

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

Limites & Continuité

4 mars 2025

Table des matières

1	Généralités	3
1.1	Notion de fonctions de plusieurs variables	3
1.2	Représentation graphique d'une fonction de plusieurs variables	5
1.2.1	Graphe d'une fonction de plusieurs variables	5
1.2.2	Courbes de niveau d'une fonction numérique de deux variables	8
1.3	Fonctions partielles associées à une fonction de plusieurs variables	8
2	Limites des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p	9
2.1	Définition et propriétés	10
2.1.1	Notion de Limite	10
2.1.2	Lien avec la notion de limite d'une suite.	11
2.1.3	Opérations sur les limites	11
2.1.4	Lien avec les fonctions composantes et les fonctions partielles	11
2.1.5	Théorème d'encadrement	12
2.1.6	Limite et bornitude de la fonction	12
2.2	Etude pratique des limites de fonctions numériques de plusieurs variables	13
2.2.1	Comment établir qu'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} n'a pas de limite?	13
2.2.2	Comment établir qu'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} a une limite?	16

3	Continuité des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p	17
3.1	Continuité en un point et continuité sur un ensemble	17
3.1.1	Définitions et premiers exemples	17
3.1.2	Critère séquentiel de la continuité	19
3.1.3	Opérations sur les fonctions continues	19
3.1.4	Lien avec la continuité des fonctions composantes et des fonctions partielles	21
3.1.5	Prolongement par continuité	23
3.1.6	Caractérisation topologique des fonctions continues	23
3.1.7	Continuité et compacité	24
3.2	Continuité uniforme	24

Introduction

Comment apparaissent les fonctions de plusieurs variables ?

Les fonctions sont utilisées pour modéliser certains phénomènes naturels ; mais pour cela les fonctions d'une variable ne suffisent pas, on a souvent besoin de fonctions de plusieurs variables. Pour s'en convaincre, on pourra évoquer les deux situations suivantes :

Première situation : Si vous voulez décrire le temps qu'il fait sur terre, à un moment donné (fixé), vous allez modéliser les grandeurs "pression" et "température" par des fonctions de deux variables : $P(x, y)$ et $T(x, y)$ qui varient en fonction de la position (x, y) (par exemple, x représente la longitude et y la latitude).

Bien sûr, pour être plus précis, il faudra introduire la variable altitude z ; pour décrire l'évolution de P et T au cours du temps, vous aurez besoin d'une quatrième variable, et P et T seront des fonctions de 4 variables (x, y, z, t) .

Deuxième situation : Supposons qu'une entreprise utilise n ingrédients différents pour fabriquer un produit alimentaire, que c_i est le coût unitaire du i -ième ingrédient, et qu'il faut x_i unités de ce i -ième ingrédient. Le coût total C des ingrédients est alors une fonction des n variables x_1, \dots, x_n :

$$C = f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Ce chapitre introduit les fonctions de plusieurs variables réelles à valeurs scalaires ou vectorielles ainsi que les notions de "limite" et de "continuité" pour ces fonctions. Tout au long du chapitre, n, p et q sont trois entiers naturels non nuls.

1 Généralités

1.1 Notion de fonctions de plusieurs variables

Une fonction vectorielle de n variables réelles ou fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , f , est une règle qui à chaque n -uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ associe un unique p -uplet dans \mathbb{R}^p noté $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Le p -uplet $f(x)$ sera parfois noté

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

où pour tout $j = 1, \dots, p$, f_j est une fonction de D dans \mathbb{R} appelée la $j^{\text{ième}}$ **fonction composante (ou coordonnée)** de f . Cela se note

$$\begin{aligned} f : \quad D \subset \mathbb{R}^n &\quad \rightarrow \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\quad \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

L'ensemble D est appelé le domaine (de définition) de f , et l'ensemble des valeurs prises par f est appelé l'image de f et est noté $R_f = \{f(x) ; x \in D\}$.

Le plus souvent, comme dans le cas des fonctions d'une seule variable, on donne f par une formule de calcul sans préciser son domaine, celui-ci est entendu comme étant l'ensemble des n -uplets de réels pour lesquels cette formule a un sens.

Lorsqu'il s'agit d'une fonction de 2 ou 3 variables, il est d'usage de noter x et y (et z) au lieu de x_1 et x_2 (et x_3).

Exemple 1 La fonction

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\quad \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\quad \mapsto \left(\frac{y^3 - x \cos(x + y)}{z^2}, \ln(x) + \frac{\pi}{2} - z \right) \end{aligned}$$

est une fonction de trois variables réelles à valeurs dans \mathbb{R}^2 , dont le domaine de définition est $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Les fonctions composantes de f sont les fonctions :

$$f_1 : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{y^3 - x \cos(x + y)}{z^2},$$

$$f_2 : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \ln(x) + \frac{\pi}{2} - z.$$

Exemple 2 Soit la fonction f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin z.$$

L'expression pour $f(x, y, z)$ est définie tant que $z - y > 0$, de sorte que le domaine de f est

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z > y\}.$$

C'est le demi-espace constitué de tous les points situés au dessus du plan $z = y$ et ne contenant aucun point de ce plan.

Exemple 3 Calculons $f(3, 2)$ et trouvons le domaine de la fonction suivante

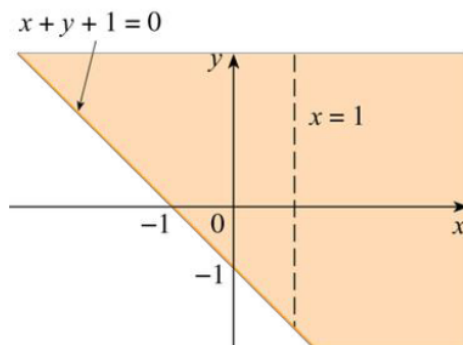
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}.$$

On a $f(3, 2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

L'expression de f a un sens si le dénominateur n'est pas nul et si le radicande n'est pas négatif. Le domaine de f est donc

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x + y + 1 \geq 0 \text{ et } x \neq 1\}.$$

L'inégalité $x + y + 1 \geq 0$, ou encore $y \geq -x - 1$, décrit les points situés sur la droite $y = -x - 1$ ou au dessus de cette droite, tandis que $x \neq 1$ signifie que les points sur la droite $x = 1$ doivent être exclus du domaine (voir la figure ci-dessous).



