Chapitre 4
Intégrales doubles

Prof. N. Merazga

6 mai 2024

Table des matières

Dans ce chapitre nous allons étendre la notion d'intégrale définie de Riemann aux intégrales doubles des fonctions continues de deux variables sur un domaine borné.

On munit le plan usuel $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1 Définitions et théorème de Fubini

Lemme 1 *Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux segments de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,*

- *Pour tout $x \in [a, b]$, la fonction partielle $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $[c, d]$;*
- *Pour tout $y \in [c, d]$, la fonction partielle $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $[a, b]$;*
- *Les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ et $y \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ sont continues et donc intégrables sur $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement.*

Théorème 1 (Théorème de Fubini sur un rectangle de $\mathbb{R}^2$) *Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ deux segments de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, on a*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

La valeur commune de ces deux intégrales itérées est appelée intégrale double de f sur le rectangle $[a,b]\times[c,d]$ et est notée $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy$ ou tout simplement $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$.

Exemple 1 Calcul de l'intégrale double $\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

La fonction $(x,y)\mapsto x^2y-1$ est continue sur $[-1,1]\times[0,1]$ comme fonction polynômiale.

$$\begin{aligned}\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 (x^2y-1)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} - y\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2}-1\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}-x\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Exemple 2 Calcul de l'intégrale double $\iint_{[0,1]\times[0,2]} x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

La fonction $(x,y)\mapsto x\mathrm{e}^{xy}$ est continue sur $[0,1]\times[0,2]$.

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,2]} x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^2 x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\mathrm{e}^{xy}\right]_{y=0}^{y=2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (\mathrm{e}^{2x}-1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}-x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Dans le cas où la fonction à intégrer f est le **produit** d'une fonction de x par une fonction de y, on a :

Corollaire 1 (Variables séparables) *Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ deux segments de $\mathbb{R}$, et soit $g : [a,b]\to\mathbb{R}$ et $h : [c,d]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

Exemple 3 Calcul de $\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos y\,\mathrm{d}y\right) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Définition 1 *Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ de la forme* ([1])

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\right\}, \tag{1}$$

(voir Fig. 1), *ou de la forme* ([2])

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, y \in [c,d] \quad \text{et} \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\right\}, \tag{2}$$

(voir Fig. 2)*, où φ_1 et φ_2 désignent deux fonctions réelles continues sur le segment $[a,b]$, vérifiant $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et où ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions réelles continues sur le segment $[c,d]$, vérifiant $\psi_1 \leq \psi_2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D.*

L'intégrale double de la fonction f sur D est le nombre réel noté $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ou $\iint_D f$ et défini par

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x, \qquad \textit{si } D \textit{ est de la forme } (1) \tag{3}$$

et

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y, \qquad \textit{si } D \textit{ est de la forme } (2). \tag{4}$$

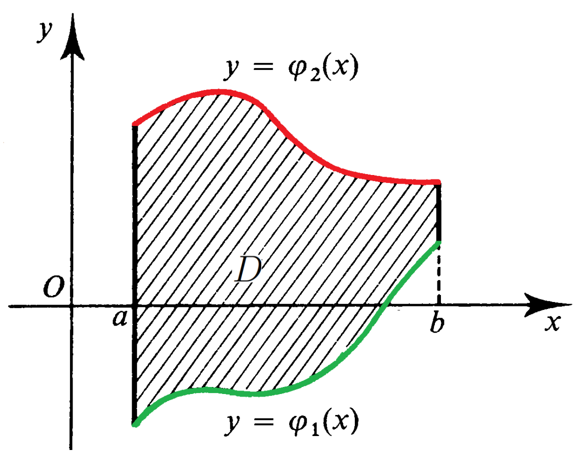


Fig. 1

[1] Un tel ensemble est dit être décrit par pile.

[2] Un tel ensemble est dit être décrit par tranche.

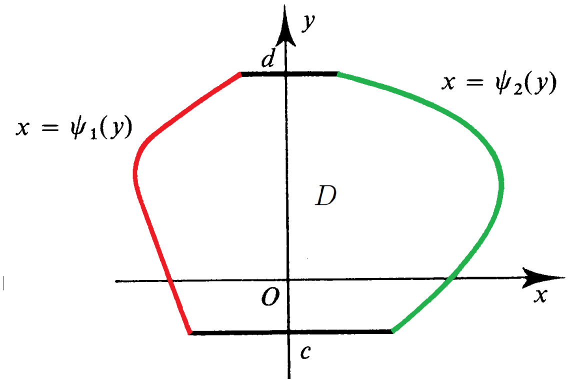


Fig. 2

Remarque 1 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ décrit par (1) ou (2) est clairement compact et n'a pas de trou.

