Chapitre 03 : Equations différentielles

1. Equations différentielles ordinaires
    1) Définition
    2) Solution d'une équation différentielle
    3) Problème de Cauchy
2. Equations différentielles ordinaires du premier ordre
3. Equations différentielles ordinaires du second ordre
4. Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

1. Equations différentielles ordinaires

1) Définition : On appelle une équation différentielle ordinaire toute relation entre une variable réelle x, une fonction inconnue y et ses dérivées $y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}$.

Toute équation différentielle ordinaire (EDO) s'écrit sous l'une des formes suivantes :

$$(E)\ :\ F(x, y,\ y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{ou} \quad y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

On appelle l'entier n dans l'équation différentielle (E) l'ordre de l'équation différentielle.

Exemple :

$(E_1) : y' = xy + 3$ EDO d'ordre 1.

$(E_2) : y'' + x^2y' = x$ EDO d'ordre 2.

$(E_3) : x(y')^2 + y + e^x = 0$ EDO d'ordre 1.

$(E_4) : y'' - (y')^3 = \cos(x)$ EDO d'ordre 2.

2) Solution d'une équation différentielle :

On appelle solution de l'équation (E) toute fonction φ, n-fois dérivable sur un Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, et $F(x, \varphi,\ \varphi', \dots, \varphi^{(n)}) = 0$.

On appelle aussi φ l'intégrale de l'équation(E) sur $I \subseteq \mathbb{R}$. Et le graphe de φ S'appelle la courbe intégrale de(E).

Exemple :

Soit l'équation différentielle $(E) : xy' - y = 0$. La fonction $\varphi(x) = x$ est une solution de(E).

Et la droite (Δ): $y = x$ est la courbe intégrale de (E).

Théorème :

Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ F(x, y,\ y', \dots, y^{(n)}) = 0$

Si φ_1, et φ_2 deux solutions de (E) sur $I \subseteq \mathbb{R}$.

Alors : pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$ est une solution de (E).

Exemple :

Soit $(E) : y'' - 5y + 6y = 0$ Et $\varphi_1(x) = e^{2x}$, et $\varphi_2(x) = e^{3x}$sont deux solutions de (E).

Alors : $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = e^{2x} + e^{3x}$ est une solution de (E).

$(\varphi'(x) = 2e^{2x} + 3e^{3x}$, $\varphi''(x) = 4e^{2x} + 9e^{3x}$, $\varphi''(x) - 5\varphi'(x) + 6\varphi(x) = 0$)

3) Problème de Cauchy :

On appelle un problème de Cauchy tout système constitué d'une équation Différentielle et de certaines conditions dites conditions initiales.

Un problème de Cauchy s'écrit comme suit : $(P) : \begin{cases} y^{(n)} = F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$

Exemple : Résoudre le problème $(P) : \begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

On a $y' + 2xy = 0 \Rightarrow y' = -2xy \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2xy$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -2xdx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int xdx$$

$$\Rightarrow ln|y| = -2x + c$$

$$\Rightarrow y = e^{-2x+c} = e^c e^{-2x} = ke^{-2x} \quad (e^c = k)$$

On dit que $y = ke^{-2x}$ est la solution générale de (P) .

On a $y(0) = 2$ remplaçant dans la solution$y$. On trouve $k = 2$. Alors $y_p = 2e^{-2x}$ est la solution Particulière de (P).

Remarque : Dans la suite du cours nous intéressons au calcul de solutions (méthodes de résolution) Et non à l'étude des solutions (stabilité) ou à l'intervalle d'existence.

2. Equations différentielles ordinaires du premier ordre

Elles sont de la forme : $f(x, y, y') = 0$ ou $y' = f(x, y)$

Il existe trois types principaux d'équations différentielles d'ordre 1

Equation différentielle à variables séparées ou séparables

Equation différentielle homogène

Equation différentielle linéaire

Et un nombre fini d'équations spéciales : Equation de Bernoulli, équation de Riccati, équation de Lagrange, et de Clairaut.…

Résolution d'équations différentielles d'ordre 1 :

1) Equations différentielles à variables séparées : Elles sont de la forme : $f(y)y' = g(x)$

Pour la résoudre poser $y' = \frac{dy}{dx}$ et intégrer les deux cotés d'égalité : $\int f(y)dy = \int g(x)dx$

Exemples : 1) (E_1) : $(1+x^2)y' = xy$ EDO à variables séparables

On $(1+x^2)y' = xy \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1+x^2}dx \Rightarrow ln|y| = \frac{1}{2}ln(1+x^2) + c$

$\Rightarrow \ln|y| = ln\left|k\sqrt{1+x^2}\right| \quad (c = \ln(k))$

$\Rightarrow y = k\sqrt{1+x^2}$

Alors $y = k\sqrt{1+x^2}$ est la solution générale de (E_1).