Le domaine de définition D de f est la partie colorée privée de la droite en pointillés $x = 1$.

1.2 Représentation graphique d'une fonction de plusieurs variables

1.2.1 Graphe d'une fonction de plusieurs variables

Définition 1 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction. On appelle graphe de f l'ensemble

$$G = \{(x, f(x)) ; x \in D\} = \{(x, y) ; x \in D \text{ et } y = f(x)\}.$$

C'est un sous-ensemble de $D \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{n+p}$.

- Pour $n = p = 1$ (fonction scalaire d'une variable réelle), G est l'ensemble

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in D \text{ et } y = f(x)\}$$

qui se représente par une courbe dans le plan \mathbb{R}^2 .

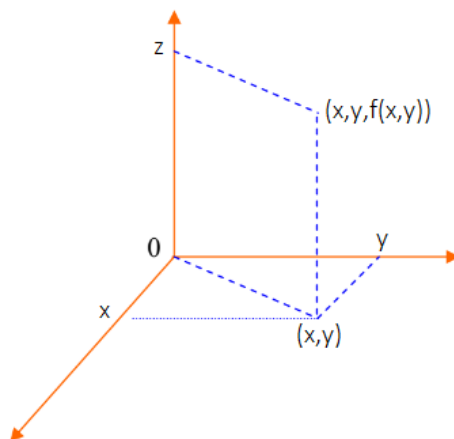
Le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est une courbe dans \mathbb{R}^2 , une parabole.

- Pour $n = 2$ et $p = 1$ (fonction scalaire de deux variables réelles), G est l'ensemble

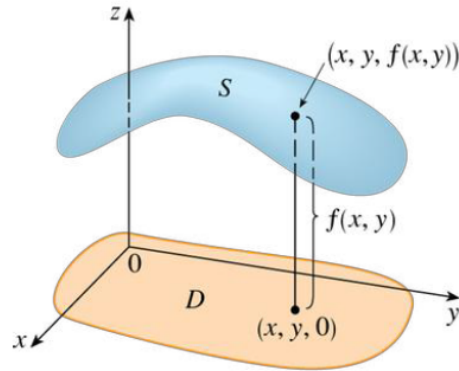
$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y) \in D \text{ et } z = f(x, y)\} \\ &= \{(x, y, f(x, y)) ; (x, y) \in D\}. \end{aligned}$$

A chaque point $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ correspond un seul point (x, y, z) sur la surface G .

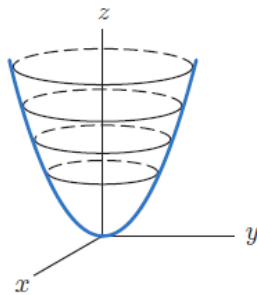
Voici comment on place les points dans un repère à trois dimensions.



A cet effet, G se représente par une surface S dans \mathbb{R}^3 dessinée au dessus du domaine D :



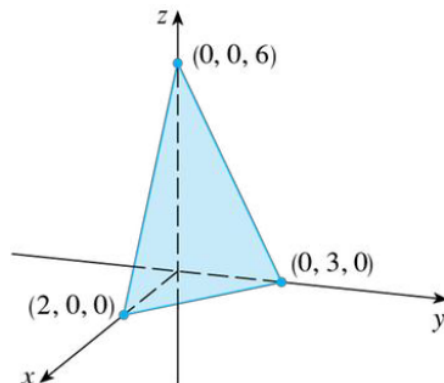
Le graphe de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est une surface dans \mathbb{R}^3 , un parabololoïde :



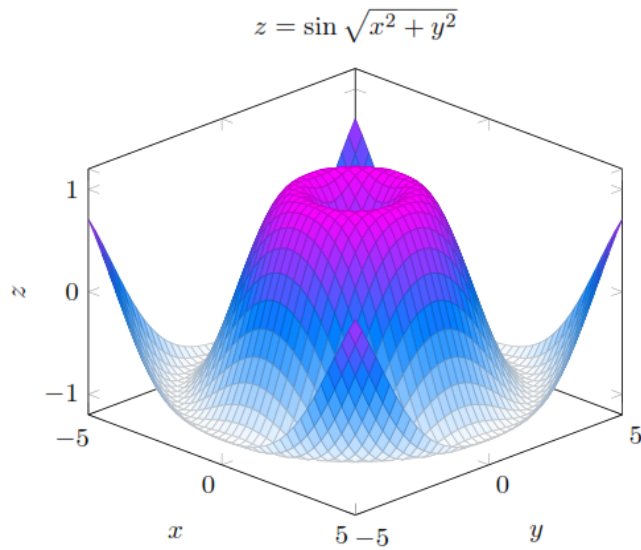
Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Exemple 4 Traçons le graphe de la fonction $f : (x, y) \mapsto 6 - 3x - 2y$.

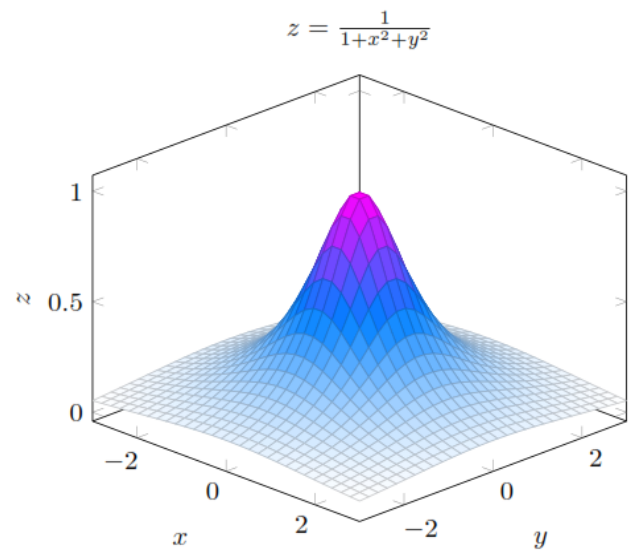
L'équation du graphe de f est $z = 6 - 3x - 2y$ ou $3x + 2y + z = 6$, qui est celle d'un plan. Pour représenter graphiquement ce plan, on doit d'abord trouver ses intersections avec les axes de coordonnées. En posant $y = z = 0$ dans l'équation, on obtient l'intersection $x = 2$ avec l'axe des x . De même, l'intersection avec l'axe des y est 3, et l'intersection avec l'axe des z est 6. Cela nous permet de tracer la partie du graphe située dans le premier octant (voir la figure ci-dessous).



