**<u>UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI OUM EL BOUAGHI</u>**

DÉPARTEMENT L.M.D M.I
Méthodes Numériques pour EDO et EDP (S6-2021-2022)
**<u>Série n°1: Rappels sur</u>** Les équations de la physique Mathématiques.

**Exercice 1** ***1.*** *Pour chacune des équations aux dérivées partielles ci-dessous, indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est linéaire homogène ou non et son classement.*

*1.* $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ *2.* $-\frac{\partial y}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ *3.* $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ *4.* $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f(x,t)$ *5.* $x^2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-t^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ *6.* $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)^2=0$ *7.* $t\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial x}=0$ *8.* $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial x}=\sin(x)$.

***2.*** *Vérifier que les fonctions* $y(x,t)=x^2-t^2$ *et* $y(x,t)=e^x\sin(t)$ *sont bien des solutions de l'équation* $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$.

**Exercice 2** ***1.*** *Donner des exemples des EDP à coefficient constant complexe.*

***2.*** *Énoncer: Théorème le principe du maximum.*

***3.*** *Soit le système :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0, \\ y(0,t)=y(L,t)=0 \ \textit{ et } y(x,0)=f(x)\,,\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=g(x)\,. \end{cases}$$

*Quel phénomène est modélisé par ce système ?.*

**Exercice 3** *On considère léquation de Laplace en deux dimensions :*

$$y_{xx}+y_{tt}=0,\ \textit{avec } \Omega=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, \tag{1}$$

*avec conditions aux frontière :*

$$y(x,0)=\frac{1}{n}\cos(nx), x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^* \ \textit{ et } y_t(x,0)=0, x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

***1.*** *Comment définir un problème bien posé au sens de Hadamard.*

***(*)2.*** *Montrer que le problème (1)-(2) est mal posé.*

**Exercice 4** *(*)**1.*** *Déterminer la solution générale de* $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+y=0$ *où* $y=y(x,t)$.

*(*)**2.*** *Déterminer la solution générale de* $-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ *où* $y=y(x,t)$, *en utilisant les nouvelles coordonnées :* $\zeta=x+t$ *et* $\eta=x-t$.

*(*)**3.*** *Montrer en utilisant la règle de chaines que l'équation de la chaleur* $\frac{\partial y}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)$ *exprimée en coordonnées polaires :* $r=\sqrt{x^2+z^2},\theta=\arctan\left(\frac{z}{x}\right)$ *est* $\frac{\partial y}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$ *où* $y=y(x,z,t)=y(r,\theta,t)$.

**Exercice 5** *(*) Soit lEDP linéaire d'ordre deux suivante :* $t^2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2xt\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = x^2 t^2$.

*- Donner le type et les équations des courbes caractéristiques de cette équation.*

*- Par le changement* $X = x$ *et* $T = \frac{t}{x}$ *déduire la forme standard (canonique) de cette équation et déterminer la solution générale.*

**Exercice 6** *Résoudre l'équation de Laplace par la méthode de séparation des variables (ou méthode de Joseph Fourier):*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ Tqs: } 0 < x < L \text{ et } 0 < t < l, \\ y(0,t) = y(L,t) = 0 \text{ et } y(x,0) = 0, y(x,l) = \overline{y}. \end{cases}$$

**Exercice 7** *Résoudre l'équation de la chaleur suivante:*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \text{ Tqs: } 0 < x < L \text{ et } t > 0, \\ y(0,t) = y(L,t) = 0 \text{ (les conditions aux frontières)}, \\ y(x,0) = f(x) \text{ (la condition initiale)}. \end{cases}$$

$\alpha$ *est la constante de diffusion de la chaleur.*

**Exercice 8** *Résoudre l'équation Hyperbolique suivante:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \text{ Tqs: } 0 < x < L \text{ et } t > 0, \\ y(0,t) = y(L,t) = 0 \text{ et } y(x,0) = f(x), \frac{\partial y}{\partial t}\mid_{t=0} = g(x). \end{cases}$$

**Exercice 9** *Résoudre l'équation Elliptique par la méthode de séparation des variables:*

$$\begin{cases} \Delta y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ Tqs: } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < t < 1, \\ y(0,t) = y(1,t) = 0 \text{ et } y(x,0) = f(x), y(x,1) = 0. \end{cases}$$

*Où* $f$ *est une fonction arbitraire connue.*

**Exercice 10** *Résoudre l'équation parabolique suivante:*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 y}{\partial x^2};\ 0 < x < \pi, \\ \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(\pi,t) = 0 \text{ et } y(x,0) = f(x) \quad . \end{cases}$$

*Donner la solution dans le cas où* $f(x) = x$.

**Exercice 11** *Montrer que:* $y(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ *est la solution générale de l'équation hyperbolique:* $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

*Sachant que* $c^2 = 4$. *Trouver une solution qui satisfait* $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$ *avec* $y(x,0) = \sin x$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$.

Les questions (*) pour les étudiants