2) (E_2) : $x\,y' = y + xy$ est une EDO à variables séparables

On a $x\,y' = y + xy \Rightarrow xy' = y(1+x) \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1+x}{x}dx \Rightarrow ln|y| = x + ln|x| + c$

$\Rightarrow y = e^{x+ln|x|+c}$

$\Rightarrow y = kxe^x \quad (k = e^c)$.

Alors $y = kxe^x$ est la solution générale de (E_2).

3) (E_3) : $\begin{cases} y' = 2x\sqrt{y-1} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

$y' = 2x\sqrt{y-1} \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y-1}} = x \Rightarrow \sqrt{y-1} = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow y = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)^2$

Alors $y = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)^2$ est la solution générale de(E_3) .

On a $y(1) = 1 \Rightarrow c = \frac{-1}{2}$ Alors $y_p = 1 + \frac{1}{4}(x^2-1)^2$ est la solution particulière de (E_3).

2) Equations différentielles homogènes : Elles sont de la forme : $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Pour résoudre une équation différentielle homogène poser le changement de variable $z = \frac{y}{x}$;

$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz$ et $y' = z + xz'$.

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow z + xz' = f(z) \Rightarrow \frac{1}{f(z)-z}z' = \frac{1}{x}$ Est une équation à variables séparables.

Exemples :

1) (E_1) : $(x^2+y^2) - xyy' = 0$. Divisons surx^2 .

L'équation (E_1) devient $\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) - \frac{y}{x}y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (*)

Posons : $z=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xz$ et $y'=z+xz'$ remplaçons dans l'équation (*)

$\frac{1}{f(z)-z}z'=\frac{1}{x}\Rightarrow zz'=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{2}z^2=\ln(x)+c\Rightarrow z^2=ln(x^2)+k\quad(k=2c)$

$$\Rightarrow z=\pm\sqrt{ln(x^2)+k}$$

Ou $z=\pm\sqrt{ln(k_1x^2)}\quad(k=ln(k_1))$

$y=xz\Rightarrow y=\pm x\sqrt{ln(k_1x^2)}$ est la solution générale de (E_1).

2) (E_2) : $xy'=y+x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$ Divisons sur x . $y'=\frac{y}{x}+\cos\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Posons : $z=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xz$, $y'=z+xz'$ et $\frac{z'}{f(z)-z}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{\cos(z)}z'=\frac{1}{x}$

$\int\frac{dz}{\cos(z)}=\int\frac{dx}{x}$ Posons : $t=\tan\left(\frac{z}{2}\right)$, $z=2\arctan(t)$, $dz=\frac{2}{1+t^2}dt$

$\cos(z)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. $\int\frac{dz}{\cos(z)}=\int\frac{2}{1-t^2}dt=\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$

$\int\frac{dx}{x}=ln|x|+c=ln|kx|\quad(c=ln|k|)$

$$ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|=ln|kx|\Rightarrow\frac{1+t}{1-t}=kx\Rightarrow t=\frac{kx-1}{kx+1}\Rightarrow z=2\arctan\left(\frac{kx-1}{kx+1}\right)$$

Et $y=2x\arctan\left(\frac{kx-1}{kx+1}\right)$ est la solution générale de (E_2).

3) (E_3) : $\begin{cases}x^2y'-2xy+y^2=0\\ y(1)=2\end{cases}$

$x^2y'-2xy+y^2=0\Rightarrow y'=2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2=f\left(\frac{y}{x}\right)$ Posons : $z=\frac{y}{x}$, $y=xz$

$y'=z+xz'=2z-z^2\Rightarrow\frac{1}{z-z^2}z'=\frac{1}{x}\Rightarrow\int\frac{dz}{z-z^2}=\int\frac{dx}{x}$

$\int\frac{dz}{z-z^2}=\int\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\right)dz=ln\left|\frac{z}{1-z}\right|=ln|kx|\Rightarrow z=\frac{kx}{kx+1}\Rightarrow y=\frac{kx^2}{kx+1}$

$y=\frac{kx^2}{kx+1}$ est la solution générale de (E_3).

$y(1)=2\Rightarrow\frac{k}{k+1}=2\Rightarrow k=-2\Rightarrow y_p=\frac{2x^2}{2x-1}$ est la solution particulière de (E_3).

