Méthodes d'Euler et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour des équations différentielles du 1er ordre

Article · March 2017

Sofyane Bouameur
University Ibn Zohr - Agadir

الكلية متعددة التخصصات - ورزازات
FACULTÉ POLYDISCIPLINAIRE DE OUARZAZATE

Département de Mathématique, Informatique et Gestion
Filière Sciences Mathématiques et Informatiques

Méthodes d'Euler et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour des équations différentielles du 1$^{\text{er}}$ ordre

BOUAMEUR SOFYANE et EZ-ZINI MOHAMED

18 mars 2017

Introduction

Les techniques de Runge-Kutta sont des schémas numériques á un pas qui permettent de résoudre les équations différentielles ordinaires. Elles font parties des méthodes les plus populaires de part leur facilité de mise en oeuvre et leur précision. C'est Carle Runge et Martin Kutta qui au début du 20éme siècle, ont inventé ces méthodes.
Dans ce nombreux cas, les systèmes d'équations différentielles que l'on rencontre en science peuvent se mettre sous la forme d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre du type :

$$\left\{ \quad y'(t) = f\Big(t, y(t)\Big) \quad 0 \leq t_0 \leq t, \qquad y(t_0) = y_0. \right.$$

avec $y(t)$: fonction recherchée , y_0 : valeur initial.
En intégrant l'équation différetielle (**??**) entre t_n et t_{n+1} :

$$\mathrm{y}\big(t_{n+1}\big) - \mathrm{y}\big(t_n\big) = \textstyle\int_{t_n}^{t_{n+h}} f\Big(t, y(t)\Big)\mathrm{d}t \qquad \text{tel que : } t_{n+1} - t_n = \mathrm{h}$$

Rappel d'Euler

Euler Explicite

l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\Big(t, y(t)\Big)\mathrm{d}t$ peut s'approcher par la méthode du rectangle á gauche :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\Big(t, y(t)\Big)\mathrm{d}t \simeq h \times f(t_n, y_n)$$

D'oú :

$$y_{n+1} = y_n + h \times f(t_n, y_n), \qquad y(t_0) = y_0.$$

0.0.1 Euler Implicite

On aurait également pu approcher l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+h}} f\Big(t, y(t)\Big)\mathrm{d}t$ par la méthode du rectangle à droite :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\Big(t, y(t)\Big)\mathrm{d}t \simeq h \times f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

donc :

$$y_{n+1} = y_n + h \times f(t_{n+1}, y_{n+1}), \qquad y(t_0) = y_0.$$

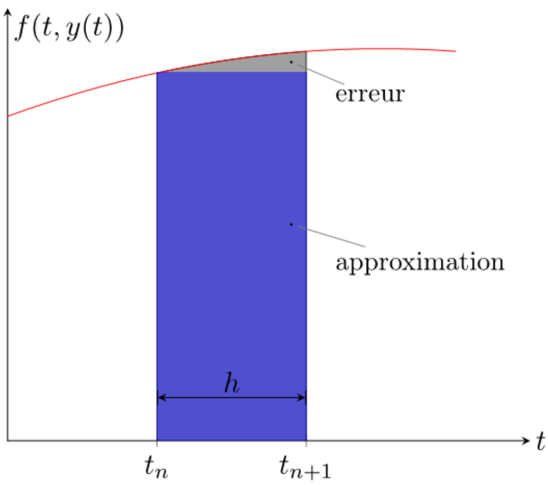

FIGURE 1 – *Euler explicite*

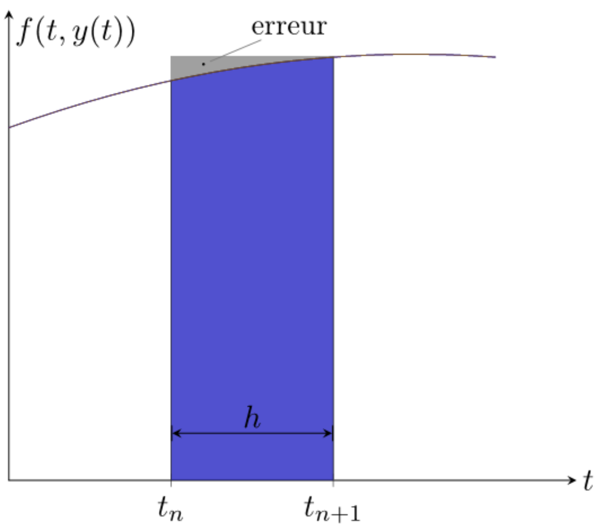

FIGURE 2 – *Euler implicite*

Les améliorations de RUNGE-KUTTA :

RUNGE-KUTTA D'ORDRE 2

Méthode du Trapèze

On voit immédiatement que l'on peut améliorer l'estimation de l'intégrale en calculant l'aire du trapèze au lieu de celui d'un rectange. La méthode du trapèze consiste en l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{2} \times [f(a) + f(b)]$$

Appliquée à l'intégrale $\int_{t_n}^{t_n+h} f\Big(t, y(t)\Big)\mathrm{d}t$,cela donne :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\Big(t, y(t)\Big)\mathrm{d}t \simeq \frac{h}{2} \times [f(t_n, y(t_n) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})]$$

donc par Trapèze ,l'intégrale devient :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times [f(t_n, y(t_n) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})))]$$

