Faculté des Sciences Exactes et SNV - Univ. OEB
Département des Mathématiques et Informatique
3ème année Maths Licence - S6 (2023-2024)
Éxamen Méthodes Numériques pour EDO et EDP
Nombre de pages de l'énoncé : 2. Coefficients : 5. crédits : 6.

Le 12-05-2024 de 09h00 à 10h30

Exercice 1 ***(04 pts, 18 mn)***

1. *Justifier l'existence de l'unique solution locale pour le problème suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t) + 4, \\ y(0) &= 1. \end{cases} \tag{1}$$

2. *Calculer explicitement cette solution et donner son domaine de définition.*

Exercice 2 ***(08 pts, 36 mn)*** *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} -y''(t) + y'(t) &= t, t \in (0,1), \\ y(0) &= a, \\ y(1) &= b, \end{cases} \tag{2}$$

où a et b sont des constantes.

On cherche à approcher cette solution par la méthode de différences finies. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $h = \frac{1}{n+1}$. On note y_i la valeur approchée recherchée de y au point ih pour $i = 0, \cdots, n+1$. On utilise les approximations centrées les plus simples de y' et y'' au point $ih, i = 1, \cdots, n$. On pose

$$y_h = (y_1, \cdots, y_n).$$

1. *Donner une discrétisation pour différences finies de ce problème.*
2. *Ecrire le système obtenu sous la forme matricielle $\mathcal{A}_h y_h = b_h$. Donner $\mathcal{A}_h$ et b_h.*
3. *Montrer que le schéma obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance si y est suffisamment régulière.*

Exercice 3 ***(08 pts, 36 mn)*** *Soit $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. On considère le problème elliptique en dimension deux (2D) suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta y(x,t) + \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) &= f(x,t), (x,t) \in \Omega, \\ y(x,0) = y(x,1) &= 0, \\ y(0,t) = y(1,t) &= 0, \end{cases} \tag{3}$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ et $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est donné. On note y la solution exacte de (3) et on suppose que $y \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$.

On suppose que la solution $y(x,t)$ est suffisamment régulière. On cherche à approcher cette solution par une méthode de différences finies. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{1}{n+1}$. On note $y_{i,j}$ la valeur approchée recherchée de y au point (ih, jh) pour $i, j = 0, \cdots, n+1$.

1. *Montrer que* $y\left(x,t\right)=\frac{1}{2}t^{2}$ *est une solution exacte de l'équation*

$$-\Delta y\left(x,t\right)+\frac{\partial y}{\partial x}\left(x,t\right)=-1.$$

2. *Donner une discrétisation par différences finies de ce problème (3) en utilisant le schéma centré.*

3. *Donner l'ordre de consistance de ce schéma.*

4. *Quel est le principe du maximum de ce schéma.*

5. *Montrer que le schéma obtenu est stable au sens* $\left\|y\right\|_{\infty}\leq C\left\|f\right\|_{\infty}$ *sous une condition sur* h *à préciser.*

Corrigé Type.

Solution 1 (Exercice 1) 1. *Il suffit de vérifier les hypothèses de Cauchy-Lipschitz :*

La fonction $y \longmapsto f(y)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}$ *et ainsi elle est localement lipschitzienne.*

. . . . *(2 pts)*

2. *La seule solution est la fonction* $y(t) = 5\exp(t) - 4$*, pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

. . . . *(1+1 pts)*

Solution 2 (Exercice 2) ***Différences finies en EDO***

1. *Avec un schéma centrée, on a*

$$\begin{aligned} y''(t_i) &= \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + O\left(h^2\right); O\left(h^2\right) = -\frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) \\ y'(t_i) &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O\left(h^2\right); O\left(h^2\right) = -\frac{h^2}{6} y^{(3)}(\xi_i) \end{aligned}$$

. . . . *(0.5+0.5 pts)*

Donc, le problème discret devient

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2}\right) y_{i-1} + \frac{2}{h^2} y_i + \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2}\right) y_{i+1} = ih, i = 1, \cdots, n \quad (t_i = ih), \\ y_0 = a, \\ y_{n+1} = b. \end{cases}$$

. . . . *(1 +0.5+0.5 pts)*

2. *On peut écrire le système sous la forme matricielle* $\mathcal{A}_h y_h = b_h$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h &= \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ -\left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2}\right) & \frac{2}{h^2} & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \frac{2}{h^2} & \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2}\right) \\ 0 & \cdots & 0 & -\left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2}\right) & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix}, \\ y_h &= \begin{pmatrix} t_1 + \left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2}\right) a \\ t_2 \\ \vdots \\ t_3 \\ t_n - \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2}\right) b \end{pmatrix}, t_i = ih. \end{aligned}$$

. . . . *(1.5+1.5 pts)*

3. *La consistance : En utilisant le développement de Taylor*

   Soit l'équation homogène : $-y''(t)+y'(t)=0$. *On a :*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= -\delta^2 y(t_i)+\widehat{\delta}_0 y(t_i)\\ &= -\frac{y(t_{i-1})-2y(t_i)+y(t_{i+1})}{h^2}+\frac{y(t_{i+1})-y(t_{i-1})}{2h}\\ &= -y''(t_i)+O\left(h^2\right)+y'(t_i)+O\left(h^2\right)\\ &= \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)-\frac{h^2}{6}y^{(3)}(\xi_i)\end{aligned}$$

.. (1 pt)

donc

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}_i| &\leq \frac{h^2}{12}\max_{t\in[0,1]}\left|y^{(4)}(t)\right|+\frac{h^2}{6}\max_{t\in[0,1]}\left|y^{(3)}(t)\right|\\ &\leq \frac{h^2}{12}\left(\max_{t\in[0,1]}\left|y^{(4)}(t)\right|+2\max_{t\in[0,1]}\left|y^{(3)}(t)\right|\right)\end{aligned}$$

donc $\|\mathcal{E}\|_\infty \longrightarrow 0$ *quand* $h\longrightarrow 0$.

