<u>UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI OUM EL BOUAGHI</u>

DÉPARTEMENT L.M.D M.I
Méthodes Numériques pour EDO et EDP (S6-2021-2022)
<u>Série n°2:</u> **Méthodes Numériques pour EDO.**

Exercice 1 *Faire trois itérations, à 10*$^{-3}$*avec* $h = 0.1$ *des méthodes d'Euler explicite, d'Euler modifiée, du point milieu et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour l'équation différentielle suivante :* $y'(t) = t\sin(y(t))$ $(y(0) = 2)$.

Exercice 2 *Soit l'équation différentielle :* $y'(t) = y(t)+e^{2t} \quad (y(0) = 2)$.

1. *Trouver la solution exacte.*

2. *En prenant* $h = 0.1$*, faire 3 itérations de la méthode d'Euler modifiée et calculer l'erreur commise sur* y_3 *en comparant les résultats avec la solution analytique* $y(0.3)$.

3. *En prenant* $h = 0.05$*, faire 6 itérations de la méthode d'Euler modifiée et calculer l'erreur commise sur* y_6 *en comparant les résultats avec la solution analytique* $y(0.3)$.

4. *Faire le rapport des erreurs commises en* ***2.*** *et en* ***3.*** *et commenter le résultat en fonction de l'erreur de troncature locale liée à la méthode utilisée.*

5. *Pour* $h = 0.1$ *et* $n = 2$*. Utiliser l'extrapolation de Richardson* $\left[\mathcal{S}_{exa} \simeq \frac{2^n \times \mathcal{S}_{app}\left(\frac{h}{2}\right) - \mathcal{S}_{app}(h)}{2^n - 1}\right]$ *pour obtenir une meilleure approximation de* $y(0.3)$.

Exercice 3 *On considère l'équation différentielle :* $y'(t) = 2y(t) \quad (y(0) = 5)$.

1. *Vérifier que la solution analytique est* $y(t) = 5e^{2t}$.

2. *En prenant* $h = \frac{1}{n}$*, montrer que les approximations fournies par la méthode d'Euler explicite peuvent s'écrire comme* $y_i = 5(1+2h)^i$*, pour* $i = 0, \cdots, n$.

3. *Pour* $n = 200$*. Vérifier numériquement que l'erreur* e_i *se comporte suivant la relation* $e_i \simeq Kh$ *où* $K \simeq 73$.

Exercice 4 *On considère le schéma suivant où* h *est le pas de temps supposé constant* $y_{i,p} = y_i + hf(t_i, y_i)\,;\ y_{i,c} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_{i,p})\right]$

1. *Mettre ce schéma sous la forme générale d'un schéma explicite à un pas (donner* ϕ*).*

2. *En supposant que* f *est assez régulière, montrer que le schéma est consistant d'ordre au moins 2.*

3. *En supposant que* f *vérifie la propriété* (L) *de Lipschitz, montrer que le schéma est stable.*

Exercice 5 *On considère le problème de Cauchy :* $y'(t) = t\sin(y), t \in [0,T] \quad (y(0) = \frac{\pi}{2})$.

1. *Ecrire le schéma d'Euler progressif pour ce problème, en prenant un pas de temps constant.*

2. *Faire 2 itérations en prenant comme pas de temps* $h = 0.1$

3. *Le schéma converge-t-il vers le problème de Cauchy?.*

Exercice 6 *On considère le problème de Cauchy :* $y'(t) = t^2 + y + 1, t \in [1,T] \quad (y(1) = 0)$.

1. *Ecrire le schéma d'Euler progressif pour ce problème, en prenant un pas de temps constant.*

2. *Faire 2 itérations en prenant comme pas de temps* $h = 0.1$

3. *Le schéma converge-t-il vers le problème de Cauchy?.*

Exercice 7 *Soit le problème de Cauchy* $y' = y - \frac{2x}{y}$ *avec* $y(0) = 1 \quad \cdots$ *(1).*

On désire approcher, en effectuant le calcul avec trois décimales, la solution de (1) en $x = 0.2$ *à l'aide des méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 et 4.*

Exercice 8 *Montrer que les schémas explicite et implicite d'Euler appliquées à* $y'(t) = -\lambda y(t)$, *avec* $\lambda > 0, \quad (y(0) = y_0)$,

avec $nh = t$ *(pas constant) conduisent chacun à une suite* (z_n) *telle que*

$$\lim_{h \longrightarrow 0, nh = t} z_n = y_0 e^{-\lambda t}.$$

Exercice 9 *Soit le problème de Cauchy* $y' = x\sin y$, $x \in [0,1]$ *avec* $y(0) = 2$ *et* $h = 0.1$

Trouver les valeurs approchées de $y(x_i)$ *à l'aide des méthodes d'Euler, Taylor d'ordre 2, Runge-Kutta d'ordre 2 et 4. Et comparer les quatre solutions avec la solution exacte.*

Exercice 10 *Considérons le système aux limites suivant:* $y'' = (1 - \frac{x}{5})y + x$ *avec* $y(1) = 2$, $y(3) = -1$ *et* $h = 0.5$

Trouver les valeurs approximatives de y *aux points:* $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$ *et* $x_3 = 2.5$