Chapitre 4
Intégrales doubles

Prof. N. Merazga

30 avril 2025

Table des matières

Dans ce chapitre nous allons étendre la notion d'intégrale définie de Riemann aux intégrales doubles des fonctions continues de deux variables sur un domaine borné.
On munit le plan usuel $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Intégration sur un rectangle

Lemme 1 *Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux segments de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,*

- *Pour tout $x \in [a, b]$, la fonction partielle $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $[c, d]$;*

- *Pour tout* $y \in [c,d]$, *la fonction partielle* $x \mapsto f(x,y)$ *est intégrable sur* $[a,b]$ *;*
- *Les fonctions* $x \mapsto \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ *et* $y \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ *sont continues et donc intégrables sur* $[a,b]$ *et* $[c,d]$ *respectivement.*

Théorème 1 (Théorème de Fubini sur un rectangle de $\mathbb{R}^2$) *Soient* $[a,b]$ *et* $[c,d]$ *deux segments de* $\mathbb{R}$ *et* $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors, on a*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Définition 1 *La valeur commune des deux intégrales itérées (1) est appelée* <u>*intégrale double*</u> *de* f *sur le rectangle* $[a,b]\times[c,d]$ *et est notée* $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy$ *ou tout simplement* $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$.

Exemple 1 Calcul de l'intégrale double $\displaystyle\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

La fonction $(x,y)\mapsto x^2y-1$ est continue sur $[-1,1]\times[0,1]$ comme fonction polynômiale.

$$\begin{aligned}\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 (x^2y-1)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} - y\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2}-1\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}-x\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Exemple 2 Calcul de l'intégrale double $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,2]} x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

La fonction $(x,y)\mapsto x\mathrm{e}^{xy}$ est continue sur $[0,1]\times[0,2]$ comme produit et composée de fonctions continues.

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,2]} x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^2 x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\mathrm{e}^{xy}\right]_{y=0}^{y=2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (\mathrm{e}^{2x}-1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}-x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\mathrm{e}^2-3}{2}.\end{aligned}$$

Dans le cas où la fonction à intégrer f est le **produit** d'une fonction de x par une fonction de y, on a :

Corollaire 1 (Variables séparables) *Soient* $[a,b]$ *et* $[c,d]$ *deux segments de* $\mathbb{R}$, *et soit* $g : [a,b]\to\mathbb{R}$ *et* $h : [c,d]\to\mathbb{R}$ *deux fonctions continues. Alors*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

Exemple 3 Calcul de $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos y\,\mathrm{d}y\right) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

2 Extension à un domaine borné non rectangle

Définition 2 *Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ de la forme* ([1])

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\, a\le x\le b \quad \text{et} \quad \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\right\}, \tag{2}$$

(voir Fig. 1), *ou de la forme* ([2])

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\, c\le y\le d \quad \text{et} \quad \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\right\}, \tag{3}$$

(voir Fig. 2), *où φ_1 et φ_2 désignent deux fonctions réelles continues sur le segment $[a,b]$, vérifiant $\varphi_1\le\varphi_2$ et où ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions réelles continues sur le segment $[c,d]$, vérifiant $\psi_1\le\psi_2$. Soit $f : D\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur D.*

L'intégrale double de la fonction f sur D est le nombre réel noté $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ou $\displaystyle\iint_D f$ et défini par

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x, \qquad \textit{si } D \textit{ est de la forme } (2) \tag{4}$$

et

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y, \qquad \textit{si } D \textit{ est de la forme } (3). \tag{5}$$

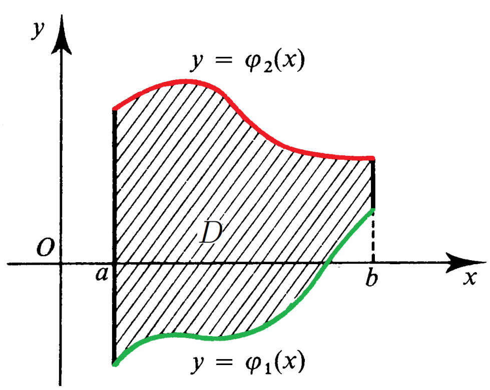


Fig. 1

[1] Un tel ensemble est dit être décrit par pile.
[2] Un tel ensemble est dit être décrit par tranche.

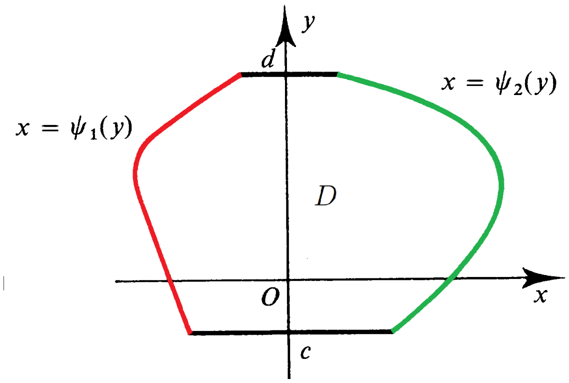


Fig. 2

Remarque 1 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ décrit par (2) ou (3) est clairement compact et n'a pas de trou.