Notation. On utilise souvent la notation suivante :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x, \\
\int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Théorème 2 (de Fubini) *Si D est un compact plan admettant à la fois une définition de la forme (1) et une définition de la forme (2)* (voir Fig. 3), *i.e.*

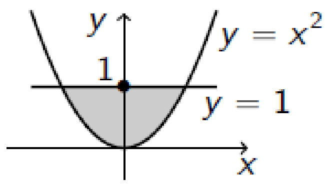
$$\begin{aligned}
D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, a \le x \le b \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, c \le y \le d \quad \text{et} \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\right\},
\end{aligned}$$

et si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\begin{aligned}
\iint_D f &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad (\textit{on intègre par rapport à } y \textit{ puis par rapport à } x) \\
&= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \quad (\textit{on intègre par rapport à } x \textit{ puis par rapport à } y).
\end{aligned}$$

L'ordre d'intégration est indifférent, et dans la pratique, on s'arrange pour intégrer dans un ordre qui facilite les intégrations.

Exemple 4 Calcul de l'intégrale double $\iint_D f$ où f est la fonction continue $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 y$ et D est la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas, et la droite $y = 1$ en haut.



<u>Première méthode</u>. On peut décrire D comme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ -1 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad x^2 \leq y \leq 1\right\},$$

d'où

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1} x^2 \left(\int_{x^2}^{1} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{y=1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2 - x^6)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{21}.\end{aligned}$$

<u>Deuxième méthode</u>. On voit que $x^2 \leq y \iff |x| \leq \sqrt{y} \iff -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$, d'où l'on peut affirmer que le domaine D est aussi caractérisé par

$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}. \end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 y \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 y \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 y^{5/2}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{7}y^{7/2}\right]_0^1 = \frac{4}{21}.\end{aligned}$$

On a bien trouvé le même résultat.

Définition 2 (Aire d'un domaine plan) *On appelle <u>aire</u> d'un domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par (1) ou (2), l'intégrale sur D de la fonction constante 1 :*

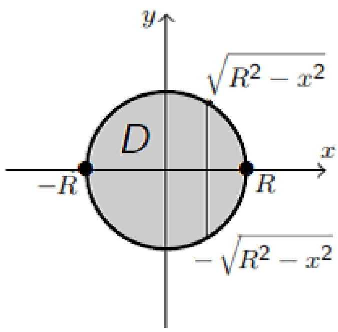
$$\text{Aire}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Cette définition correspond à la notion intuitive d'aire, comme le montrent les exemples suivants :

Exemple 5 Un rectangle $[a,b]\times[c,d]$ admet pour aire :

$$\text{Aire}\left([a,b]\times[c,d]\right)=\int_a^b\left(\int_c^d \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=(b-a)(d-c).$$

Exemple 6 L'aire du disque D centré en O et de rayon $R>0$ est πR^2. En effet :



$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x\in[-R,R]\quad\text{et}\quad-\sqrt{R^2-x^2}\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\right\}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D) &= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= 2R^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \left(\text{changement de variable } \frac{x}{R}=t\right)\\
&= 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad (\text{changement de variable } t=\sin\theta)\\
&= R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&= \pi R^2.
\end{aligned}$$

Définition 3 (Volume sous le graphe d'une fonction) *Soit f une fonction continue sur un domaine plan D défini par (1) ou (2). On définit :*

- *<u>Volume "algébrique"</u> sous le graphe de $f \overset{\text{déf}}{=} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;*
- *<u>Volume</u> sous le graphe de $|f| \overset{\text{déf}}{=} \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.*

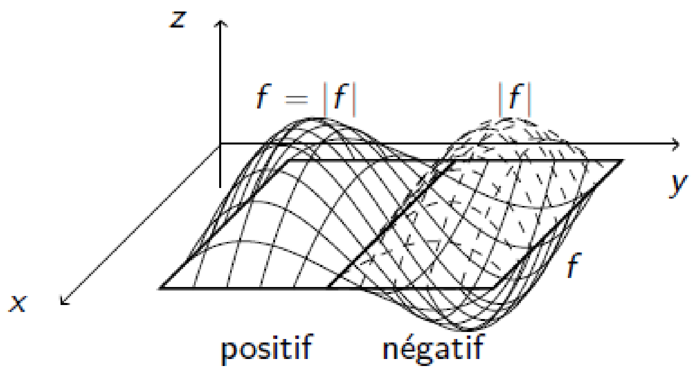


Fig. 3

Exemple 7 On veut calculer le volume du solide qui s'élève sur le domaine D du plan Oxy délimité par la droite d'équation $y = 2x$ et la parabole $y = x^2$ et couvert par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$.

