Chapitre 1

Notions topologiques dans $\mathbb{R}^n$

12 février 2025

Table des matières

Dans tout ce chapitre, n est un entier naturel non nul.

1 Qu'est-ce que $\mathbb{R}^n$?

Nous commençons par une définition formelle de ce que nous entendons par $\mathbb{R}^n$.

Définition 1 *Le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n facteurs) composé de tous les n-uplets (ordonnés) $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, où $x_k \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq k \leq n$, est noté $\mathbb{R}^n$.*

Par $k-$ième composante (ou coordonnée) de x, on entend le nombre x_k.

Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels, $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des triplets de réels ...
On définit sur $\mathbb{R}^n$ une opération interne en posant :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \qquad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

et une opération externe en posant :

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On rappelle que, muni de ces deux opérations, $\mathbb{R}^n$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On notera $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, ..., 0)$ le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ et parfois simplement 0. Les n vecteurs $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ... , $\mathbf{e}_n = (0, ..., 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ appelée *base canonique*. Dans cette base, tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$x = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Notation. En général, on note en ligne les éléments de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, qu'on écrit, pour un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Mais dans certaines situations, il est plus pratique d'utiliser une notation de vecteur-colonne : en particulier en algèbre linéaire, lorsqu'on doit multiplier par une matrice un élément de $\mathbb{R}^n$, il vaudra mieux noter $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, la base canonique étant dans ce cas formée des vecteurs $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 Normes sur $\mathbb{R}^n$

L'introduction d'une norme sur $\mathbb{R}^n$ permet de donner un sens précis à l'expression "*x proche de y*" (lorsque x et y sont des points de $\mathbb{R}^n$) utilisée pour définir les notions de limite, continuité et dérivabilité des fonctions de plusieurs variables.

Définition 2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle norme sur E toute application de E dans $\mathbb{R}_+$, notée $x \mapsto \|x\|$, vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Séparation :* $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0,$

2. *Homogénéité :* $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|,$

3. *Inégalité triangulaire :* $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

   L'espace E muni de la norme $\|\cdot\|$ est dit espace normé et est noté $(E, \|\cdot\|)$.

Des trois propriétés ci-dessus, découlent les propriétés suivantes pour tous $x, y \in E$:

· $\|0\| = 0,$

· $\|-x\| = \|x\|,$

· $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ (seconde inégalité triangulaire).

Exemple 1 La fonction valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 (Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$) Sur $\mathbb{R}^n$, on utilise généralement trois normes dites normes usuelles définies respectivement pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ au moyen des formules :

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2} && \text{(norme euclidienne)},\\
\|x\|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |x_j| && \text{(norme de Manhatan)},\\
\|x\|_\infty &= \max_{1\leq j\leq n} |x_j| && \text{(norme du max)}.
\end{aligned}$$

La démonstration de l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne repose sur l'inégalité suivante

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Etant donné deux éléments $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}.$$

Définition 3 (Distance associée à une norme) *Etant donné une norme $\|\cdot\|$ sur E, on appelle distance associée à $\|\cdot\|$ l'application*

$$\begin{aligned}
d :\ E \times E &\to \mathbb{R}_+\\
(x, y) &\mapsto \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Définition 4 (Normes équivalentes) *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur E.*

On dit que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes s'il existe des constantes réelles α, β strictement positives telles que :

$$\forall x \in E : \quad \alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\| .$$

Proposition 2 *Si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux normes équivalentes sur un espace vectoriel E, alors les distances d et d' associées à ces deux normes sont métriquement équivalentes.*

On admet le résultat suivant.

Proposition 3 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

En particulier, sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes.

3 Suites dans $\mathbb{R}^n$

Ayant introduit les normes qui jouent dans $\mathbb{R}^n$ le rôle que joue la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, on peut définir la convergence d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ exactement de la même manière que dans $\mathbb{R}$, en remplaçant simplement la valeur absolue par une norme.

Définition 5 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On dit qu'une suite (x^m) d'éléments de E converge vers un élément $x \in E$, ou encore que (x^m) admet x pour limite et on écrit*

$$x^m \longrightarrow x \quad \text{quand } m \to \infty,$$

si

$$\lim_{m\to\infty} \|x^m - x\| = 0,$$

i.e., si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m \geq N : \quad \|x^m - x\| \leq \varepsilon.$$

Une suite (x^m) qui n'admet pas de limite est dite divergente.