3) Equations différentielles linéaires : Elles sont de type : (E) : $y'+a(x)y=b(x)$,

a, b deux fonctions continues sur $I \subseteq \mathbb{R}$.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire il faut passer par les deux étapes Suivantes :

1ère Etape : chercher y_0 la solution de l'équation (E_0) sans le second membre $(b(x) = 0)$.

$$(E_0) \ : \ y' + a(x)y = 0 \ \Rightarrow \ \frac{y'}{y} = -a(x) \ \Rightarrow \ y_0 = k\, e^{-\int a(x)dx}$$

2ème Etape : Chercher y_p la solution particulière de (E).

Utilisons la méthode de la variation de la constante. $k = k(x)$ (Fonction)

On a $y = ke^{-\int a(x)dx} \Rightarrow y' = k' e^{-\int a(x)dx} - k\, a(x)e^{-\int a(x)dx}$

Remplaçons dans (E) : $k' e^{-\int a(x)dx} = b(x) \ \Rightarrow k = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$.

Alors : $y_p = \ ke^{-\int a(x)dx} = e^{-\int a(x)dx} \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$.

La solution générale de (E) est donnée par : $y_G = y_0 + y_p$.

$$y_G = \ k\, e^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx} \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx.$$

Exemples :

1) $(E_1) : xy' + 2y = \frac{1}{2}x^3$

$xy' + 2y = \frac{1}{2}x^3 \ \Rightarrow y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{2}x^2 \qquad a(x) = \frac{2}{x} \ , b(x) = \frac{1}{2}x^2$

$i)$ $y_0 = ?$ $(E_0) : y' + \frac{2}{x}y = 0 \qquad y_0 = k\, e^{-\int a(x)dx}$

$\int a(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln(x) = ln(x^2)$ Alors : $y_0 = \frac{k}{x^2}$.

$ii)$ $y_p = ?$ Solution particulière de (E_1)

$$y_p = e^{-\int a(x)dx} \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx = \frac{1}{x^2}\int \frac{1}{2}x^4dx = \frac{1}{10}x^3.$$

Conclusion : $y_G = y_0 + y_p = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{10}x^3$

2) $(E_2):\begin{cases} y' + 2y = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad a(x) = 2,\ b(x) = e^x$

i) $y_0 = ?$ $(E_0):\ y' + 2y = 0$ $\quad y_0 = k\, e^{-\int a(x)dx}$

$\int a(x)dx = 2\int dx = 2x$ Alors : $y_0 = ke^{-2x}$.

ii) $y_p = ?$ Solution particulière de (E_2)

$y_p = e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx = e^{-2x}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^x$.

Conclusion : $y_G = y_0 + y_p = ke^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$.

$y(0) = 1 \Rightarrow k + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$. $y = \frac{2}{3}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$.

3) $(E_3): y' - \frac{y}{x} = x\arctan(x)$ $\quad a(x) = -\frac{1}{x}$, $b(x) = x\arctan(x)$

i) $y_0 = ?$ $(E_0):\ y' - \frac{1}{x}y = 0$ $\quad y_0 = k\, e^{-\int a(x)dx}$

$\int a(x)dx = -\int \frac{dx}{x} = -ln|x| \Rightarrow y_0 = k\,x$.

ii) $y_p = ?$ Solution particulière de (E_3)

$y_p = e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx = x\int \arctan(x)\,dx$ Par partie

$\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}ln(1+x^2)$

$y_p = x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}\,x\,ln(1+x^2)$

Conclusion : $y_G = k\,x + x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}\,x\,ln(1+x^2)$.

4) Equations différentielles de Bernoulli :

Elles sont de la forme : $(E)\ :\ y' + a(x)y = b(x)y^n,\ n > 1$ (entier naturel)

Pour résoudre une équation de Bernoulli posons le changement de variable : $z = \frac{1}{y^{n-1}}$.

$z = \frac{1}{y^{n-1}} \Rightarrow z' = \frac{1-n}{y^n}y'$ Remplaçons dans (E)

$(E): \frac{1}{y^n}y' + \frac{a(x)}{y^{n-1}} = b(x) \Rightarrow \frac{1}{1-n}z' + a(x)z = b(x)$ Est une EDO linéaire.

Exemples :

1) $(E_1): xy' + y = y^2\ln(x)$ EDO de Bernoulli avec $n = 2$.