Première méthode. Le domaine D peut être décrit par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 2, \ x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Le volume se calcule alors par

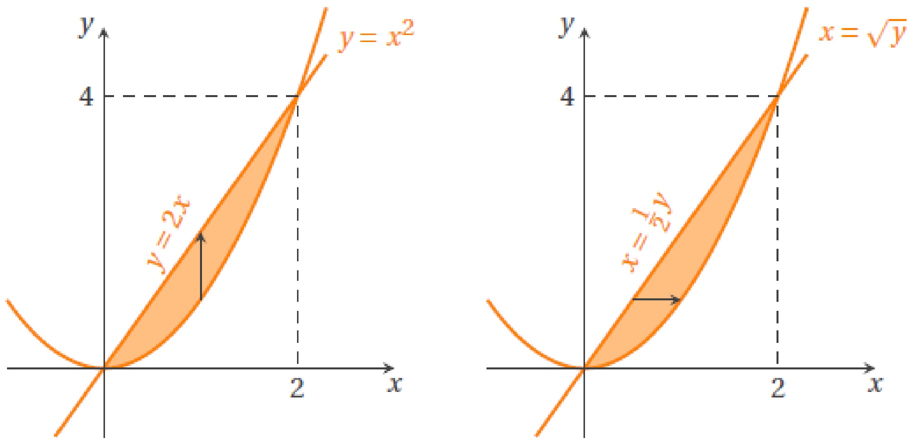
$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2(x^2) + \frac{(x^2)^3}{3}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 + \frac{x^6}{3}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{7x^4}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{216}{35}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode. Le domaine D peut être décrit par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq y \leq 4, \ y/2 \leq x \leq \sqrt{y}\right\}.$$

Le volume se calcule alors par

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \left(\frac{(\sqrt{y})^3}{3} + \sqrt{y}y^2 - \frac{(y/2)^3}{3} - (y/2)y^2\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{13y^3}{24}\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{2y^{5/2}}{15} + \frac{2y^{7/2}}{7} - \frac{13y^4}{96}\right]_{y=0}^{y=4} = \frac{216}{35}.
\end{aligned}$$



2 Propriétés générales des intégrales doubles

Dans tout ce qui suit, D est un domaine de $\mathbb{R}^2$ de la forme (1) ou (2) et f et g sont deux fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1 (Linéarité) *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\iint_D (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_D f + \mu \iint_D g.$$

Proposition 2 (Positivité) *Si f est une fonction positive sur D, i.e. telle que $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in D$, alors on a*

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0.$$

*Si de plus, D est d'**intérieur non vide**, l'intégrale $\iint_D f$ ne peut être nulle que si f est la fonction nulle.*

Cette proposition donne immédiatement lieu au corollaire suivant.

Corollaire 2

i) *Croissance. Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in D$, alors on a*

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_D g(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

ii) *Intégrale et valeur absolue. On a*

$$\left| \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \leq \iint_D |f(x, y)|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

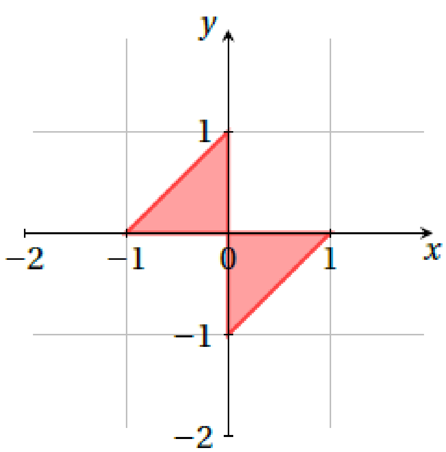
Proposition 3 (Additivité, Relation de Chasles) *Si D_1 et D_2 sont deux domaines bornés de la forme (1) ou (2) dont l'intersection des intérieurs est vide, $\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \varnothing$, et f est une fonction continue définie de $D_1 \cup D_2$ dans $\mathbb{R}$, alors*

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Définition 4 *On appelle compact simple de $\mathbb{R}^2$ toute* ***réunion finie de*** *compacts susceptibles de l'une des descriptions (1) ou (2) dont les intersections deux à deux est vide ou contenue dans leur bord (Autrement dit, les intérieurs des deux domaines ne se rencontrent pas).*

A la lumière de la proposition 3, pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un compact plan simple D, on décompose D, au moyen de parallèlles aux axes, en compacts élémentaires D_j susceptibles de l'une des définitions (1) ou (2), et on fera la somme des intégrales relatives à ces compacts.

