4 Théorèmes fondamentaux du calcul différentiel

4.1 Théorème d'inversion locale

Définition 13 (Difféomorphisme) *Soient U et V deux ouverts (non vides) de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit qu'une fonction $f : U \to V$ est un difféomorphisme de classe C^k (ou un C^k-difféomorphisme) de U sur V si :*

i) *f est bijective de U sur V,*

ii) *f est de classe C^k sur U,*

iii) *f^{-1} est de classe C^k sur V.*

Exemple 26 La fonction trigonométrique tan est un C^1-difféomorphisme de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

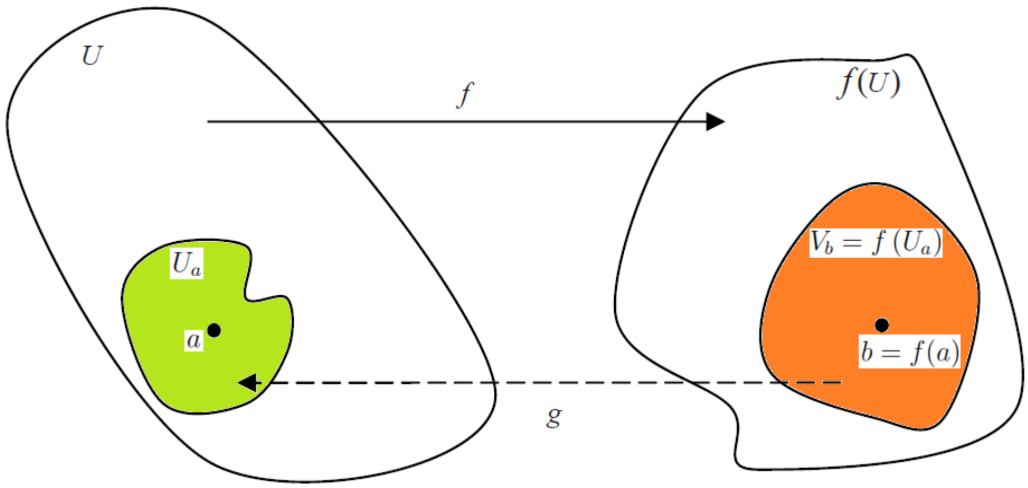
Par contre, la fonction polynômiale $x \mapsto x^3$ n'est pas un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bien que ce soit une bijection de classe C^1. En effet, sa réciproque $f^{-1} : y \mapsto \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$ n'est pas différentiable en $y = 0$ puisque

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y} = \frac{1}{y^{2/3}} \underset{y \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Etablir qu'une fonction f est un C^k-difféomorphisme à l'aide de la définition n'est pas simple en général. En effet, cela nécessite d'avoir une expression de la réciproque de f. Celle-ci n'est pas toujours disponible. Le théorème suivant permet de savoir si une fonction est un C^k-difféomorphisme sans avoir besoin d'expliciter sa réciproque.

Théorème 22 (d'inversion locale) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Si $a \in U$ est tel que $\det \mathbf{J}(f)_a \neq 0$, alors il existe un voisinage ouvert U_a de a contenu dans U et un voisinage ouvert V_b de $b = f(a)$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que la restriction de f à U_a soit un C^k-difféomorphisme de U_a sur V_b. De plus, on a pour tout $y \in V_b$*

$$\mathbf{J}(\left(f_{|U_a}\right)^{-1})_y = [\mathbf{J}(f)_x]^{-1} \qquad où \quad x := \left(f_{|U_a}\right)^{-1}(y).$$



Exemple 27 (Coordonnées polaires) Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction

$$\Phi : (r, \theta) \mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta).$$

La matrice jacobienne de cette fonction, au point (r, θ), a pour expression

$$\mathbf{J}(\Phi)_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Son jacobien $\det \mathbf{J}(\Phi)_{(r,\theta)} = r$ est donc non nul en tout point $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $r \neq 0$. d'après le théorème d'inversion locale, tout point $a_0 = (r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $r_0 \neq 0$ possède un voisinage ouvert U_{a_0} tel que $\Phi|_{U_{a_0}}$ soit un $C^\infty-$difféomorphisme de U_{a_0} sur un ouvert $\Phi(U_{a_0})$ de $\mathbb{R}^2$.

Le théorème d'inversion locale permet de déterminer si une fonction est un difféomorphisme local (i.e. au voisinage d'un point donné). Il existe une version de ce théorème qui permet d'établir la propriété de C^k-difféomorphisme sur la totalité du domaine U. C'est le théorème d'inversion globale.

Théorème 23 (d'inversion globale) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Si f est injective, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *Le jacobien de f ne s'annule pas sur U ;*

ii) *$f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f réalise un C^k-difféomorphisme de U sur $f(U)$. De plus, on a*

$$[\mathbf{J}(f)_x]^{-1} = \mathbf{J}\left(f^{-1}\right)_{f(x)} \qquad \forall x \in U.$$

L'intérêt du théorème d'inversion globale est qu'il dispense de déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f et d'établir qu'elle est de classe C^k sur $f(U)$.