$xy' + y = y^2\ln(x) \Rightarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{ln(x)}{x}$

Posons : $z = \frac{1}{y}$, $z' = \frac{-1}{y^2}y'$ (E_1) devient : $-z' + \frac{1}{x}z = \frac{\ln(x)}{x}$ EDO linéaire avec :

$a(x) = \frac{-1}{x}$, $b(x) = \frac{-\ln(x)}{x}$

$i)$ $z_0 =?$ solution de $z' - \frac{1}{x}z = 0,$ $z_0 = k\, e^{-\int a(x)dx} = k\, x$

$ii)$ $z_p =?$ Solution particulière de (E_1).

$z_p = e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx = -x\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ Par partie.

$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \frac{-1}{x}(1+\ln(x)) \Rightarrow z_p = 1+\ln(x)$

Alors : $z_G = z_0 + z_p = k\,x + \ln(x) + 1$

$z = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z} = \frac{1}{kx+\ln(x)+1}$ Est la solution générale de (E_1).

2) $(E_2):$ $x^2y' + xy = y^5$ EDO de Bernoulli avec $n = 5$.

$x^2y' + xy = y^5 \Rightarrow \frac{y'}{y^5} + \frac{1}{x}\frac{1}{y^4} = \frac{1}{x^2}$ Posons : $z = \frac{1}{y^4}$, $z' = \frac{-4}{y^5}y'$ l'équation devient

$\frac{-1}{4}z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x^2} \Rightarrow z' - \frac{4}{x}z = \frac{-4}{x^2}$ Une EDO linéaire

$i)$ z_0? Solution de l'équation $z' - \frac{4}{x}z = 0$

$z' - \frac{4}{x}z = 0 \Rightarrow z_0 = kx^4.$

$ii)$ $z_p =?$ Solution particulière de $z' - \frac{4}{x}z = \frac{-4}{x^2}$. par variation de la constante $k = k(x)$ (Fonction)

On a $z = kx^4$ et $z' = k'x^4 + 4kx^3$ Remplaçons dans $z' - \frac{4}{x}z = \frac{-4}{x^2}$ on trouve :

$k' = \frac{-4}{x^6} \Rightarrow k = \frac{4}{5x^5}$ Alors : $z_p = \frac{4}{5\,x}$ et $z_G = z_0 + z_p = kx^4 + \frac{4}{5\,x}$.

$z = \frac{1}{y^4} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{kx^4 + \frac{4}{5\,x}}}$.

5) Equations différentielles de Riccati :

Elles sont de la forme : $(E) : y' + a(x)y^2 + b(x)y = c(x)$ Avec : $a, b,$ et c trois fonctions Continues sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

Pour résoudre une équation de Riccati, il faut connaître une solution particulière y_1 , et posons Le changement de variable : $y = y_1 + \frac{1}{z}$.

$y = y_1 + \frac{1}{z}$, et $y' = y'_1 - \frac{1}{z^2}z'$ Remplaçons dans(E), et après les simplifications nous

Obtiendrons une équation linéaire : $z' - (2a(x)y_1 + b(x))z = a(x)$.

Remarque :

Dans la résolution de l'équation de Riccati on peut poser deux changements de variable,

Le premier : Posons $y = u + y_1$. L'équation (E) deviendra une équation de Bernoulli $(n = 2)$.

$$u' + (2a(x)y_1 + b(x))u + a(x)u^2 = 0$$

Le deuxième : Posons $z = \frac{1}{u}$, $z' = \frac{-1}{z^2}z'$. L'équation de nouveau devient une équation linéaire.

$$z' - (2a(x)y_1 + b(x))\, z = a(x)$$

Exemples :

1) $(E) : \begin{cases} x^2y' = xy - x^2y^2 - 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ Avec $y_1 = \frac{1}{x}$ est une solution particulière.

$x^2y' = xy - x^2y^2 - 1 \Rightarrow y' + y^2 - \frac{1}{x}y = \frac{-1}{x^2}$ Equation de Riccati

Avec : $a(x) = 1,\ b(x) = \frac{-1}{x}$, et $c(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Pour la résoudre posons : $y = \frac{1}{z} + y_1$, $y' = \frac{-1}{z^2}z' + y'_1$ Nous obtiendrons : $z' - \frac{1}{x}z = 1$ (linéaire)

$i)$ $z_0 = ?$ Solution de $z' - \frac{1}{x}z = 0$, $z_0 = kx$

$ii)$ $z_p = ?$ Solution particulière de $z' - \frac{1}{x}z = 1.$ $z_p = xln|x|$

Alors : $z_G = z_0 + z_p = kx + xln|x|$ solution générale de l'équation linéaire.

Et $y = \frac{1}{z} + y_1 = \frac{1}{kx + xln|x|} + \frac{1}{x}$ Est la solution de l'équation (E).