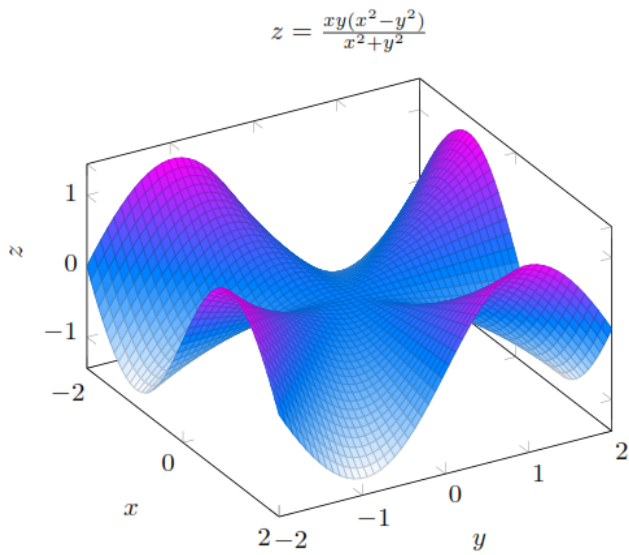
Voici quelques exemples de graphes de fonctions de 2 variables :



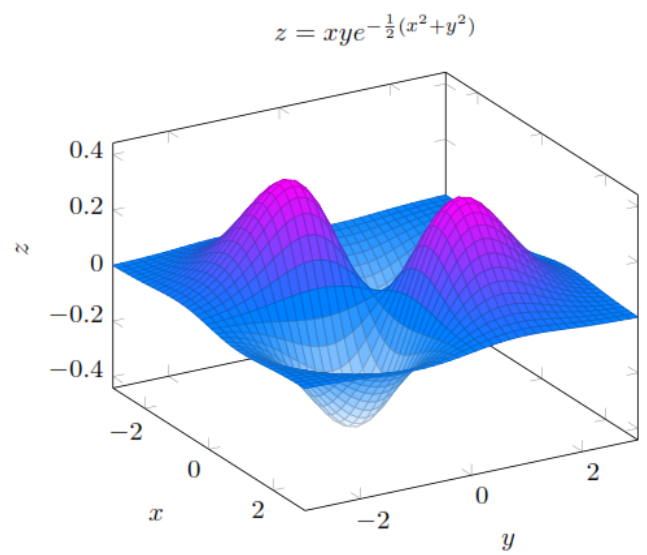
(a) Circular sine wave



(b) Inverse quadratic surface



(c) Saddle function



(d) Exponential saddle

- Pour $n \geq 3$, la représentation graphique de G est impossible, car son graphe est contenu dans un espace à plus de 3 dimensions.

1.2.2 Courbes de niveau d'une fonction numérique de deux variables

Définition 2 Soit f une fonction de deux variables et k une constante réelle (dans l'image R_f de f). On appelle courbe (ou ligne) de niveau de f de hauteur k , l'ensemble de tous les points (x, y) du domaine D de f en lesquels f prend la valeur donnée k :

$$C_k = \{(x, y) \in D ; f(x, y) = k\}.$$

En d'autres termes, elle montre où le graphe de f a une hauteur k .

Exemple 5 Les courbes de niveau de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ de hauteurs $k, k \geq 0$, sont les cercles $x^2 + y^2 = k$ centrés à l'origine et de rayons \sqrt{k} .

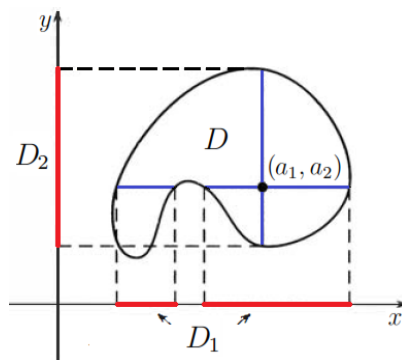
1.3 Fonctions partielles associées à une fonction de plusieurs variables

Considérons d'abord le cas d'une fonction scalaire de deux variables $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Etant donné un point $a = (a_1, a_2) \in D$, on définit les parties D_1 et D_2 de \mathbb{R} par :

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R} ; (x, a_2) \in D\},$$

$$D_2 = \{y \in \mathbb{R} ; (a_1, y) \in D\}.$$



Les fonctions φ_1 et φ_2 définies par :

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1 : D_1 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t, a_2) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} \varphi_2 : D_2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a_1, t) \end{array}$$

sont appelées les **fonctions partielles** associées à f au point $a = (a_1, a_2)$.

Exemple 6 Soit la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{x^2 - y^2}$ définie sur

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - y^2 \geq 0\}.$$

- Au point $a = (2, 1)$, les fonctions partielles $\varphi_1 : t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}$ et $\varphi_2 : t \mapsto \sqrt{4 - t^2}$ sont définies respectivement sur :

$$D_1 =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \quad D_2 = [-2, 2].$$

- Au point $a = (0, 0)$, la première fonction partielle $\varphi_1 : t \mapsto \sqrt{t^2} = |t|$ est définie sur \mathbb{R} , alors que la deuxième fonction partielle $\varphi_2 : t \mapsto \sqrt{-t^2}$ n'est définie qu'en 0.