Exemple 8 Calcul de l'intégrale double $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où l'ensemble d'intégration est colorié dans la figure ci-dessous.



On a $D = D_1 \cup D_2$ où

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ -1 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq x+1\right\}, \\ D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \leq x \leq 1,\ x-1 \leq y \leq 0\right\}. \end{aligned}$$

Comme $\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \varnothing$ et la fonction $(x, y) \mapsto xy$ est continue, on a

$$\begin{aligned}
\iint_D xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_1} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{0} \left(\int_0^{x+1} xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{0} xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x+1} \mathrm{d}x + \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=x-1}^{y=0} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 2x^2 + x \right) \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x \right) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=-1}^{x=0} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Le fait que le domaine d'intégration D soit défini par des inégalités larges signifie qu'il est fermé. Ceci n'est pas une obligation, et pour un domaine qui serait ouvert (inégalités strictes) ou ni ouvert ni fermé (il y a à la fois des inégalités trictes est des inégalités larges), l'intégrale double de f sur ce domaine est égale à l'intégrale double sur l'adhérence du domaine, comme le stipule le résultat suivant.

Proposition 4 *Pour un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$, dont l'adhérence $\overline{D}$ est un compact simple, et une fonction f continue sur $\overline{D}$, on a*

$$\iint_D f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\overline{D}} f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathring{D}} f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3 Changement de variables dans les intégrales doubles

3.1 Théorème de changement de variables

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, et soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ un C^1-difféomorphisme de U sur V (bijection de classe C^1 dont la réciproque est de classe C^1). Son jacobien au point $(u, w) \in U$ est noté

$$\det \mathbf{J}(\varphi)_{(u,w)} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{D}(\varphi_1, \varphi_2)}{\mathrm{D}(u, w)}(u, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1(u,w)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1(u,w)}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_2(u,w)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2(u,w)}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

On sait que dans ce cas, $\det \mathbf{J}(\varphi) : U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, qui ne prend pas la valeur 0.

On admet le théorème suivant, dit théorème de changement de variables.

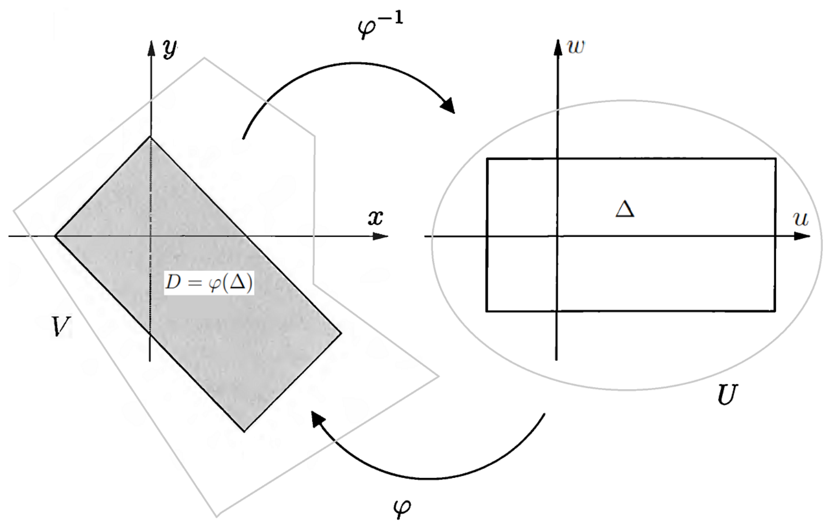
Théorème 3 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, φ un C^1-difféomorphisme de U sur V :*

$$\varphi : (u, w) \mapsto \varphi(u, w) = (x, y)$$

et Δ un compact simple de $\mathbb{R}^2$ inclus dans U.

Alors, pour toute fonction réelle f des variables x, y, définie et continue sur le compact $\varphi(\Delta)$, la fonction $(f \circ \varphi) |\det \mathbf{J}(\varphi)|$ de Δ dans $\mathbb{R}$ est continue, et l'on a la formule de changement de variables :

$$\iint_{\varphi(\Delta)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} f\left[\varphi(u, w)\right] |\det \mathbf{J}(\varphi)(u, w)|\, \mathrm{d}u\mathrm{d}w. \tag{5}$$



On a également la version suivante du théorème de changement de variables.

