial u}{\partial s} + y\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{du}{dy} = \dfrac{du}{ds}\dfrac{ds}{dy} + \dfrac{du}{dt}\dfrac{dt}{dy} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial s} + x\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial u}{\partial s} + y\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = \dfrac{y^2}{x^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2\dfrac{y^2}{x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dfrac{y}{x^3}\dfrac{\partial u}{\partial s} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial s} + x\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \;\Rightarrow\; -4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + 2\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial s} = 0 \;\Rightarrow\; -4st\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + 2s\frac{\partial u}{\partial s} = 0 .$$

$2\mathrm{t}\dfrac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial s} = 0$ est la Forme canonique de (E_3).

Etape 3 : $u = ?$

Posons : $\dfrac{\partial u}{\partial s} = v \;\Rightarrow\; 2\,t\,\dfrac{\partial v}{\partial t} - v = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial v}{v} = \dfrac{\partial t}{2t} \;\Rightarrow\; v = f(s)\sqrt{t}$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = v = f(s)\sqrt{t} \;\Rightarrow u = \sqrt{t}\int f(s)ds + g(t) = \sqrt{t}\,F(s) + g(t)$$

Alors : $u(x,y) = \sqrt{xy}\,F\left(\frac{y}{x}\right) + g(xy)$ est la solution générale de (E_3).