Plus généralement,

Définition 3 (Fonctions partielles) Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point adhérent à D . Pour tout $j = 1, \dots, n$, on appelle $j^{\text{ième}}$ fonction partielle de f en a , la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_j^a : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ t &\mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

définie sur

$$D_j = \{t \in \mathbb{R} ; (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \in D\}.$$

Exemple 7 Soit $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_1 + \dots + x_n \in \mathbb{R}$.

- La $j^{\text{ième}}$ fonction partielle de f en $0 = (0, \dots, 0)$ est la fonction $\varphi_j^0 : t \mapsto t$ définie sur $D_j = \mathbb{R}$.
- La $j^{\text{ième}}$ fonction partielle de f en $a = (1, \dots, 1)$ est la fonction $\varphi_j^a : t \mapsto t + (n - 1)$ définie sur $D_j = \mathbb{R}$.

2 Limites des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p

La notion de limite s'étend à des fonctions de plusieurs variables. En outre bon nombre de propriétés de la limite connues pour les fonctions d'une variable seront encore valables ici.

Dans tout ce qui suit, D est une partie non vide de \mathbb{R}^n et f est une fonction définie sur D à valeurs dans \mathbb{R}^p .

2.1 Définition et propriétés

2.1.1 Notion de Limite

Définition 4 Soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point adhérent à D . On dit que f admet une limite en a (ou quand $x \in D$ tend vers a) s'il existe un point ℓ de \mathbb{R}^p tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Le point ℓ est appelé limite de f en a , et on note

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

ce qui se lit " $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a ".

Remarque 1 En raison de l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie, l'existence et la valeur de la limite d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ en un point ne dépend pas du choix des normes choisies sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p .

Proposition 1 Si la fonction f admet une limite en un point $a \in \overline{D}$, alors cette limite est unique.

Il est alors légitime d'utiliser la notation $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Exemple 8 Montrons que la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \in \mathbb{R}$ admet pour limite 0 en $(0, 0)$.

Compte tenu de l'inégalité $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \|(x, y)\|_2^2$, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\|(x, y)\|_2} \leq \frac{1}{2} \|(x, y)\|_2.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x, y) - 0| \leq \varepsilon$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\|(x, y)\|_2 \leq 2\varepsilon := \delta$. D'après la définition, cela indique que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

Exemple 9 Pour montrer que la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{(x + y)^2}{|x| + |y|}$ admet pour limite 0 en $(0, 0)$, il est préférable d'utiliser la norme $\|\cdot\|_1$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$|f(x, y) - 0| = \frac{|x + y|^2}{|x| + |y|} \leq \frac{(|x| + |y|)^2}{|x| + |y|} = |x| + |y| = \|(x, y)\|_1.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x, y) - 0| \leq \varepsilon$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\|(x, y)\|_1 \leq \varepsilon$. D'après la définition, cela indique que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

2.1.2 Lien avec la notion de limite d'une suite.

Le résultat suivant relie limite d'une fonction et limite d'une suite.

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle des limites) *Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p définie sur D et a un point adhérent à D . Alors, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u^m)_m$ d'éléments de D , convergente dans \mathbb{R}^n vers a , la suite $(f(u^m))_m$ converge dans \mathbb{R}^p vers ℓ .*

2.1.3 Opérations sur les limites

Proposition 3 (Opérations algébriques sur les limites) *Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , définies au voisinage d'un point a , et admettant pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 en a . Alors :*

1. Linéarité : pour tous λ, μ réels, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet une limite en a , et on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \ell_1 + \mu \ell_2 ;$$

Dans le cas où f et g sont des fonctions scalaires ($p = 1$), on a :

2. fg admet une limite en a , et on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \ell_1 \ell_2 ;$$

3. Si $\ell_2 \neq 0$, $\frac{f}{g}$ admet une limite en a , et on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

2.1.4 Lien avec les fonctions composantes et les fonctions partielles

Proposition 4 *Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p et soient f_1, \dots, f_p ses fonctions composantes. On note $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in \mathbb{R}^p$. On a l'équivalence suivante :*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \left(\forall j = 1, \dots, p : \lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = \ell_j \right).$$

L'immense intérêt de cette propriété est de permettre de ramener l'étude de la limite de toute fonction à valeurs dans \mathbb{R}^p à celle de p fonctions scalaires (à valeurs dans \mathbb{R}) ce qui est à priori plus simple.

Proposition 5 *Si une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ admet pour limite ℓ en $a = (a_1, \dots, a_n) \in \overline{D}$ alors les fonctions partielles*

$$\varphi_j^a : t \in D_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

admettent toutes pour limite ℓ lorsque t tend vers a_j .

Remarque 2 La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse. Même si toutes les fonctions partielles ont la même limite ℓ , on ne peut rien conclure quant à l'existence d'une limite pour f , comme on peut le voir sur l'exemple suivant. Toutefois, on peut affirmer que si f a une limite en a , cette limite est obligatoirement ℓ .

Exemple 10 La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ admet pour fonctions partielles en $(0, 0)$:

$$\varphi_1^{(0,0)} : x \in \mathbb{R}^* \mapsto f(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_2^{(0,0)} : y \in \mathbb{R}^* \mapsto f(0, y) = 0$$

qui ont une limite nulle en $x = 0$ et $y = 0$ respectivement. Or, on verra dans l'exemple 14 que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

2.1.5 Théorème d'encadrement

Théorème 1 (d'encadrement) *Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur une partie D de \mathbb{R}^n et vérifiant au voisinage d'un point $a \in \overline{D}$ la double inégalité*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si f et h admettent la même limite ℓ en a , alors g admet ℓ pour limite en a .

2.1.6 Limite et bornitude de la fonction

Définition 5 *Une fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p définie sur D est dite bornée si l'ensemble $f(D)$ est borné dans \mathbb{R}^p , i.e. si*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D : \|f(x)\| \leq M.$$

Proposition 6 Si f admet une limite en $a \in \overline{D}$, alors f est bornée au voisinage de a , i.e.