On a $y(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{k} + 1 = 2 \Rightarrow k = 1$ Alors : $y_2 = \frac{1}{x + xln|x|} + \frac{1}{x} = \frac{2 + ln|x|}{x + xln|x|}$ Est la solution passant

Par le point $(1, 2)$.

2) $(E) : y' = -2x + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y + \frac{1}{x}y^2$, et $y_0 = x$ est une solution particulière.

$$y' = -2x + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y + \frac{1}{x}y^2 \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y^2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = -2x$$

$$a(x) = -\frac{1}{x}\ ,\quad b(x) = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ ,\ c(x) = -2x$$

Posons : $y = \frac{1}{z} + x$, $y' = \frac{-1}{z^2}z' + 1$ (E) devient : $z' + \left(3 + \frac{1}{x}\right)z = \frac{-1}{x}$ (linéaire)

$i)$ $z_0 = ?$ Solution de $z' + \left(3 + \frac{1}{x}\right)z = 0,$ $z_0 = \frac{k}{x}e^{-3x}$

$ii)$ $z_p = ?$ Solution particulière de $z' + \left(3 + \frac{1}{x}\right) z = \frac{-1}{x}$, $z_p = \frac{-1}{3\,x}$

$z_G = z_0 + z_p = \frac{k}{x} e^{-3x} - \frac{1}{3\,x}$ Solution générale de l'équation $z' + \left(3 + \frac{1}{x}\right) z = \frac{-1}{x}$

Et $y = \frac{1}{z} + x = \frac{3x}{3ke^{-3x}-1} + x$ (on peut remplacer $3k$ par k).

$$= \frac{3x}{ke^{-3x}-1} + x$$

3) Equations différentielles du second ordre :

Les équations différentielles d'ordre 2 prennent la forme : $y'' = F(x, y, y')$ ou $F(x, y, y', y'') = 0$.

Il existe deux types principales d'équations différentielles d'ordre 2 :

Equations différentielles incomplètes et Equations différentielles linéaires

1) Equations différentielles incomplètes : Généralement, il-y-a trois cas :

Premier cas : Les équations qui prennent la forme : $(E)\ :\ y'' = f(x)$

Pour la résoudre on intègre deux fois la fonction .

$y'' = f(x) \Rightarrow y' = \int f(x)dx = F(x) + c$, F primitive de f.

$\Rightarrow y = \int (F(x) + c)dx = G(x) + cx + k$, G primitive de F.

Exemple : $(E)\ :\ y'' = \frac{1}{1+x}$

$$y'' = \frac{1}{1+x} \Rightarrow y' = ln|1+x| + c \Rightarrow y = (1+x)ln|1+x| - x + cx + k$$

$$y = (1+x)ln|1+x| + Cx + k \qquad (C = c - 1)$$

Deuxième cas : Les équations qui prennent la forme : $(E)\ :\ y'' = f(x, y')$

Pour la résoudre posons le changement : $y' = z$

$y' = z \Rightarrow z' = f(x, z)$ EDO du premier ordre.

Exemple : $(E)\ :\ xy'' - y' = 0$ Posons : $y' = z$ $(y'' = z')$

$$xy'' - y' = 0 \Rightarrow xz' - z = 0 \Rightarrow \frac{z'}{z} = \frac{1}{x} \Rightarrow z = kx \Rightarrow y = \frac{1}{2}kx.$$

Troisième cas : Les équations qui prennent la forme : $(E)\ :\ y'' = f(y, y')$

Psons $u(y) = y'$, u fonction en y

$u(y) = y' \Rightarrow y'' = u'(y)y' = uu'$

(E) Devient : $uu' = f(y, u)$ EDO d'ordre 1 (Ici la variable est$y$)

Exemple : (E) : $y'' = \frac{y'^2}{\tan(y)}$

Posons $u = u(y) = y' \Rightarrow uu' = \frac{u^2}{\tan(y)} \Rightarrow \frac{1}{u}u' = \frac{\cos(y)}{\sin(y)}$ EDO d'ordre 1

$\frac{1}{u}u' = \frac{\cos(y)}{\sin(y)} \Rightarrow ln|u| = ln|k\sin(y)| \Rightarrow u = k\sin(y)$

$u = y' = k\sin(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{sin(y)} = \int kdx \Rightarrow kx + C = \int \frac{dy}{sin(y)}$ (Posons : $t = tan\left(\frac{y}{2}\right)$)

$\int \frac{dy}{sin(y)} = ln\left|tan\left(\frac{y}{2}\right)\right| = kx + C \Rightarrow tan\left(\frac{y}{2}\right) = C_1 e^{kx}$. $(C_1 = e^C)$

$y = 2\, arctan(C_1 e^{kx})$ Solution de (E).