Alors, le schéma est consistant d'ordre 2.

.. (0.5+0.5 pts)

<u>Solution</u> 3 (Exercice 3) ***Différences finies en EDP***

1. $y(x,t)=\frac{1}{2}t^2$, *satisfait*

$$\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=1,$$

   alors, y vérifier $-\Delta+\frac{\partial y}{\partial x}=-1$.

.. (0.5+0.5 pts)

2. *On a :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_i,t_j) &= \frac{y_{i-1,j}-2y_{i,j}+y_{i+1,j}}{h^2}+O\left(h^2\right);O\left(h^2\right)=-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i,t_j)\\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x_i,t_j) &= \frac{y_{i,j-1}-2y_{i,j}+y_{i,j+1}}{h^2}+O\left(h^2\right);O\left(h^2\right)=-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(x_i,\eta_j)\\ \frac{\partial y}{\partial x}(x_i,t_j) &= \frac{y_{i+1,j}-y_{i-1,j}}{2h}+O\left(h^2\right);O\left(h^2\right)=-\frac{h^2}{6}y^{(3)}(\theta_i,t_j)\end{aligned}$$

.. (0.5+0.5+0.5 pts)

   Alors, l'équation discrète est donner par

$$\begin{cases}\left(-\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2h}\right)y_{i+1,j}+\left(-\frac{1}{h^2}-\frac{1}{2h}\right)y_{i-1,j}+\frac{4}{h^2}y_{i,j}-\frac{1}{h^2}y_{i,j+1}-\frac{1}{h^2}y_{i,j-1}=f_{i,j}, i,j=1,\cdots,n,\\ y_{0,j}=y_{n+1,j}=0\ ;\ j=1,\cdots,n\ ;\ y_{i,0}=y_{i,n+1}=0\ ;\ i=1,\cdots,n\end{cases}\tag{4}$$

.. (1+1 pts)

3. *L'erreur de consistance :*

   Soit l'équation homogène : $-\Delta y(x,t) + \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = 0.$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{i,j} &= -\delta_x^2 y(x_i,t_j) - \delta_t^2 y(x_i,t_j) + \widehat{\delta}_{0,x} y(x_i,t_j) \\
&= -\Delta y(x_i,t_j) + \frac{\partial}{\partial x} y(x_i,t_j) + O\left(h^2\right) + O\left(h^2\right) + O\left(h^2\right) \\
&= \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i,t_j) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(x_i,\eta_j) - \frac{h^2}{12} y^{(3)}(\theta_i,t_j)
\end{aligned}$$

   donc $|\mathcal{E}_{i,j}| \leq \frac{h^2}{12}\left(\max\limits_{[0,1]\times[0,1]}\left|y_x^{(4)}(x,t)\right| + \max\limits_{[0,1]\times[0,1]}\left|y_t^{(4)}(x,t)\right| + 2\max\limits_{[0,1]\times[0,1]}\left|y_x^{(3)}(x,t)\right|\right)$

   donc $\|\mathcal{E}_{i,j}\|_\infty \leq Ch^2 \underset{h\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ *où* $C = \frac{1}{12}\left(\max\limits_{[0,1]\times[0,1]}\left|y_x^{(4)}(x,t)\right| + \max\limits_{[0,1]\times[0,1]}\left|y_t^{(4)}(x,t)\right| + 2\max\limits_{[0,1]\times[0,1]}\left|y_x^{(3)}(x,t)\right|\right)$

   Alors, le schéma est consistant d'ordre 2.

   .. (1+0.5+0.5 pts)

4. *Le principe de maximum :*

   Le problème (4) satisfait le principe du maximum si

$$f_{i,j} \leq 0 \quad \left(-\left(x^2+t^2\right) \leq 0\right), \forall x,t \in (0,1)\times(0,1).$$

   Alors, si $\omega_{i,j}$ *solution de (4), on a*

$$\omega_{i,j} \leq \max_{l,m\in\gamma}\{\omega_{l,m}\}, \forall i,j \in \{0,\cdots,n+1\},$$

   tel que $\gamma = \{l \in \{0,\cdots,n+1\}$ *ou* $m \in \{0,\cdots,n+1\}\}$ = *les points de la frontière sous la condition* $\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} \geq 0.$

   .. (1 pt)

5. *D'après le principe de maximum :* ***La stabilité*** *le schéma (4) est stable au sens* $\|y\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$, *sous la condition*

$$\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} \geq 0.$$

   .. (1 pt)

B.C & I. REZZOUG (imad.rezzoug@univ-oeb.dz)