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \exists r \in \mathbb{R}_+, \forall x \in B(a, r) \cap D : \|f(x)\| \leq M.$$

Exemple 11 La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x+y}$ définie sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, -x) ; x \in \mathbb{R}\}$ n'est bornée sur aucun voisinage de $a = (0, 0)$ puisque pour tout $r > 0$ et tout $M > 0$, le couple (x, y) avec $x = y = \frac{1}{2} \min(r, \frac{1}{M})$ vérifie $\|(x, y)\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}r < r$ i.e. $(x, y) \in B_2(0, r)$ et $|f(x, y)| \geq M$. On en déduit que f n'a pas de limite en 0.

2.2 Etude pratique des limites de fonctions numériques de plusieurs variables

2.2.1 Comment établir qu'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} n'a pas de limite ?

Utilisation des fonctions partielles A la lumière de la proposition 5, pour montrer qu'une fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} n'a pas de limite en $a = (a_1, \dots, a_n)$, il suffit :

- de montrer qu'une des fonctions partielles φ_j^a n'a pas de limite en a_j ;
- ou bien que deux fonctions partielles φ_j^a et φ_i^a n'ont pas la même limite en a_j et a_i respectivement.

Exemple 12 La fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{\cos x \sin y}{x^2 + y^2}$ n'a pas de limite en $(0, 0)$ car la deuxième fonction partielle en $(0, 0)$:

$$\varphi_2^{(0,0)} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(0, t) = \frac{\sin t}{t^2} = \frac{1}{t} \frac{\sin t}{t}$$

n'a pas de limite en $t = 0$.

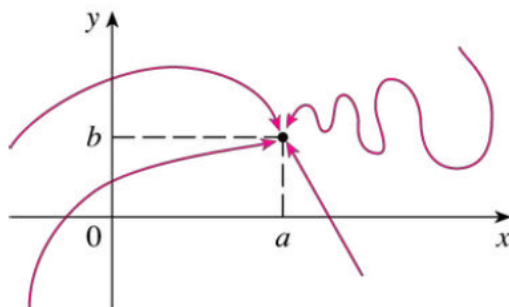
Exemple 13 La fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ n'a pas de limite en $(0, 0)$ car les fonctions partielles en $(0, 0)$ qui sont

$$\varphi_1^{(0,0)} : t \in \mathbb{R}^* \mapsto f(t, 0) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_2^{(0,0)} : t \in \mathbb{R}^* \mapsto f(0, t) = -1$$

ont pour limites respectives 1 et -1 en $t = 0$.

Utilisation de deux chemins différents Dans le cas d'une fonction d'une seule variable, on peut faire tendre x vers a selon une seule direction.

Dans le cas de fonctions de plusieurs variables, la situation n'est pas aussi simple puisqu'on peut faire tendre x vers a selon un nombre infini de trajectoires (voir la figure ci-dessous pour le cas de deux variables) pourvu que x reste dans le domaine de f .



La définition 4 de la limite de f en a ne fait intervenir que la **distance** entre x et a sans préciser le chemin selon lequel on fait tendre x vers a . Si la limite existe, alors $f(x)$ doit tendre vers la même limite indépendamment du chemin parcouru pour faire tendre x vers a . Par conséquent,

pour montrer qu'une limite n'existe pas, il suffit de montrer que la limite est différente le long de deux chemins se rendant en a .

Exemple 14 Regardons si la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ admet une limite en $(0, 0)$.

Si $y = 0$, alors $f(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Par suite,

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ selon l'axe des } x.$$

Si $x = 0$, alors $f(0, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, d'où

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ selon l'axe des } y.$$

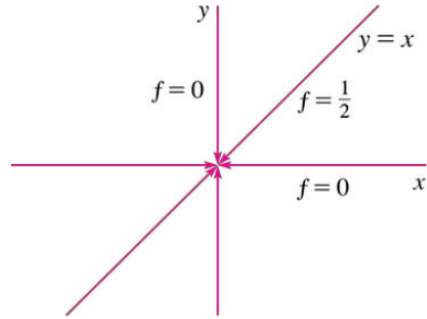
L'obtention de deux limites identiques selon les axes de coordonnées ne garantit pas que la limite est 0. Maintenant, on fait tendre (x, y) vers $(0, 0)$ selon une autre droite, soit $y = x$ (la première bissectrice), on obtient pour tout $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

par conséquent,

$$f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{lorsque } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ selon la droite } y = x.$$

(voir la figure ci-dessous).



Comme on a obtenu des limites différentes selon des chemins différents, la limite n'existe pas.

Remarque 3 En pratique, lorsqu'on est concerné par le calcul de la limite en 0, il est commode de faire tendre (x_1, \dots, x_n) vers (a_1, \dots, a_n) suivant le vecteur dont toutes les composantes sont égales à un réel λ quelconque fixé à l'exception de l'une d'entre elles qui vaut 1. Si par exemple, la limite de $f(x_1, \lambda x_1, \dots, \lambda x_1)$ lorsque $x_1 \rightarrow 0$ dépend de λ alors f n'a pas de limite en 0.

Exemple 15 Intéressons-nous à l'existence d'une limite en $(0, 0)$ de la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Soit λ un réel quelconque fixé. On fait tendre (x, y) vers $(0, 0)$ selon la droite d'équation $y = \lambda x$, on obtient

$$f(x, \lambda x) = \frac{|x| + |\lambda| |x|}{\sqrt{x^2 + \lambda^2 x^2}} = \frac{1 + |\lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Comme la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = \frac{1 + |\lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$ dépend de la valeur de λ (et donc du chemin parcouru), la fonction f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

Utilisation de la caractérisation séquentielle de la limite La proposition 2 permet de montrer qu'une fonction f n'admet pas ℓ pour limite lorsque $x \rightarrow a$, ou de montrer que cette fonction n'admet pas du tout de limite pour $x \rightarrow a$; elle permet aussi de trouver la seule valeur possible de la limite éventuelle ℓ de $f(x)$ pour $x \rightarrow a$.

- Si on arrive à construire une suite de vecteurs $(u^m)_m$ de D , convergente vers a , et telle que $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(u^m) \neq \ell$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \ell$.

