Appendice : Formules de Taylor pour des fonctions d'une variable réelle

Théorème A Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $F : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k ($k \in \mathbb{N}^*$), et a un point intérieur de I. Alors,

(i) Formule de Taylor avec reste de Lagrange : Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in I$, il existe un nombre réel $s \in]0,1[$ tel que

$$F(a+h) = F(a) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^j}{j!} F^{(j)}(a) + \frac{h^k}{k!} F^{(k)}(a+sh). \tag{RL}$$

(Notons que s dépend de a et de h).

(ii) Formule de Taylor avec reste intégral (de Laplace) : Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in I$, on a

$$F(a+h) = F(a) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^j}{j!} F^{(j)}(a) + \frac{h^k}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} F^{(k)}(a+th)\, dt. \tag{RI}$$

Remarque A. Le reste intégrale admet une autre expression. Plus précisément, on a l'égalité

$$\frac{h^k}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} F^{(k)}(a+th)\, dt = \int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^{k-1}}{(k-1)!} F^{(k)}(t)\, dt$$

qui découle d'un changement de variable $t \mapsto a + th$.

Théorème B (Formule de Taylor-Young à l'ordre k) Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $F : I \to \mathbb{R}$ une fonction k fois dérivable ($k \in \mathbb{N}^*$) sur I, et a un point intérieur de I. Alors, il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{t \to a} \varepsilon(t) = 0$ telle que pour tout $t \in I$:

$$F(t) = F(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{(t-a)^j}{j!} F^{(j)}(a) + (t-a)^k \varepsilon(t),$$

ou de façon équivalente, par changement de variable de t en $a + h$,

$$F(a+h) = F(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{h^j}{j!} F^{(j)}(a) + h^k\, \tilde{\varepsilon}(h), \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \tilde{\varepsilon}(h) = 0.$$

Remarque B. Dire que $\lim\limits_{h \to 0} \tilde{\varepsilon}(h) = 0$ signifie que le terme complémentaire $h^k\, \tilde{\varepsilon}(h)$ est négligeable devant h^k quand h tend vers 0. On peut donc écrire la formule de Taylor-Young sous la forme :

$$F(a+h) = F(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{h^j}{j!} F^{(j)}(a) + o\left(h^k\right). \tag{RY}$$

Remarque C. Les hypothèses du théorème de Taylor-Young sont plus faibles que celles du théorème A, mais on n'a pas d'expression précise pour le reste (on sait seulement qu'il est négligeable devant h^k au voisinage de 0).