Remarque 16 Il se peut que $\det \mathbf{J}(f)_x$ soit non nul pour tout $x \in U$ et que f ne soit pas injective (prendre par exemple $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)$, $\det \mathbf{J}(f)_{(x,y)} = \mathrm{e}^{2x} \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mais $f(0,0) = f(0,2\pi) = (1,0)$).

D'un point de vue pratique, pour montrer qu'une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ est un C^k-difféomorphisme, on vérifie que :

- la fonction f est de classe C^k sur U,
- le jacobien de f ne s'annule pas sur U,
- la fonction f est injective sur U,
- l'image de U par f est l'ouvert V.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Montrer qu'en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est un C^∞ difféomorphisme local.

2. L'application f est-elle un C^∞ difféomorphisme global ?

Solution.

1. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car ses fonctions composantes sont des fonctions polynômiales. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Le jacobien de f en (a,b) est égal à

$$\begin{vmatrix} 2a & -2b \\ 2b & 2a \end{vmatrix} = 4(a^2 + b^2) \neq 0.$$

Donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de (a,b) contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, un voisinage ouvert V de $f(a,b)$ dans $\mathbb{R}^2$, tel que la restriction de f à U soit un $C^\infty-$difféomorphisme de U sur V. Autrement dit, f est un $C^\infty-$difféomorphisme local en (a,b).

2. On remarque que $f(-x,-y) = f(x,y)$, la fonction f n'est donc pas injective, et par conséquent ce n'est pas un C^∞ $-$difféomorphisme global.

4.2 Théorème des fonctions implicites

4.2.1 Cas de deux variables

Une application du théorème d'inversion locale concerne le problème suivant : pour f fonction C^1 de deux variables, on considère l'équation $f(x,y)=0$ et on cherche à comprendre si cette équation est équivalente à $y=\varphi(x)$ où φ est une fonction d'une variable. On dit alors que $f(x,y)=0$ définit implicitement y, ou encore définit y comme fonction implicite de x.

Le théorème des fonctions implicites donne un résultat général allant dans ce sens. L'idée est que, si deux variables réelles x et y sont liées par une relation différentiable suffisamment régulière, alors l'une est fonction de l'autre, mais sans que l'on puisse donner explicitement cette fonction.

Théorème 24 (des fonctions implicites, version $\mathbb{R}^2$) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^k, $k\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$. Soit (x_0,y_0) un point de Ω tel que*

$$f(x_0,y_0)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0.$$

Alors, il existe un intervalle ouvert I contenant x_0, un intervalle ouvert J contenant y_0 et une fonction $\varphi: I\to J$ de classe C^k tels que :

i) $I\times J\subset\Omega$,

ii) *Pour $(x,y)\in I\times J$, on a l'équivalence :*

$$f(x,y)=0 \iff y=\varphi(x).$$

Autrement dit, pour tout $x\in I$, l'équation $f(x,y)=0$ d'inconnue y possède dans l'intervalle J une unique solution $y=\varphi(x)$.

En particulier, on a $f(x,\varphi(x,y))=0$ pour tout $x\in I$.

En outre, on peut choisir I et J de sorte que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne s'annule pas sur $I\times J$ et alors

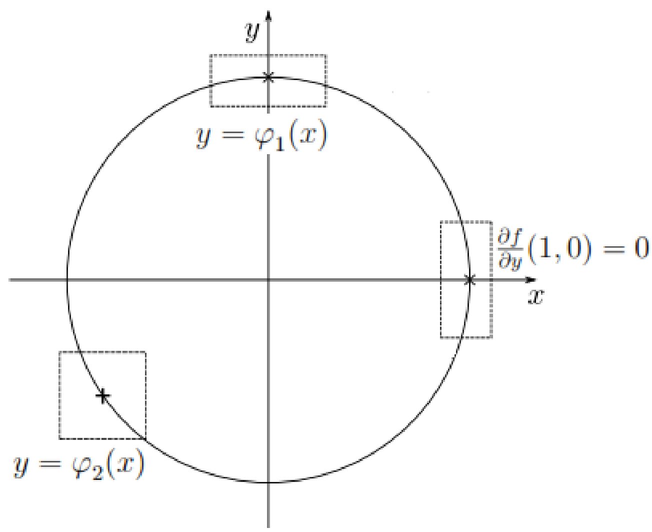
$$\forall x\in I: \quad \varphi'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}. \tag{23}$$

Remarque 17 On a ici un résultat particulièrement intéressant : bien que l'on ne connaisse pas φ, on est à même de calculer sa dérivée quand le théorème s'applique. Pour cela, il suffit de dériver l'identité $f(x, \varphi(x)) = 0$ dans I, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0, \quad \forall x \in I,$$

d'où la formule (23).