- Si on arrive à trouver deux suites de vecteurs $(u^m)_m$ et $(v^m)_m$ de D , toutes deux convergentes vers a et telles que $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(u^m) \neq \lim_{m \rightarrow +\infty} f(v^m)$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas.
- Si on trouve une suite de vecteurs $(u^m)_m$ de D , convergente vers a , telle que $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(u^m) = \ell$, alors si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, sa valeur est nécessairement égale à ℓ .

Exemple 16 Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Il est clair que cette fonction est définie sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Est-ce que f admet une limite pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?

Considérons la suite $(u^m)_m$ définie par $u^m = (0, \frac{1}{m})$. Elle converge vers $(0, 0)$ et est formée de vecteurs de D , et l'on a

$$f(u^m) = f\left(0, \frac{1}{m}\right) = \frac{0 \cdot \frac{1}{m}}{0^2 + \frac{1}{m^2}} = 0 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

On peut donc affirmer que si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe, alors cette limite est nulle, mais il ne faut surtout pas conclure que cette limite existe.

Considérons maintenant la suite $(v^m)_m$ définie par $v^m = (\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$. Elle converge aussi vers $(0, 0)$ et est formée de vecteurs de D . Mais, cette fois-ci on a

$$f(v^m) = f\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) = \frac{\frac{1}{m^2}}{2 \cdot \frac{1}{m^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \neq 0.$$

Puisque $f(v^m)$ n'a pas la même limite que $f(u^m)$, on peut affirmer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

2.2.2 Comment établir qu'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} a une limite ?

D'après la définition 4, la fonction f admet pour limite en $a \in \overline{D}$ le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si la fonction scalaire $g : x \in D \mapsto |f(x) - \ell| \in \mathbb{R}_+$ admet pour limite 0 en a .

Il résulte par ailleurs du théorème d'encadrement 1, que si h est une fonction à valeurs réelles qui admet 0 pour limite en a et telle qu'au voisinage de a on ait $g(x) \leq h(x)$ alors g admet pour limite 0 en a .

D'un point de vue pratique, pour établir que la fonction f a une limite en a on peut procéder ainsi :

1. On cherche une valeur éventuelle ℓ de la limite de f en a (en utilisant par exemple les fonctions partielles ou en considérant un chemin dans D passant par a , ou encore une suite dans D convergeant vers a ...).

2. On majore au voisinage de a la fonction $g : x \in D \mapsto |f(x) - \ell| \in \mathbb{R}_+$ par une fonction h dont on sait que la limite en a est 0.

Exemple 17 Considérons la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|}$. Ses fonctions partielles en $(0, 0)$ correspondent à la fonction nulle. On en déduit que si f a une limite en $(0, 0)$, cette limite est nécessairement 0. En utilisant les inégalités $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $2|xy| \leq (|x| + |y|)^2$, on obtient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} \right| \leq \frac{|xy|}{|x| + |y|} \leq \underbrace{\frac{1}{2}(|x| + |y|)}_{:=h(x,y)}.$$

Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0$, on en déduit que f admet pour limite 0 en $(0, 0)$.

3 Continuité des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p

La notion de continuité s'étend à des fonctions de plusieurs variables. En outre bon nombre de propriétés des fonctions continues connues pour les fonctions d'une variable seront encore valables ici.

3.1 Continuité en un point et continuité sur un ensemble

3.1.1 Définitions et premiers exemples

Définition 6 Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, a un point de D et A une partie de D .

- On dit que f est continue au point a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

i.e. si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

- On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A .
- On dit que f est continue si elle est continue sur son domaine de définition D .

Notation. On désigne par $C(D, \mathbb{R}^p)$ ou $C^0(D, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions continues de D dans \mathbb{R}^p .

Remarque 4 En raison de l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie, la propriété de continuité d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p ne dépend pas des normes choisies sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p .

Exemple 18 Toute fonction constante $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue sur \mathbb{R}^n , puisque pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $x, a \in \mathbb{R}^n$, on a $\|f(x) - f(a)\| = 0 \leq \varepsilon$.

Exemple 19 L'application identité $\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$ est continue. En effet, à $\varepsilon > 0$ donné, on peut prendre $\delta = \varepsilon$.

Exemple 20 Toute norme sur \mathbb{R}^n est continue. En effet, l'inégalité

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad |||x|| - ||y|| \leq \|x - y\|$$

montre qu'à $\varepsilon > 0$ donné, on peut prendre $\delta = \varepsilon$.

Exemple 21 Les projections canoniques

$$\begin{array}{lcl} p_1 : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} & \text{et} \quad p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x & (x, y) \mapsto y \end{array}$$

sont continues en tout point (a_1, a_2) de \mathbb{R}^2 puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} |p_1(x, y) - p_1(a_1, a_2)| &= |x - a_1| \leq |x - a_1| + |y - a_2| = \|(x, y) - (a_1, a_2)\|_1, \\ |p_2(x, y) - p_2(a_1, a_2)| &= |y - a_2| \leq |x - a_1| + |y - a_2| = \|(x, y) - (a_1, a_2)\|_1, \end{aligned}$$

de sorte qu'à $\varepsilon > 0$ donné, il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$.

Exemple 22 Plus généralement, pour tout $j = 1, \dots, n$ la j -ième projection canonique

$$p_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$$

est continue sur \mathbb{R}^n .

Définition 7 (Homéomorphisme) Soient $D \subset \mathbb{R}^n$, $D' \subset \mathbb{R}^p$ et f une bijection de D sur D' . On dit que f est un homéomorphisme de D sur D' si f et f^{-1} sont continues sur D et D' respectivement.

On dit alors que D et D' sont homéomorphes.

Comme par définition une application f est continue en a si elle admet pour limite $f(a)$ en a , on déduit des propriétés de la limite énoncées dans la section précédente un certain nombre de résultats concernant les fonctions continues.

3.1.2 Critère séquentiel de la continuité

En adaptant la caractérisation séquentielle de la limite (Proposition 2) au cas particulier des fonctions continues, on obtient le critère séquentiel de continuité en un point.