2) Equations différentielles linéaires : Elles prennent la forme :

$(E) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ Avec a, b, c, et f
Des fonctions continues sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

Remarque : Dans ce chapitre nous intéressons au équations à coefficients constants $(a, b,$ et $\in \mathbb{R})$

3) Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants :

Elles sont de la forme : (E) : $ay'' + by' + cy = f(x)$
Avec a, b, c des réels, $a \neq 0$, et f une fonction continue sur un segment $I \subseteq \mathbb{R}$.

i) Equation différentielle d'ordre 2 homogène : (Sans le second membre)

Elle prend la forme : (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$, a, b, c des réels , et $a \neq 0$.

Pour la résoudre considérons la solution $y = e^{rx}$ Avec $r \in \mathbb{C}$.

$y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$, et $y'' = r^2e^{rx}$ Remplaçons dans l'équation(E_0), on trouve :

$ar^2 + br + c = 0$.

On appelle le polynôme $(r) = ar^2 + br + c$, un polynôme caractéristique associée à l'équation (E_0).

Pour trouver la solution générale de l'équation homogène (E_0) on distingue trois cas :

Premier cas : Le discriminant de P est strictement positif $(\Delta = b^2 - 4ac > 0)$.

P admet deux racines réelles : $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}$, $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}$

Et la solution générale donnée par : $y_0 = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

Exemples :

1) (E_0) : $y'' + y' - 2y = 0$ $\quad P(r) = ar^2 + br + c = r^2 + r - 2$
$\Delta = 9 > 0$, $r_1 = -2$, $r_2 = 1$

Alors : $y_0 = C_1e^{-2x} + C_2e^x$ est la solution générale de (E_0).

2) (E_0) : $3y'' - 5y' + 2y = 0$ $\quad P(r) = 3r^2 - 5r + 2$

$\Delta = 1 > 0$, $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 1$

Alors : $y_0 = C_1e^{\frac{2}{3}x} + C_2e^x$

Deuxième cas : Le discriminant de P est nul $\quad (\Delta = b^2 - 4ac = 0)$.

P Admet une racine réelle double : $r_1 = r_2 = r = \frac{-b}{2a}$

La solution générale donnée par : $y_0 = (C_1x + C_2)e^{rx}$.

Exemples :

1) (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$ $\quad P(r) = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$ $\quad r = -1$

Alors : $y_0 = (C_1x + C_2)e^{-x}$

2) (E_0) : $9y'' - 6y' + y = 0$ $\quad P(r) = 9r^2 - 6r + 1$ $\quad \Delta = 0$, $r = \frac{1}{3}$

Alors : $y_0 = (C_1x + C_2)e^{\frac{1}{3}x}$

Troisième cas : Le discriminant de P est strictement négatif $\quad (\Delta = b^2 - 4ac < 0)$.

P Admet deux racines complexes : $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta$

La solution générale donnée par : $y_0 = \big(C_1cos(\beta x) + C_2sin(\beta x)\big)e^{\alpha x}$

Exemples :

1) (E_0) : $y'' - 2y' + 2y = 0$ $\quad P(r) = r^2 - 2r + 2$ $\quad \delta = -1 < 0$ $(\Delta = -4)$

$r_1 = 1 + i,$ $r_2 = \overline{r_1} = 1 - i$ $(\alpha = 1, \beta = 1)$

Alors : $y_0 = \big(C_1cos(x) + C_2sin(x)\big)e^x$

2) (E_0) : $y'' + 2y = 0$ $\quad P(r) = r^2 + 2 = (r - i\sqrt{2})(r + i\sqrt{2})$

$r_1 = i\sqrt{2}$, $r_2 = -i\sqrt{2}$ $\quad (\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{2})$

Alors : $y_0 = C_1cos(\sqrt{2}\,x) + C_2sin(\sqrt{2}\,x)$

ii) Equation différentielle d'ordre 2 avec le second membre :

(E) : $ay'' + by' + cy = f(x)$ Avec a, b, c des réels et $\neq 0$.

Pour résoudre (E) il faut suivre les deux étapes suivantes :

Première étape : Chercher y_0Solution d'équation homogène associée a(E) . (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$.

Deuxième étape : Chercher y_pSolution particulière de (E). Elle est sous la forme :

$y_p = C_1y_1 + C_2y_2$ $\quad$ Avec y_1 et y_2 Sont solutions de l'équation homogène (E_0).