Remarque 1 Le problème dans cette définition est que la limite dépend a priori de la norme dont l'espace E est muni. Ainsi, une suite peut converger vers une certaine limite pour une norme, et diverger pour une autre norme, ou encore converger vers une limite différente pour une troisième norme.
Toutefois lorsque deux normes sont équivalentes, on peut voir qu'une suite converge vers une certaine limite pour l'une des deux normes si et seulement si c'est aussi le cas pour l'autre. Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, la notion de limite dans $\mathbb{R}^n$, et la limite elle-même, ne dépendent pas de la norme utilisée. Grâce à cette remarque, on pourra parler de limite dans $\mathbb{R}^n$ sans préciser la norme avec laquelle on travaille.

Le choix particulier de la norme $\|\cdot\|_\infty$ montre que la convergence dans $\mathbb{R}^n$ équivaut à la convergence composante par composante :

Proposition 4 *Une suite de vecteurs $x^m = (x_1^m, ..., x_n^m)$ de $\mathbb{R}^n$ converge vers un vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, chaque composante de x^m converge vers la composante correspondante de x, i.e, si et seulement si, pour chaque k, la suite réelle $(x_k^m)_m$ converge vers le nombre réel x_k quand $m \to \infty$.*

Exemple 3 La suite $(x^m)_m$ de terme général

$$x^m = \left(\frac{1}{1+m}, 1+e^{-m}\right).$$

converge dans $\mathbb{R}^2$ vers le couple $(0,1)$ quand $m \to \infty$.

Comme pour les suites réelles, on démontre les propositions suivantes.

Proposition 5 *Dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, la limite d'une suite (x^m), si elle existe, est unique.*
On la note $\lim_{m\to\infty} x^m$.

Proposition 6 *Soient (x^m) et (y^m) deux suites d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, convergeant respectivement vers x et y. Alors, pour tous réels α et β, la suite $(\alpha x^m + \beta y^m)$ converge vers $\alpha x + \beta y$.*

Preuve. On a l'encadrement

$$0 \leq \|(\alpha x^m + \beta y^m) - (\alpha x + \beta y)\| \leq |\alpha| \, \|x^m - x\| + |\beta| \, \|y^m - y\|$$

et les propriétés des suites réelles montrent que le membre de droite tend vers 0 quand $m \to 0$. ■

Définition 6 *Soit* (x^m) *une suite d'un espace normé* $(E, \|\cdot\|)$*. On appelle sous-suite, ou suite extraite, de la suite* (x^m) *toute suite* (y^m) *de la forme* $y^m = x^{\varphi(m)}$ *où* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante.*

Autrement dit, c'est une suite obtenue de (x^m) en ne retenant que certains termes x^m, sans changer l'ordre dans lequel ils sont donnés.

Proposition 7 *Si* (x^m) *converge vers* x*, toute sous-suite de* (x^m) *converge aussi vers* x*.*

Remarque 2 La suite (x^m) peut très bien diverger et avoir des sous-suites convergentes. Par exemple, pour la suite divergente de terme général $x^m = (-1)^m$, les deux sous-suites (x^{2m}) et (x^{2m+1}) convergent.

Remarque 3 Ce résultat est une manière commode d'établir la divergence d'une suite : on met en évidence une sous-suite divergente ou deux sous-suites convergeant vers des limites différentes.

Définition 7 (Suite bornée) *Une suite* $(x^m)_m$ *d'éléments d'un espace normé* $(E, \|\cdot\|)$ *est dite bornée s'il existe un réel positif* M *tel que* $\|x^m\| \leq M$ *pour tout* m*.*

Définition 8 (Suite de Cauchy) *Une suite* $(x^m)_m$ *d'éléments d'un espace normé* $(E, \|\cdot\|)$ *est dite une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N : \quad \|x^p - x^q\| \leq \varepsilon.$$

On a les résultats suivants.