Théorème 4 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, φ un C^1-difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$:*

$$\varphi : (u, w) \mapsto \varphi(u, w) = (x, y)$$

et soit Δ un compact simple de $\mathbb{R}^2$ inclus dans $\overline{U}$. On suppose que φ et son jacobien $\det \mathbf{J}(\varphi)$ *sont prolongeables par continuité sur $\overline{U}$ (ou au moins sur Δ).*

Alors, pour toute fonction réelle f des variables x, y, définie et continue sur le compact $\varphi(\Delta)$, la fonction $(f \circ \varphi) |\det \mathbf{J}(\varphi)|$ est prolongeable par continuité sur Δ, et on a la formule de changement de variables :

$$\iint_{\varphi(\Delta)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} f\left[\varphi(u, w)\right] \left|\det \mathbf{J}(\varphi)_{(u,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}w. \tag{6}$$

3.2 Passage en coordonnées polaires (planes)

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ l'application qui définit les coordonnées polaires. Elle est de classe C^∞ et on a

$$\det \mathbf{J}(\Phi)_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Elle définit donc un C^∞–difféomorphisme sur tout ouvert U de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ sur lequel elle est injective, par exemple sur $U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$. Par ailleurs, Φ et son jacobien $\det \mathbf{J}(\Phi)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur $\overline{U} = [0, +\infty[\times [0, 2\pi]$. Par conséquent, pour tout compact simple $\Delta \subset \overline{U} = [0, +\infty[\times [0, 2\pi]$ et toute fonction réelle continue sur $\Phi(\Delta)$, on a d'après le théorème 4 :

$$\iint_{\Phi(\Delta)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} f(\Phi(r, \theta)) \left|\det \mathbf{J}(\Phi)_{(r,\theta)}\right| \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \iint_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Comme Φ est injective sur chaque ouvert $]0, +\infty[\times]a, a + 2\pi[$, $a \in \mathbb{R}$, la même conclusion subsiste pour tout compact simple $\Delta \subset [0, +\infty[\times [a, a + 2\pi]$.

Corollaire 3 *Soit* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la fonction* $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$*, et soit* a *un réel et* Δ *un compact simple de* $\mathbb{R}^2$ *inclus dans* $[0, +\infty[\times[a, a + 2\pi]$*. Si* f *est une fonction réelle continue sur* $\Phi(\Delta)$*, alors on a :*

$$\iint_{\Phi(\Delta)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Exemple 9 Retrouvons l'aire du disque D de centre O et de rayon $R > 0$ en faisant un passage aux coordonnées polaires.
On a :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

Puisque $x^2 + y^2 = r^2$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= \Phi^{-1}(D) \\ &= \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \ ; \ \Phi(r, \theta) \in D\} \\ &= \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \ ; \ r \leq R\} \\ &= [0, R] \times [0, 2\pi], \end{aligned}$$

d'où

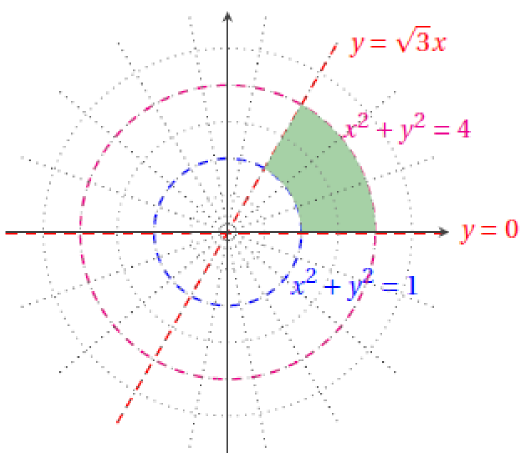
$$\mathrm{Aire}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r = \int_0^R 2\pi r\,\mathrm{d}r = \pi R^2.$$

Exemple 10 On veut intégrer la fonction continue $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ sur l'ensemble

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < y < \sqrt{3}x \ \text{ et } \ 1 < x^2+y^2 < 4\right\}.$$

Si on passe en coordonnées polaires on a

$$\begin{aligned} \Delta &= \Phi^{-1}(D) \\ &= \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] \ ; \ \Phi(r,\theta) \in D\} \\ &= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\ ; \ 1 < r < 2 \ \text{ et } \ 0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right\} \\ &=]1,2[\times \left]0,\frac{\pi}{3}\right[. \end{aligned}$$



On a donc

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dxdy &= \iint_\Delta \frac{1}{1+r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^2 \frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 \frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right) = \frac{\pi}{3}\left[\frac{\ln(1+r^2)}{2}\right]_1^2 = \frac{\pi \ln(5/2)}{6}. \end{aligned}$$