

1.4 Exercices

Exercice 1.1. Justifier l'existence de l'unique solution locale pour le problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) = 4 + y(t), \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Calculer explicitement cette solution et donner son domaine de définition.

Exercice 1.2. Même questions de l'exercice 1.1 pour le problème

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t))^{\frac{2}{3}}, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (1.8)$$

Exercice 1.3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(t, x) = 4 \frac{t^3 x}{t^4 + x^2}$ si $(t, x) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1.9)$$

1. L'application f , est-elle continue ? est-elle localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ?
2. Soit φ une solution de (1.9) qui est définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. On définit une application ψ par $\varphi(t) = t^2 \psi, t \in I$. Déterminer une équation différentielle (E) telle que $\varphi(t)$ soit solution de cette équation, puis résoudre cette équation (E).

2.14 Exercices

Exercice 2.1. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + u' = x, & x \in]0, 1[, \\ u(0) = a, u(1) = b. \end{cases} \quad (2.29)$$

On cherche à approcher cette solution par la méthode de différences finies. Soit $N \in \mathbb{N}$, et $h = \frac{1}{N+1}$. On note u_i la valeur approchée recherchée de u au point ih pour $i = 0, \dots, N+1$. On utilise les approximations centrées les plus simples de u' et u'' au point ih , $i = 1, \dots, N$. On pose $U_h = (u_1, u_2, \dots, u_N)$.

1. Donner une discrétisation par différences finies de ce problème.
2. Ecrire le système obtenu sous la forme matricielle $A_h U_h = b_h$. Donner A_h et b_h .
3. Montrer que le schéma obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance si u est suffisamment régulière.

Exercice 2.2. On s'intéresse au problème elliptique unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u'(x) = x, & x \in]0, 1[, \\ u(0) = 1, u'(1) + u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

1. Donner une discrétisation de ce problème par différences finies pour un maillage uniforme en utilisant les approximations centrées aux points $x_i = ih$, $i = 1, \dots, N$.
2. Prouver que ce système s'écrit sous la forme : $A_h U = F$.
3. Etudier la consistance de ce schéma et donner une majoration de l'erreur de consistance.

Exercice 2.3. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + \frac{1}{1+x}u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = a, u(1) = b. \end{cases} \quad (2.31)$$

On admettra qu'il existe une unique solution $u \in C^4(0, 1)$ à ce problème. On cherche à approcher cette solution par une méthode de différences finies. Soit $N \in \mathbb{N}$, et $h = \frac{1}{N+1}$. On note u_i la valeur approchée recherchée de u au point ih pour $i = 0, \dots, N+1$.

On utilise les approximations centrées les plus simples de u' et u'' au point ih , $i = 1, \dots, N$. On pose $U_h = (u_1, u_2, \dots, u_N)$.

1. Montrer que u_h est solution d'un système linéaire de la forme $A_h U_h = b_h$, donner A_h et b_h .
2. Montrer que le schéma obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance (on rappelle que l'on a supposé $u \in C^4(0, 1)$).
3. Soit $v \in \mathbb{R}^N$, montrer que $A_h v \geq 0$, $v \geq 0$.
4. On définit θ par :

$$\theta(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^2 \ln(1+x) + \frac{2}{3}(x^2 + 2x) \ln 2, \quad x \in]0, 1[.$$

(a) Montrer qu'il existe $C \geq 0$, indépendante de h tel que

$$\max \left| \frac{1}{h^2} (-\theta_{i-1} + 2\theta_i - \theta_{i+1}) + \frac{1}{2h(1+ih)} (\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) - 1 \right| \leq Ch^2,$$

avec $\theta_i = \theta(x_i)$.

(b) On pose $\theta_h = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$, montrer que $(A_h \theta_h)_i \geq 1 - Ch^2$.

(c) Montrer qu'il existe $M \geq 0$ ne dépend pas de h tel que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq M$.

5. Montrer la convergence, en un sens à définir, de u_h vers u .

Exercice 2.4. On s'intéresse au problème elliptique unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + (1+x^2)u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u'(0) + u(0) = 0, & u(1) = 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

On cherche une solution de (2.32) par la méthode de différences finies. Soit $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N+1}$.

1. Donner une discrétisation par différences finies en utilisant les approximations centrées aux points x_i , $i = 1, \dots, N$.
2. Etudier la consistance de ce schéma et déterminer son ordre si $f \in C^2([0, 1])$.
3. Prouver que ce système s'écrit sous la forme : $A_h U = F$.
4. Montrer que la matrice A_h est inversible.

Exercice 2.5. Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in]0, T[. \end{cases} \quad (2.33)$$

Où u_0 et ε sont donnés ($\varepsilon > 0$).