Proposition 8 *Toute suite convergente est de Cauchy, et toute suite de Cauchy est bornée.*

Proposition 9 *L'espace* $\mathbb{R}^n$*, muni d'une norme quelconque, est* <u>*complet*</u>*. Autrement dit, toutes les suites de Cauchy dans* $\mathbb{R}^n$ *sont convergentes.*

4 Ouverts, fermés et voisinages dans $\mathbb{R}^n$

Définition 9 (Boules, sphères) *On munit* $\mathbb{R}^n$ *d'une norme* $\|\cdot\|$*. Si* a *est un point de* $\mathbb{R}^n$ *et* r *est un nombre réel strictement positif, on appelle :*

– *<u>boule ouverte</u> de centre a et de rayon r, l'ensemble :*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x-a\| < r\}\,,$$

– *<u>boule fermée</u> de centre a et de rayon r, l'ensemble :*

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x-a\| \leq r\}\,,$$

– *<u>sphère</u> de centre a et de rayon r, l'ensemble :*

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x-a\| = r\}\,.$$

Exemple 4 Dans $\mathbb{R}$, on a

$$B(a,r) = \left]a-r, a+r\right[\,, \quad \bar{B}(a,r) = [a-r, a+r]\,, \quad S(a,r) = \{a-r, a+r\}\,.$$

Exemple 5 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, les boules $B(a,r)$ et $\bar{B}(a,r)$ sont respectivement les disques ouverts et fermés de centre a et de rayon r, la sphère correspondante étant le cercle de centre a et de rayon r. En effet, en notant $a = (a_1, a_2)$, on a

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} < r\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\right\}. \end{aligned}$$

Exemple 6 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme du max, la boule $B(a,r)$ représente l'intérieur du carré à côtés verticaux et horizontaux de longueur $2r$, centré en a et n'incluant pas la périphérie. En effet,

$$\|x-a\|_\infty < r \iff \max\left(|x_1-a_1|\,, |x_2-a_2|\right) < r \iff \left\{\begin{array}{l} |x_1-a_1| < r, \\ |x_2-a_2| < r. \end{array}\right.$$

Or, $|x_1-a_1| < r$ caractérise une bande verticale de largeur $2r$, limitée par les deux droites $x_1 = a_1 - r$ et $x_1 = a_1 + r$. De même, $|x_2 - a_2| < r$ caractérise une bande horizontale de largeur $2r$, limitée par les deux droites $x_2 = a_2 - r$ et $x_2 = a_2 + r$. L'intersection de ces deux bandes est un carré dont le centre est a.

Exemple 7 De même, dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$, la boule $B(a,r)$ représente l'intérieur du carré avec des diagonales verticale et horizontale de longueur $2r$, centré en a et n'incluant pas le périphérie.

Définition 10 (Parties ouvertes, parties fermées) *On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$.*

- *Une partie U de $\mathbb{R}^n$ est dite un ouvert (ou une partie ouverte) de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$.*
- *Une partie F de $\mathbb{R}^n$ est dite un fermé (ou une partie fermée) de $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus F$ dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.*

Exemple 8 Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$,

1. Toute boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert. En effet, étant donné $x \in B(a,r)$, on a pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ en vertu de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}(\|y-x\| < r - \|x-a\|) &\Longrightarrow (\|y-x\| + \|x-a\| < r)\\ &\Longrightarrow \|y-a\| < r\\ &\Longrightarrow y \in B(a,r)\end{aligned}$$

   et donc

$$B(x,s) \subset B(a,r) \quad \text{si } 0 < s \leq r - \|x-a\|\,.$$

2. Toute boule fermée $\bar{B}(a,r)$ est un fermé.
3. Toute sphère $S(a,r)$ est un fermé.

Exemple 9 Dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$,

1. Tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est un ouvert :
   - si I est borné, c'est une boule ouverte, donc un ouvert,
   - si $I =]a,+\infty[$ ou $I =]-\infty,a[$, alors pour tout $x \in I$, la boule ouverte $B(x,|x-a|) =]x-|x-a|\,, x+|x-a|[$ convient.
2. Tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé.
3. Tout intervalle de la forme $[a,b[$ ou $]a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $a < b$ n'est ni un ouvert ni un fermé.
4. $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide sont à la fois des ouverts et des fermés.

Exemple 10 Dans $\mathbb{R}^2$,

- l'ensemble $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ x > 0\}$ est un ouvert : c'est le demi-plan situé à droite de l'axe des ordonnées ($x = 0$) et n'incluant pas cet axe.

– l'ensemble $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq 0\}$ est un fermé.
– l'ensemble $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > y\}$ est un ouvert : c'est le demi-plan situé au dessous de la $1^{\text{ère}}$ bissectrice $y = x$ et n'incluant pas de cette droite.
– l'ensemble $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \leq y\} = \mathbb{R}^2 \setminus U_2$ est un fermé.