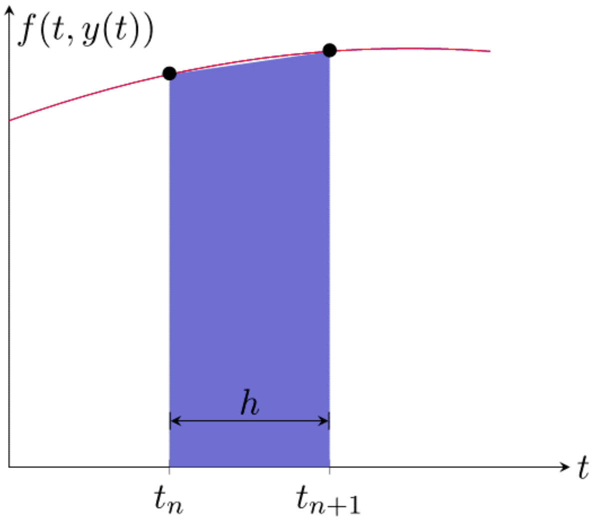

Figure 3 – *Méthode du Trapèze*

Utilisant la méthode d'Euler explicite : $y(t_{n+1}) = y_n + h \times f(t_n, y_n)$
alors :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times [f(t_n, y(t_n) + f(t_{n+1}, y_n + h \times f(t_n, y_n)))]$$

on pose $f(t_n, y(t_n)) = k_1$ *et* $f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) = k_2$

donc : $k_2 = f(t_{n+1}, y_n + hk_1)$

D'oú la relation RK2 :

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2} \times [k_1 + k_2]}$$

RUNGE-KUTTA D'ORDRE 4

Au lieu d'utiliser la méthode du trapèze, On utilise la méthode de *Simpson* qui consiste à remplacer la fonction intégrée par une parabole passant par les points extrêmes et le point milieu.

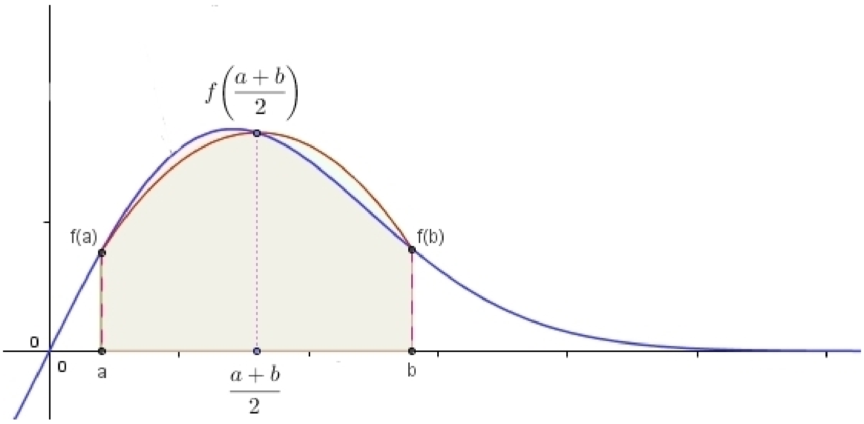

FIGURE 4 – *la méthode de Simpson*

On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{6} \times \Big[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\Big]$$

Appliquée à l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+h}} f\Big(t, y(t)\Big)\mathrm{d}t$,cela donne :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\Big(t, y(t)\Big)\mathrm{d}t \simeq \frac{h}{6} \times \Big[f(t_n, y(t_n) + 4f(t_{n+\frac{1}{2}}), y(t_{n+\frac{1}{2}}) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big]$$

d'où la relation :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \times \Big[f(t_n, y(t_n) + 4f(t_{n+\frac{1}{2}}), y(t_{n+\frac{1}{2}}) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big]$$

Ici, On a une difficulté apparaît car l'équation présente deux inconnues : $y(t_{n+\frac{1}{2}}) \quad et \quad y(t_{n+1})$.
Donc il faut estimer $4f(t_{n+\frac{1}{2}}), y(t_{n+\frac{1}{2}}) \quad et \quad f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$ à partir de $y_n, t_n \quad et \quad h$.
On commençe par le terme $4f(t_{n+\frac{1}{2}}), y(t_{n+\frac{1}{2}})$: On le décompose en deux termes identiques

$$2f\Big(t_{n+\frac{1}{2}}, \underbrace{y(t_{n+\frac{1}{2}})}_{(a)}\Big) + 2f\Big(t_{n+\frac{1}{2}}, \underbrace{y(t_{n+\frac{1}{2}})}_{(b)}\Big)$$

$y^{(a)}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} \times f(t_n, y_n)$: Euler explicite

$y^{(b)}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} \times f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}})$: Euler implicite

Donc on obtient :

$$y^{(b)}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} \times f(t_{n+\frac{1}{2}}, \underbrace{y_n + \frac{h}{2} \times f(t_n, y_n)}_{y^{(a)}_{n+\frac{1}{2}}})$$

D'où :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \times \Big[f(t_n, y_n) + 2f\Big(t_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} \times f(t_n, y_n)\Big) + 2f\Big(t_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} \times f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} \times f(t_n, y_n)) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\Big)\Big]$$

Puisque : $t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{t_n + t_{n+1}}{2} = \frac{t_n + t_n + h}{2} = t_n + \frac{h}{2}$

D'où la relation :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \times \Big[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + f(t_{n+1}, y_{n+1})\Big]$$

$$Telque \quad \begin{cases} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1) \\ k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2) \end{cases}$$

En estimation de $f(t_{n+1}, y_{n+1})$, par la méthode du rectangle au milieu :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\simeq y_n + h \times f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}) \\ &\simeq y_n + h \times f(t_{n+\frac{1}{2}}, y^{(b)}_{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Donc

$$y_{n+1} \simeq y_n + h \times f\Big(t_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} \times f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} \times f(t_n, y_n)\Big)$$

Finalement on obtient la relation explicite de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \times \Big[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\Big]$$

$$avec \begin{cases} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1) \\ k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2) \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + h k_3) \end{cases}$$