Déterminer C_1 et C_2 par la méthode de variation des constantes.

Intégrer C'_1 et C'_2 Solution du système : $\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = \frac{1}{a} f(x) \end{cases}$

Conclusion : $y_G = y_0 + y_p$ Solution générale de (E).

Exemples :

1) $(E) : 2y'' - 3y' + y = e^x$

$i)$ $y_0 = ?$ Solution de (E_0) : $2y'' - 3y' + y = 0$

$P(r) = 2r^2 - 3r + 1$, $\Delta = 1 > 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{2}$

Alors : $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$

$ii)$ $y_p = ?$ Solution particulière de (E). Variation des constantes. $C_1 = C_1(x)$ et $C_2 = C_2(x)$.

$y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y'_1 + C_2' y'_2 = \frac{1}{a} f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{\frac{1}{2}x} = 0 & (1) \\ C_1' e^x + \frac{1}{2} C_2' e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} e^x & (2) \end{cases}$$

$(2) - (1)$: $C_2' = -e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow C_2 = -\int e^{\frac{1}{2}x} dx = -2e^{\frac{1}{2}x}$.

(1) : $C_1' = 1 \Rightarrow C_1 = x$.

Alors : $y_p = (x-2)e^x$

Conclusion : $y_G = y_0 + y_p = (x - 2 + C_1)e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$. (On peut poser $C_3 = -2 + C_1$).

$y_G = y_0 + y_p = (x + C_3)e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$

2) $(E) : y'' + y = \sin(x)$

$i)$ $y_0 = ?$ Solution de (E_0) : $y'' + y = 0$

$P(r) = r^2 + 1 = (r - i)(r + i)$ $r_1 = i$, $r_2 = -i$ $\alpha = 0$ et $\beta = 1$

Alors : $y_0 = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$

$ii)$ $y_p = ?$ Solution particulière de (E). Variation des constantes. $C_1 = C_1(x)$ et $C_2 = C_2(x)$.

$y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y'_1 + C_2' y'_2 = \frac{1}{a} f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' cos(x) + C_2' \sin(x) = 0 & (1) \\ -C_1' \sin(x) + C_2' \cos(x) = \sin(x) & (2) \end{cases}$$

$$(1)\times\sin(x)+(2)\times\cos(x):\quad C_2' = \sin(x)\cos(x) = \tfrac{1}{2}\sin(2x)$$

$$C_2 = \tfrac{-1}{4}\cos(2x) = \tfrac{1}{2}\sin^2(x)$$

$$(1):\ C_1' = -\sin^2(x) = \tfrac{1}{2}(\cos(2x)-1)\ \Rightarrow\ C_1 = \tfrac{1}{4}\sin(2x) - \tfrac{1}{2}x$$

Alors : $y_p = \frac{1}{2}\sin(x)\cos^2(x) - \frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{2}\sin^3(x)$

$$= \tfrac{1}{2}\sin(x) - \tfrac{1}{2}x\cos(x).$$

Conclusion : $y_G = y_0 + y_p = \left(C_1 - \frac{1}{2}x\right)\cos(x) + C_3\sin(x) \quad \left(C_3 = \frac{1}{2} + C_2\right).$

3) $(E):\begin{cases} 4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x} \\ y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$i)\ y_0 = ?$ Solution de $(E_0):\ 4y'' - 4y' + y = 0$

$P(r) = 4r^2 - 4r + 1 \qquad \Delta = 0 \quad r_1 = r_2 = r = \frac{1}{2}$

Alors : $y_0 = (C_1x + C_2)e^{\frac{1}{2}x}$

$ii)\ y_p = ?$ Solution particulière de (E). Variation des constantes. $C_1 = C_1(x)$ et $C_2 = C_2(x)$.

$$y_p = (C_1x + C_2)e^{\frac{1}{2}x} = C_1xe^{\frac{1}{2}x} + C_2e^{\frac{1}{2}x}$$

On a $\begin{cases} C_1'xe^{\frac{1}{2}x} + C_2'e^{\frac{1}{2}x} = 0 \\ \left(\frac{1}{2}x + 1\right)C_1'e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}C_2'e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}xe^{\frac{1}{2}x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'x + C_2' = 0 & (1) \\ \left(\frac{1}{2}x + 1\right)C_1' + \frac{1}{2}C_2' = \frac{1}{4}\,x & (2) \end{cases}$

$(2)\times 2 - (1):\quad C_1' = \frac{1}{4}x \ \Rightarrow\ C_1 = \frac{1}{8}x^2$