Proposition 10 (Propriétés des ouverts)

1. *$\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts.*
2. *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*
3. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Preuve. Les deux premières propriétés sont évidentes.
Pour la troisième, soient $(U_i)_{i=1,\dots,p}$ une famille finie d'ouverts et $U = \bigcap_{i=1}^{p} U_i$. Si $a \in U$, on peut trouver pour tout $i = 1, ..., p$, une boule ouverte $B(a, r_i)$ contenue dans U_i, avec $r_i > 0$. En prenant $r = \min(r_1, ..., r_p) > 0$, la boule $B(a, r)$ est alors contenue dans U. ■

Remarque 4 Attention, une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Par exemple,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

n'est pas un ouvert.

Par passage au complémentaire, les propriétés des ouvets donnent immédiatement :

Proposition 11 (Propriétés des fermés)

1. *$\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$ sont des fermés.*
2. *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*
3. *Une réunion finie de fermés est un fermé.*

Remarque 5 Attention, une réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé. Par exemple,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] =]-1, 1[$$

n'est pas un fermé.

Remarque 6 Dans $\mathbb{R}^n$, les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés sont l'ensemble vide $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathbb{R}^n$ est un espace connexe.

Exemple 11 Tout singleton dans $\mathbb{R}^n$ est un fermé. Donc, par réunion finie, *toute partie finie de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.*

Proposition 12 *Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une réunion de boules ouvertes.*

Exemple 12 Dans $\mathbb{R}^n$, les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$.

Définition 11 (Voisinage d'un point) *On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. Soient a un point de $\mathbb{R}^n$ et V une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$.*

Remarque 7 Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est voisinage de chacun de ses points.
En particulier, une boule centrée en a est un voisinage de a.

Remarque 8 Par la suite, on dira qu'une propriété est vraie *"au voisinage de a"* s'il existe un voisinage de a sur lequel elle est vraie. Par exemple, dire que *"$f \geq 0$ au voisinage de a"* signifie qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r)$ on ait $f(x) \geq 0$.

5 Position d'un point par rapport à une partie de $\mathbb{R}^n$

Définition 12 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.*

1. *On dit que a est un point intérieur à A, s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$, i.e. si A est un voisinage de a.*
   On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.
2. *On dit que a est un point adhérent à A, si toute boule centrée en a rencontre A (i.e. contient un point de A), soit*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A : \quad \|x - a\| < \varepsilon.$$

   On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.
3. *On dit que a est un point frontière de A si toute boule centrée en a rencontre à la fois A et le complémentaire de A.*
   On note ∂A l'ensemble des points frontières de A.

Exemple 13 Tout élément de A est évidemment un point adhérent à A, autrement dit $A \subset \overline{A}$.

Proposition 13 Dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\overline{B(a,r)} = \bar{B}(a,r), \quad \overset{\circ}{\widehat{\bar{B}(a,r)}} = B(a,r) \quad \text{et} \quad \partial\,(B(a,r)) = \partial\left(\bar{B}(a,r)\right) = S(a,r).$$

Proposition 14 *Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est fermée si, et seulement si, elle contient ses points adhérents, i.e. si $\overline{A} \subset A$.*

Preuve. Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$.

- Supposons F fermée. Soit $a \notin F$; comme le complémentaire de F est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r)$ ne rencontre pas F. Donc a n'est pas adhérent à F. Par contraposée, tout point adhérent à F est dans F.
- Supposons, réciproquement, que tout point adhérent à F soit dans F. Soit $a \in U = \mathbb{R}^n \setminus F$; alors a n'est pas adhérent à F, donc il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$. Donc U est un ouvert, et par conséquent F est fermée.

■

Exemple 14 Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Sa borne supérieure $a = \sup A$ est un point adhérent à A.
En effet, la caractérisation de la borne supérieure :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A : \quad a - \varepsilon < x \leq a$$

montre que toute boule ouverte $B(a,\varepsilon) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ rencontre A.

Il en est de même pour la borne inférieure d'une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$.

On en déduit que *toute partie non vide, fermée et majorée de $\mathbb{R}$ contient sa borne supérieure et que toute partie non vide, fermée et minorée de $\mathbb{R}$ contient sa borne inférieure.*

Proposition 15 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Le point a est adhérent à A si, et seulement si, il existe une suite $(x^m)_m$ d'éléments de A convergeant vers a.*

Une manière pratique de montrer qu'une partie est fermée est d'utiliser le résultat suivant.

