<u>UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI OUM EL BOUAGHI</u>

DÉPARTEMENT L.M.D M.I
Méthodes Numériques pour EDO et EDP (S6-2021-2022)
<u>Série n°3:</u> Méthodes Numériques pour EDP.

Exercice 1 ***Équation de Poisson.*** *Résoudre le problème suivant:*
$\frac{-d^2y}{dx^2} = 1, \Omega = [0,1]$ *avec* $y(0) = y(1) = 0$.

1. *En appliquant un schéma de différences finies centrées, déterminer la molécule de l'équation différentielle.*

2. *En choisissant un maillage avec un pas de* $h = 0,25$. *Calculer la distribution de températures. Comparer avec la solution exacte* $y(x) = \frac{-x^2+x}{2}$.

Exercice 2 ***Problème Elliptique (Problème de Dirichlet).*** *Une plaque mince rectangulaire* Ω_{abcd} *20cm×10cm est soumise aux températures de frontières par* $y_{ab} = 0°C$, $y_{bc} = 100°C$, $y_{cd} = 0°C$, $y_{ad} = 0°C$. *Sachant que le problème est régi par l'équation de Laplace, calculer la distribution de température dans la plaque. Prendre un maillage uniforme pour les cas suivants* $\Delta x = \Delta t = 5cm, \Delta x = \Delta t = 2.50cm$ *puis* $\Delta x = \Delta t = 1cm$. *Comparer avec la solution exacte.*

Exercice 3 ***Problème de Neumann et Dirichlet.*** *Résoudre le problème suivant:* $-\Delta y = -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 1$ *dans une plaque* Ω *rectangulaire* $3cm \times 1cm$. *Avec* $y(0,t) = 20°C$, $y(3,t) = 20°C$.
$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,1) = -15°C/cm$.

Donner la température dans une plaque Ω. *Prendre un pas uniforme* $h = \Delta x = \Delta t = 1cm$.

Exercice 4 ***Problème de Neumann.*** *Soit le problème suivant:*

$$-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 1 \quad dans \quad \Omega = [0,6] \times [0,2] \tag{1}$$

Avec $y(0,t) = 20°$ *Celsius,* $y(6,t) = 20°C$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,2) = -15°C/cm$.

Donner la température dans une plaque Ω. *Prendre un pas uniforme* $\Delta x = \Delta t = 2cm$ *[donner le maillage, la discrétisation "par un schéma de différences finies centrées" et les équations algébriques de l'équation de Poisson (1) "sous forme* $A \times y = b$*"].*

Exercice 5 ***Problèmes Paraboliques.*** *Résoudre par la méthode explicite le problème parabolique suivant:*
$\frac{\partial y}{\partial t} = 0.25\frac{\partial^2 y}{\partial x^2};\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq \frac{3}{2}$

a. *Conditions aux limites aux deux extrémités* $y(0,t) = y(2,t) = 0$, $t > 0$.

b. *Condition initiale* $y(x,0) = \begin{cases} 100x \quad si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 100(2-x) \quad si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

c. *Fixer* Δt *par la relation de convergence* $\frac{0.25\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$ *sachant que* $\Delta x = 0.5$

Exercice 6 *Résoudre le problème suivant:*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq 15, \ 0 \leq t \leq 5 \\ \textit{Condition initiale } y(x,0) = 2 \\ \textit{Conditions de frontières } y(0,t) = 0 \textit{ et } y(15,t) = 10 \\ \textit{Prendre } \Delta x = 5 \textit{ et } \Delta t = 2.5 \end{cases}$$

Exercice 7 ***Problèmes Hyperbolique.*** *Soit le problème Hyperbolique suivant:*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq t \leq 0.4$$

Avec les conditions aux limites $y(0,t) = y(1,t) = 0$. *Et les conditions initiales* $y(x,0) = \sin(\pi x)$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$ *à* $t = 0$ *pour* $0 \leq x \leq 1$.

1. *Résoudre par la méthode explicite en prenant* $\Delta x = \Delta t = 0.2$

2. *Montrer que les résultats obtenus sont les mêmes que ceux obtenus par la solution exacte* $y(x,t) = \sin(\pi x) \times \cos(\pi t)$.

Exercice 8 *On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout* $\mathbb{R}$ *(*$\alpha > 0$ *est donné):*

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \quad \textit{avec } y(x,0) = y_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas Δx *en espace et* Δt *en temps (schéma de Gear):*

$$\frac{3y_{i,j+1} - 4y_{i,j} + y_{i,j-1}}{2\Delta t} + \alpha\frac{-y_{i-1,j+1} + 2y_{i,j+1} - y_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

Note on pourra poser $r = \frac{2\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}$. *Analysez la stabilité du schéma par la méthode de Von Neumann.*

Exercice 9 *Montrer que le schéma implicite centré*

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha\frac{y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}}{2\Delta x} = 0$$

est consistant, précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace, inconditionnellement stable, donc convergent.

<u>UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI OUM EL BOUAGHI</u>

DÉPARTEMENT L.M.D M.I
Méthodes Numériques pour EDO et EDP (S6-2020-2021)
<u>Série n°4:</u> Méthodes Numériques pour EDP.

Exercice 10 *On considère l'intervalle* $\Omega =]0,1[$ *et on introduit l'espace* $V = \{w \in H^1(\Omega) \ \text{ et } w(0) = 0\}$.

Soient $f \in L^2(\Omega)$ *et deux réels* α, β *avec* $\alpha > 0$. *On pose* $a(u,v) = \int_\Omega u'(x)\, v'(x)\, dx + \alpha u(1)\, v(1)$ *et* $L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx + \beta v(1)$.

Pour tout $u, v \in V$. *On considère le problème suivant:*

$$\text{Trouver } y \in V \text{ tel que } a(y,u) = L(u), \forall u \in V. \tag{2}$$

On admet que ce problème est bien posé (cela se démontre par le théorème de Lax-Milgram).

1. Obtenir l'EDP dans Ω ***et les conditions limites satisfaites par la solution (2).***

On considère un maillage uniforme de Ω *de pas* $h = \frac{1}{n+1}$, n *entier positif fixé, et on pose* $x_i = ih$ *pour tout* $i \in \{0, \cdots, (n+1)\}$. *On note* V_h^1 *l'espace constitué des fonctions continues et affines par morceaux sur chaque intervalle* $[x_i, x_{i+1}]$

$V_h^1 = \left\{v_h \in \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right); \forall 0 \leq i \leq n, v_h\,|_{[x_i,x_{i+1}]} \in P_1\right\}$,

Et on désigne par $\{\phi_i\}_{0 \leq i \leq n+1}$ *les fonctions de bases de* V_h^1. *Il s'agit, pour* $1 \leq i \leq n$, *des fonctions chapeau vues en cours, alors que pour* $i \in \{0, \cdots, (n+1)\}$, *ces fonctions sont définies de manière analogue mais leur support est réduit à une maille. Par exemple,*

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_n}{h} & \text{si } x \in [x_n, x_{n+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On introduit enfin le sous-espace $\widetilde{V}$ *de* V_h^1 *tel que*

$\widetilde{V} = \{u_h \in V_h^1; u_h(0) = 0\}$.

2. Quelle est la dimension de $\widetilde{V}$? ***En préciser une base.*** *On assemble la matrice de rigidité* A *du problème (2) en utilisant cette base.* ***Préciser le terme générique de cette matrice*** *(sans le calculer).* ***Montrer enfin que la matrice*** A ***est définie positive.***

3. Identifier les coefficients non nuls de la matrice A***, puis calculer la valeur numérique de ceux-ci.***