Proposition 7 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in D$. Alors, f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u^m)_{m \in \mathbb{N}}$ de points de D qui converge vers a , la suite image $(f(u^m))_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Cette propriété sert souvent à montrer qu'une fonction n'est pas continue.

Exemple 23 La fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, si on note $u^m = (\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, alors u^m tend vers $(0, 0)$ mais $f(u^m) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $f(0, 0) = 0$ quand $m \rightarrow +\infty$.

3.1.3 Opérations sur les fonctions continues

Exactement comme pour les fonction d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} , on démontre les propositions suivantes.

Proposition 8 (Composée de fonctions continues) *Soient D et D' deux parties non vides de \mathbb{R}^n et de \mathbb{R}^p respectivement, et soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : D' \rightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions telles que $f(D) \subset D'$. Si f est continue en $a \in D$ (resp. sur D) et si g est continue en $f(a)$ (resp. sur D'), alors la fonction $g \circ f$ est continue en a (resp. sur D).*

De même, si f est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, et si g est une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q définie et continue au voisinage de ℓ , alors on a

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = g(\ell).$$

Exemple 24 La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R}^2 comme composée des fonctions continues $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$.

Exemple 25 La fonction $f : (r, t) \mapsto \cos t$ est continue sur \mathbb{R}^2 comme composée des fonctions continues

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (r, t) & \mapsto t & & x & \mapsto \cos x. \end{array}$$

Corollaire 1 Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue en $a \in D$ (resp. sur D), alors la fonction $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ est continue en a (resp. sur D).

Proposition 9 (Opérations algébriques sur les fonctions continues) Soient f et g deux fonctions de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^p .

Si f et g sont continues en $a \in D$ (resp. sur D) alors :

1. $f + g$ est continue en a (resp. sur D);
2. pour tout réel λ , la fonction λf est continue en a (resp. sur D);

Et dans le cas où $p = 1$, on a :

3. $f \times g$ est continue en a (resp. sur D);
4. f/g est continue en a si $g(a) \neq 0$ (resp. sur D si g ne s'annule pas sur D).

Remarque 5 Les points 1. et 2. de la proposition ci-dessus indiquent que $C(D, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$ des fonctions de D dans \mathbb{R}^p .

Exemple 26 Les fonctions S et P de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , définies par $S(x, y) = x + y$ et $P(x, y) = xy$ sont continues, comme somme et produit des projecteurs canoniques p_1 et p_2 respectivement.

Exemple 27 La fonction $f : (x, y) \mapsto 3x^3y^2 - 4y$ est continue sur \mathbb{R}^2 car c'est une combinaison linéaire de produits des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$.

Exemple 28 Plus généralement, toute fonction polynômiale en (x, y) , c'est-à-dire toute fonction combinaison linéaire de monômes du type $x^\alpha y^\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$:

$$f : (x, y) \mapsto \sum_{\alpha+\beta \leq N} c_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et $c_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$, est continue sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 29 La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{2x^3y + x^2}{x^2 + y^2 + 1}$ est continue sur \mathbb{R}^2 comme quotient de deux fonctions polynômiales, le dénominateur ne s'annulant pas.

Plus généralement,

Définition 8 – On appelle fonction polynômiale en (x_1, \dots, x_n) toute fonction de la forme

$$f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq N} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n, N \in \mathbb{N}$ et $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ des constantes réelles.

– On appelle fonction rationnelle toute fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômiales.

Exemple 30 La fonction $f : (x, y, z) \mapsto x + 3xyz - 2y^2z^3$ est une fonction polynômiale sur \mathbb{R}^3 .

En raisonnant de même que ci-dessus, on déduit que

Corollaire 2

1. Toute fonction polynômiale sur \mathbb{R}^n est continue.
2. Toute fonction rationnelle sur \mathbb{R}^n est continue sur son domaine de définition.

3.1.4 Lien avec la continuité des fonctions composantes et des fonctions partielles

Proposition 10 (Lien avec la continuité des fonctions composantes) On note f_1, \dots, f_p les fonctions composantes de f , i.e. les fonctions de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)).$$

f est continue en $a \in D$ si et seulement si toutes les fonctions composantes de f sont continues en a .

Preuve. Conséquence de l'égalité :

$$\|f(x) - f(a)\|_1 = |f_1(x) - f_1(a)| + \dots + |f_p(x) - f_p(a)|$$

et des inégalités :

$$|f_j(x) - f_j(a)| \leq \|f(x) - f(a)\|_1, \quad \forall j = 1, \dots, p.$$

■

Exemple 31 La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(x^2 - xy, \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

est continue sur \mathbb{R}^2 car les deux fonctions composantes

$$(x, y) \mapsto x^2 - xy \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$$

sont continues sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 32 La fonction $f : (r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t)$ est continue sur \mathbb{R}^2 puisque chacune de ses fonctions composantes est continue comme produit de fonctions continues sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 33 La fonction $f : (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2 \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right)$ est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ puisque chacune de ses fonctions composantes est continue comme composée de fonctions continues :

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}, \\ (x, y) &\mapsto \frac{y}{x} \mapsto 2 \arctan \left(\frac{y}{x} \right). \end{aligned}$$

Proposition 11 (Lien avec la continuité des fonctions partielles) *Si une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue en $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$, alors pour tout $j = 1, \dots, n$, la j -ième fonction partielle φ_j^a de f en a*

$$\varphi_j^a : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

est continue en a_j .

Remarque 6 La réciproque est fautive comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 34 Considérons sur \mathbb{R}^2 la fonction f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

On a

$$\varphi_1^{(0,0)}(x) = f(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0, 0) = \varphi_1^{(0,0)}(0)$$

et

$$\varphi_2^{(0,0)}(y) = f(0, y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 = f(0, 0) = \varphi_2^{(0,0)}(0),$$

ce qui montre que les fonctions partielles $\varphi_1^{(0,0)}$ et $\varphi_2^{(0,0)}$ sont continues en $x = 0$ et $y = 0$ respectivement, et pourtant f n'est pas continue en $(0, 0)$ (Voir exemple 23).