Proposition 16 (Caractérisation séquentielle des fermés) *Une partie F de $\mathbb{R}^n$ est fermée si, et seulement si, pour toute suite de F qui converge (dans $\mathbb{R}^n$), sa limite appartient à F.*

Preuve. C'est une autre formulation de la proposition précédente, puisque l'ensemble des limites des suites convergentes de F est l'ensemble des points adhérents à F. ■

Définition 13 *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ si tout point de $\mathbb{R}^n$ est adhérent à A, i.e. si tout point de $\mathbb{R}^n$ est limite d'une suite d'éléments de A.*

Exemple 15 Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et un irrationnel, donc tout réel est adhérent à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Par conséquent, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

6 Parties bornées et parties compactes dans $\mathbb{R}^n$

Définition 14 (Partie bornée) *Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite bornée s'il existe un réel $M > 0$ tel que :*

$$\forall x \in A : \quad \|x\| \leq M,$$

autrement dit, si A est incluse dans une boule centrée en 0.

Exemple 16

- Toute boule est bornée car $B(a,r) \subset B\left(0, r + \|a\|\right)$ et $\bar{B}(a,r) \subset \bar{B}\left(0, r + \|a\|\right)$.
- Une partie est donc bornée si, et seulement si, elle est contenue dans une boule de centre arbitraire.
- Une sphère est bornée car $S(a,r) \subset \bar{B}(a,r)$.
- La réunion de deux (et donc d'un nombre fini de) parties bornées est bornée. En effet, si

$$\forall i = 1, ..., p, \ \exists\, M_i, \ \forall x \in A_i : \quad \|x\| \leq M_i$$

  alors,

$$\forall x \in \bigcup_{i=1}^{p} A_i : \quad \|x\| \leq M \quad \text{où } M = \max_{1 \leq i \leq p} M_i.$$

- L'intersection de parties bornées est bornée.

Définition 15 (Partie compacte d'un espace normé) *On dit qu'une partie K d'un espace normé E est <u>compacte</u> si toute suite de points de K admet une sous-suite convergente dans K.*

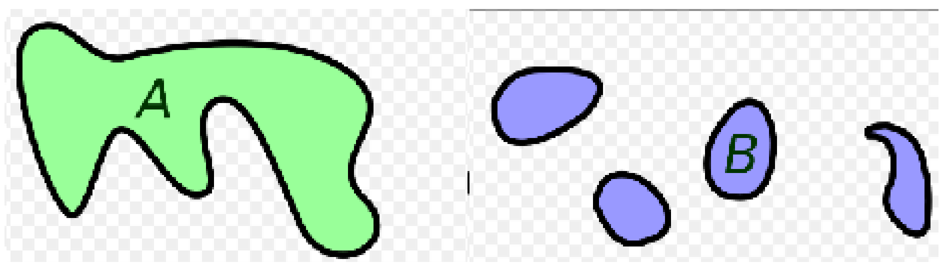
Théorème 17 (Heine–Borel) *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.*

7 Ouverts connexes dans $\mathbb{R}^n$

Définition 16 *Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dit connexe s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints. Autrement dit, s'il n'y a pas d'ouverts $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ tels que*

$$\begin{cases} U_1 \neq \varnothing, & U_2 \neq \varnothing \\ U_1 \cap U_2 = \varnothing & U_1 \cup U_2 = U. \end{cases}$$

De manière équivalente, U est connexe si pour toute décomposition $U = U_1 \cup U_2$, où $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ sont des ouverts disjoints, alors l'un des ouverts U_1, U_2 doit être vide.



L'ouvert vert A est connexe, alors que l'ouvert bleu B ne l'est pas.

Remarque 9 La connexité est une notion de topologie qui formalise le concept d'«objet d'un seul tenant». Un objet est dit connexe s'il est fait d'un seul «morceau». Dans le cas contraire, chacun des morceaux est une composante connexe de l'objet étudié.

Exemple 17 Dans $\mathbb{R}$,

- les ouverts connexes sont les intervalles ouverts,
- l'ouvert $]0,1[\cup]2,4[$ n'est pas connexe.

Exemple 18 Dans $\mathbb{R}^2$,

- l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > 0\}$ est connexe,
- l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x| > 0\}$ n'est pas connexe car c'est la réunion des ouverts disjoints non vides $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > 0\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x < 0\}$.

Exemple 19 Dans $\mathbb{R}^n$, toute boule ouverte est connexe.