Exemple 28 Considérons la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 - 1$. C'est une fonction de classe C^∞. L'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation $f(x, y) = 0$ est le cercle C centré à l'origine et de rayon 1. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto 2y$ est non nulle en tout point de C sauf en $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Autour de tout point de C exceptés $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ on peut effectivement voir le cercle comme le graphe d'une fonction donnant y en fonction de x.



4.2.2 Cas de trois variables

Le théorème des fonctions implicites se généralise aux fonctions de plus de deux variables.

Théorème 25 (des fonctions implicites, version $\mathbb{R}^3$) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit (x_0, y_0, z_0) un point de Ω tel que*

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Alors, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant (x_0, y_0), un intervalle ouvert J contenant z_0 et une fonction $\varphi : U \to J$ de classe C^k tels que :

i) $U \times J \subset \Omega$,

ii) *Pour* $(x, y, z) \in U \times J$*, on a l'équivalence :*

$$f(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y).$$

Autrement dit, pour tout $(x, y) \in U$*, l'équation en* z : $f(x, y, z) = 0$ *admet dans l'intervalle* J *une unique solution* $z = \varphi(x, y)$*.*

En particulier, on a $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ *pour tout* $(x, y) \in U$*.*

En outre, on peut choisir U *et* J *de sorte que la dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial z}$ *ne s'annule pas sur* $U \times J$ *et alors*

$$\forall (x, y) \in U : \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}.$$

Remarque 18 Pour obtenir les dérivées partielles de *la fonction implicite* φ, il suffit de dériver par rapport à x et par rapport à y l'identité $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ dans U, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$.

Remarque 19 Le théorème des fonctions implicites se généralise aux cas des fonctions de plus de trois variables.

4.3 Formules de Taylor

Définition 14 *Etant donné deux points* x *et* y *de* $\mathbb{R}^n$*, on appelle* segment *d'extrémités* x *et* y *(dans cet ordre), l'ensemble noté* $[x, y]$ *:*

$$\begin{aligned} [x, y] &= \{x + t(y - x) \in \mathbb{R}^n \ ; \ t \in [0, 1]\} \\ &= \{(1 - t)x + ty \in \mathbb{R}^n \ ; \ t \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

4.3.1 Formules de Taylor du premier ordre

Pour $k = 1$, les formules de Taylor se réduisent aux théorèmes de la valeur moyenne.

Théorème 26 (de la valeur moyenne) *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soient $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ avec $h \neq 0$ tels que le segment $[a, a+h]$ soit contenu dans Ω. Alors*

i) *Théorème de la valeur moyenne : Il existe un nombre réel $s \in]0,1[$ tel que*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+sh)h_i = f(a) + \nabla f(a+sh) \cdot h.$$

ii) *Théorème de la valeur moyenne intégrale :*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)dt \right) h_i = f(a) + \int_0^1 \nabla f(a+th) \cdot h\, dt.$$

4.3.2 Formules de Taylor de second ordre

Pour $k = 2$, on obtient :

Théorème 27 (Formules de Taylor de second ordre) *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soient $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ avec $h \neq 0$ tels que le segment $[a, a+h]$ soit contenu dans Ω. Alors*

i) *Formule de Taylor avec reste de Lagrange : Il existe un nombre réel $s \in]0,1[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+sh)h_i h_j & (24) \\ &= f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h\, \mathbf{H}_f(a+sh)\, h^{\mathrm{t}}. & (25) \end{aligned}$$

où $\mathbf{H}_f(a+sh)$ est la matrice hessienne de la fonction f au point $a+sh$ et h^{t} est le vecteur transposé de h.

ii) *Formule de Taylor avec reste intégral :*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \int_0^1 (1-t) \left[h\, \mathbf{H}_f(a+th)\, h^{\mathrm{t}} \right] dt & (26) \\ &= f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)dt \right) h_i h_j. & (27) \end{aligned}$$

iii) *Formule de Taylor avec reste de Young :*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h\, \mathbf{H}_f(a)\, h^{\mathrm{t}} + o\left(\|h\|^2\right) \\ &= f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o\left(\|h\|^2\right) \qquad \text{lorsque } h \to 0. \end{aligned}$$

Exemple 29 Si $n = 2$ et f est de classe C^2 au voisinage de $a \in \Omega$, on obtient pour $h = (h_1, h_2)$ voisin de $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right) + o\left(\|h\|^2\right). \end{aligned}$$

4.3.3 Formule de Taylor d'ordre 3

Pour $k = 3$, on obtient la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 3 :

Théorème 28 (Formule de Taylor-Lagrange d'ordre 3) *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3. Soient $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ avec $h \neq 0$ tels que le segment $[a, a+h]$ soit contenu dans Ω. Alors,*

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h \, \mathbf{H}_f(a) \, h^{\mathrm{t}} + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,l=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(a + sh) h_i h_j h_l,$$

pour un certain $s \in]0,1[$.