3.1.5 Prolongement par continuité

Définition 9 (Prolongement par continuité) Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur D et a un point adhérent à D n'appartenant pas à D . On suppose que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^p$ lorsque x tend vers a . Alors, la fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D, \\ \ell & \text{si } x = a, \end{cases}$$

est continue en a et est appelée prolongement par continuité de f au point a .

Exemple 35 La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est définie sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et tend vers 0 en $(0, 0)$ (Voir exemple 8). On peut donc prolonger la fonction f en $(0, 0)$ en une fonction continue \tilde{f} en posant $\tilde{f}(0, 0) = 0$.

3.1.6 Caractérisation topologique des fonctions continues

Notation. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application, alors pour toute partie $B \subset Y$, l'image réciproque de B par f est la partie de X notée $f^{-1}(B)$ et définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in X ; f(x) \in B\}.$$

Proposition 12 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^p . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur \mathbb{R}^n .
2. Pour tout ouvert U de \mathbb{R}^p , l'image réciproque $f^{-1}(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n .
3. Pour tout fermé F de \mathbb{R}^p , l'image réciproque $f^{-1}(F)$ est un fermé de \mathbb{R}^n .

La proposition ci-dessus fournit un moyen d'établir qu'un ensemble est ouvert ou fermé.

Exemple 36 Comme $]0, +\infty[$ est un ouvert de \mathbb{R} et que $[0, +\infty[$ et $\{0\}$ sont des fermés de \mathbb{R} , si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue alors :

- l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) > 0\} = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n ;
- l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé de \mathbb{R}^n ;
- l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \geq 0\} = f^{-1}([0, +\infty[)$ est un fermé de \mathbb{R}^n .

3.1.7 Continuité et compacité

Théorème 2 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction continue et K une partie compacte de \mathbb{R}^n contenue dans D . Alors, $f(K)$ est une partie compacte de \mathbb{R}^p .

Une conséquence importante et utile en pratique de ce résultat (avec $p = 1$) est la suivante.

Théorème 3 (de Weierstrass) Une fonction réelle f continue sur un compact K de \mathbb{R}^n est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, il existe $a, b \in K$ tels que

$$\forall x \in K : f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

3.2 Continuité uniforme

Une fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p est continue sur un sous-ensemble D de \mathbb{R}^n si :

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0, \forall y \in D : \|x - y\| \leq \delta_{x,\varepsilon} \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Pour certaines fonctions, le réel $\delta_{x,\varepsilon}$ peut être le même pour tous les éléments x de D : il ne dépend alors pas de x . En imposant cette condition à une fonction, on définit une notion plus « forte » que la continuité appelée **continuité uniforme**.

Définition 10 Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite uniformément continue sur D si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in D : \|x - y\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 7 Il résulte des définitions 6 et 10 que toute fonction uniformément continue sur D est continue sur D . Evidemment, la réciproque n'est pas vraie (comme c'est le cas de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$).

Exemple 37 Toute fonction constante $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^n , puisqu'on a $\|f(x) - f(y)\| = 0$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 38 La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 + |x|} \in \mathbb{R}$ est uniformément continue sur \mathbb{R} . En effet, puisque pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $|x| + 1 \geq 1$ et $|y| + 1 \geq 1$, on obtient :

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{|y| - |x|}{(1 + |x|)(1 + |y|)} \right| \leq ||y| - |x|| \leq |y - x|.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ (prendre $\delta = \varepsilon$) tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $|x - y| \leq \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \leq \delta = \varepsilon$.

Théorème 4 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction continue et K une partie compacte de \mathbb{R}^n contenue dans D ; alors f est uniformément continue sur K .

Une classe importante de fonctions uniformément continues est celle des fonctions lipschitziennes.

Définition 11 Soit $k \in \mathbb{R}_+$. Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite k -lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport k) si

$$\forall x, y \in D : \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|. \quad (1)$$

f est dite lipschitzienne si elle est k -lipschitzienne pour un certain $k \in \mathbb{R}_+$.

f est dite contractante si elle est k -lipschitzienne pour un certain $k \in [0, 1[$.

Le plus petit réel $k \in \mathbb{R}_+$ vérifiant (1) est appelé la constante de Lipschitz de f .

Remarque 8 La constante de Lipschitz k dépend du choix des normes sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p . Par contre, par équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie, le fait qu'une fonction soit lipschitzienne ou non ne dépend pas des normes choisies.

Exemple 39 Une fonction constante $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est lipschitzienne de rapport 0 puisque pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $\|f(x) - f(y)\| = 0$. Réciproquement, toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ qui est lipschitzienne de rapport 0 est constante car si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $\|f(x) - f(y)\| \leq 0$ alors $\|f(x) - f(y)\| = 0$, autrement dit $f(x) = f(y)$.

En prenant $\delta = \varepsilon/k$ dans la définition de la continuité uniforme, on voit immédiatement que

Proposition 13 Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est lipschitzienne alors f est uniformément continue sur D .

Proposition 14 La fonction $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ est lipschitzienne et donc uniformément continue.

Proposition 15 Toute norme sur \mathbb{R}^n est lipschitzienne et donc uniformément continue.

Proposition 16 Tout application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p est lipschitzienne et donc uniformément continue.

On termine ce chapitre par un résultat utile pour montrer les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites.

Théorème 5 (du point fixe de Banach-Picard) *Soit F une partie fermée de \mathbb{R}^n et f une fonction contractante de F dans F (de rapport k). Alors, f admet un unique point fixe a (solution de l'équation $f(x) = x$) dans F .*

En outre, si on se donne $x^0 \in F$ et si on définit par récurrence $x^{m+1} = f(x^m)$, alors la suite $(x^m)_m$ converge vers cet unique point fixe quand m tend vers l'infini. Plus précisément, on a

$$\|x^m - a\| \leq \frac{k^m}{1 - k} \|x^1 - x^0\|, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$