$(1):\ C_2' = -C_1'x \ \Rightarrow\ C_2' = \frac{-1}{4}x^2 \ \Rightarrow\ C_2 = \frac{-1}{12}\,x^3.$

Alors : $y_p = \frac{1}{24}x^3e^{\frac{1}{2}x}$

Conclusion : $y_G = \left(\frac{1}{24}x^3 + C_1x + C_2\right)e^{\frac{1}{2}x}.$

On a $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = 0 \end{cases}$ Alors : $y = \left(\frac{1}{24}x^3 + 2\right)e^{\frac{1}{2}x}.$

Remarque : (recherche de y_p par identification)

1) Si le second membre $f(x) = Q(x)e^{sx}$ Avec : Q un polynôme et $\in \mathbb{R}$.

On distingue trois cas :

$i)$ Si s n'est pas racine de $P(r)$. Alors : $y_p = R(x)e^{sx}$, R polynôme et $d°R = d°Q$

$ii)$ Si s est une racine simple de $P(r)$. Alors : $y_p = R(x)e^{sx}$ avec $d°R = d°Q + 1$

Ou $y_p = x\,R(x)e^{sx}$ avec $d°R = d°Q$

$iii)$ Si s est une racine double de $P(r)$. Alors : $y_p = R(x)e^{sx}$ avec $d°R = d°Q + 2$

Ou $y_p = x^2\,R(x)e^{sx}$ avec $d°R = d°Q$

2) Si le second membre $f(x) = A\,cos(\beta x) + B\,sin(\beta x)$
On distingue deux cas :

$i)$ Si βi n'est pas racine de $P(r)$. Alors : $y_p = A_1\cos(\beta x) + B_1\sin(\beta x)$

$ii)$ Si βi est une racine de $P(r)$. Alors : $y_p = x(A_1\cos(\beta x) + B_1\sin(\beta x))$.

Exemples :

1) $(E) : y'' - 3y' + 2y = (2x^2 - 3)e^{-x}$

$i)$ $y_0 = ?$ Solution de (E_0) : $y'' - 3y' + 2y = 0$ $P(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$

Alors : $y_0 = C_1e^x + C_2e^{2x}$

$ii)$ $y_p = ?$ On a $f(x) = Q(x)e^{s\,x} = (2x^2 - 3)e^{-x}$, $s = -1$ et $d°Q = 2$

$s = -1$ n'est pas racine P . Alors : $y_p = R(x)e^{-x}$ $d°R = d°Q = 2$

$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

$y_p' = (-ax^2 + (2a-b)x + b - c)e^{-x}$ et $y_p'' = (ax^2 + (-4a+b)x + 2a - 2b + c)e^{-x}$

$y_p'' - 3\ y_p' + 2y_p = (6ax^2 + (10a - 6b)x + 2a - 5b + 6c)e^{-x} = (2x^2 - 3)e^{-x}$

$$\begin{cases} 6a = 2 \\ -10a + 6b = 0 \\ 2a - 5b + 6c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{5}{9} \\ c = \frac{-4}{27} \end{cases} \Rightarrow y_p = \frac{1}{27}(9x^2 + 15x - 4)e^{-x}$$

Alors : $y_G = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{27}(9x^2 + 15x - 4)e^{-x}$.

2) $(E) : y'' + 4y = 3\sin(2x)$

$i)$ $y_0 = ?$ Solution de (E_0) : $y'' + 4y = 0$ $P(r) = r^2 + 4 = (r - 2i)(r + 2i)$

Alors : $y_0 = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$

$ii)$ $y_p = ?$ On a $f(x) = A\,cos(\beta x) + B\,sin(\beta x) = 3\sin(2x)$, $\beta = 2$

$\beta i = 2i$ est une racine de P. Alors : $y_p = x\big(A\,cos(2x) + B\,sin(2x)\big)$

$y_p' = A\,cos(2x) + B\,sin(2x) + x(-2A\sin(2x) + 2Bcos(2x))$

$y_p'' = -4A\,sin(2x) + 4B\,cos(2x) + x(-4Acos(2x) - 4Bsin(2x))$

$y'' + 4y = -4A\,sin(2x) + 4B\,cos(2x) = 3\sin(2x) \Rightarrow \begin{cases} -4A = 3 \\ 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{-3}{4} \\ B = 0 \end{cases}$

Alors : $y_p = \frac{-3}{4} x \cos(2x)$

Conclusion : $y_G = y_0 + y_p = \left(\frac{-3}{4} x + C_1\right)\cos(2x) + C_2\sin(2x)$.