1. Donner un schéma d'approximation de (2.33) par différences finies centrées à pas constant en espace et Euler explicite en temps.
2. Ecrire la forme matricielle de ce schéma.
3. Montrer que l'erreur de consistance est majorée par $C(k + h^2)$, avec C dépendant de la solution exacte de (2.33).
4. Sous quelle condition sur k et h a-t-on $\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty, \forall n = 1, \dots, M$.
5. Donner un résultat de convergence pour ce schéma.

Exercice 2.6. Considérons le schéma suivant

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \gamma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0, \\ j = 1, \dots, N; n = 0, \dots, M. \end{cases}$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{1}{N+1}$ et u_j la valeur approchée de u au point $x_j = jh$ pour $j = 0, \dots, N+1$.

1. Etudier la consistance de ce schéma avec un problème à déterminer.
2. Dans la suite on va montrer que le schéma implicite vérifie le principe du maximum discret avec $V = 0$.

On impose des conditions aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire que la formule est valable pour $1 \leq j \leq N$ et on fixe $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit deux constantes $m \leq 0 \leq M$ telles que $m \leq u_j^0 \leq M$ pour $1 \leq j \leq N$.

- (a) Ecrire le système sous la forme matricielle $AU^{n+1} = U^n$.
- (b) Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.
- (c) Montrer que pour tous les temps $n \geq 0$ on a encore les inégalités $m \leq u_j^n \leq M$ pour $1 \leq j \leq N$ (par récurrence).

Exercice 2.7. *Monter que ce schéma est consistant avec un problème à déterminer.*

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{6 + 2\Delta x}{4(\Delta x)^2} u_{j+1}^n - \frac{6}{2(\Delta x)^2} u_j^n + \frac{6 - 2\Delta x}{4(\Delta x)^2} u_{j-1}^n = 0, j = 1, \dots, N; n = 0, \dots, M \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0; u_j^0 = u_0(x_j), j = 1, \dots, N; n = 0, \dots, M - 1. \end{cases} \quad (2.34)$$

Exercice 2.8. *Nous reprendrons le même problème dans l'exercice 2.5*

1. *Donner une discrétisation par différences finies en utilisant un schéma d'Euler implicite, puis donner la forme matricielle associée.*
2. *Etudier la consistance de ce schéma.*
3. *Monter que le schéma est stable sous la condition $\frac{k}{2h} < \frac{\varepsilon k}{h^2}$.*

Exercice 3.1. Soit le problème suivant

$$\begin{cases} y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2, & (x, y) \in \Omega =]0, 1[^2, \\ u = 0. & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1. Donner une discrétisation par différences finies centrée de ce problème en utilisant un maillage uniforme.
2. Ecrire le système obtenu pour $N = 3$, puis donner la forme matricielle.

Exercice 3.2. On considère le problème en dimension deux suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in]0, L[\times]0, L[, \\ u(x, 0) = u(x, L) = u(0, y) = u(L, y) = 0. \end{cases}$$

On suppose que la solution $u(x, y)$ est suffisamment régulière. On cherche à approcher cette solution par une méthode de différences finies. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{1}{N+1}$. On note $u_{i,j}$ la valeur approchée recherchée de u au point (ih, jh) pour $i, j = 0, \dots, N+1$.

1. Donner une discrétisation par différences finies de ce problème en utilisant le schéma centré.
2. Donner l'ordre de consistance de ce schéma.
3. Quel est le principe du maximum de ce schéma.

4. Montrer que $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}y^2$ est une solution exacte de l'équation

$$-\Delta u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -1.$$

5. Montrer que le schéma est stable au sens $\|u\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ sous la condition $\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} \geq 0$.

Exercice 3.3. On considère le problème en dimension 2 suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = 0, & \text{sur }]0, 1[\times]0, 1[\times]0, T[, \\ T(t, 0, y) = T(t, x, 0) = T(t, 1, y) = T(t, x, 1) = 0, \\ T(0, x, y) = T_0(x, y). \end{cases}$$

On suppose que la solution $T(t, x, y)$ est suffisamment régulière. On cherche à approcher cette solution par une méthode de différences finies. Soit $N, M \in (\mathbb{N}^*)^2$, $h = \frac{1}{N+1}$ et $k = \frac{T}{M}$. On note $T_{i,j}^n$ la valeur approchée recherchée de T au point (nk, ih, jh) pour $i, j = 0, \dots, N+1$; $k = 0, \dots, M$.

1. Donner une discrétisation par différences finies en utilisant le schéma d'Euler explicite en temps.
2. Ecrire la forme matricielle pour $N = 3$.
3. Montrer que le schéma obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance.
4. Montrer que ce schéma est stable et sous quelle condition.