Notation. On utilise souvent la notation suivante :

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x, \\ \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Théorème 2 (de Fubini) *Si D est un compact du plan réel $\mathbb{R}^2$ admettant à la fois une définition de la forme (2) et une définition de la forme (3)* (voir Fig. 3), *i.e.*

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, a \le x \le b \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, c \le y \le d \quad \text{et} \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\right\}, \end{aligned}$$

et si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\begin{aligned} \iint_D f &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad (\textit{on intègre par rapport à } y \textit{ puis par rapport à } x) \\ &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \quad (\textit{on intègre par rapport à } x \textit{ puis par rapport à } y). \end{aligned}$$

L'ordre d'intégration est indifférent, et dans la pratique, on s'arrange pour intégrer dans un ordre qui facilite les intégrations.

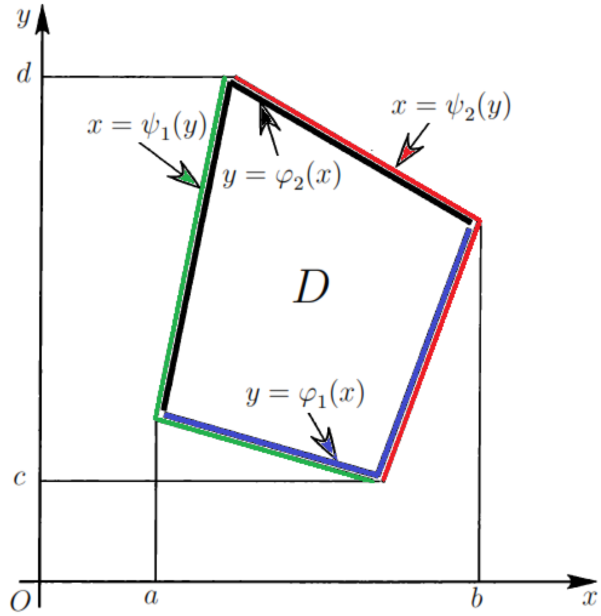
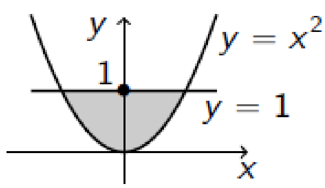


Fig. 3

Exemple 4 Calcul de l'intégrale double $\iint_D f$ où f est la fonction continue $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 y$ et D est la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas, et la droite $y = 1$ en haut.



Première méthode. On peut décrire D comme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\ -1 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad x^2 \leq y \leq 1\right\},$$

d'où

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1} x^2 \left(\int_{x^2}^{1} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{y=1} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2 - x^6)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode. On voit que $x^2 \leq y \iff |x| \leq \sqrt{y} \iff -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$, d'où l'on peut affirmer que le domaine D est aussi caractérisé par

$$(x,y) \in D \iff \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}. \end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 y \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 y \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 y^{5/2}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3} \left[\frac{2}{7} y^{7/2} \right]_0^1 = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

On a bien trouvé le même résultat.

3 Propriétés générales des intégrales doubles

Dans tout ce qui suit, D est un domaine de $\mathbb{R}^2$ de la forme (2) ou (3) et f et g sont deux fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1 (Linéarité) *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\iint_D (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_D f + \mu \iint_D g.$$

Proposition 2 (Positivité) *Si f est une fonction positive sur D, i.e. telle que $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in D$, alors on a*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0.$$

*Si de plus, D est d'**intérieur non vide**, l'intégrale $\displaystyle\iint_D f$ ne peut être nulle que si f est la fonction nulle.*

Cette proposition donne immédiatement lieu au corollaire suivant.

Corollaire 2

i) *Monotonie. Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D$, alors on a*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

ii) *Intégrale et valeur absolue.* *On a*

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Proposition 3 (Additivité, Relation de Chasles) *Si D_1 et D_2 sont deux domaines bornés de la forme (2) ou (3) dont l'intersection des intérieurs est vide, $\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \varnothing$, et f est une fonction continue définie de $D_1 \cup D_2$ dans $\mathbb{R}$, alors*

$$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Définition 3 *On appelle compact simple de $\mathbb{R}^2$ toute **réunion finie de** compacts susceptibles de l'une des descriptions (2) ou (3) dont les intersections deux à deux est vide ou contenue dans leur bord (Autrement dit, les intérieurs des deux domaines ne se rencontrent pas).*

A la lumière de la proposition 3, pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un compact simple D du plan réel $\mathbb{R}^2$, on décompose D, au moyen de parallèlles aux axes, en compacts élémentaires D_j susceptibles de l'une des définitions (2) ou (3), et on fera la somme des intégrales relatives à ces compacts (voir Fig. 4).

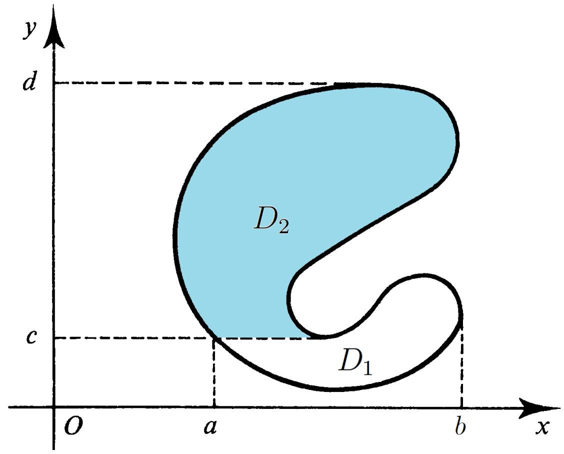
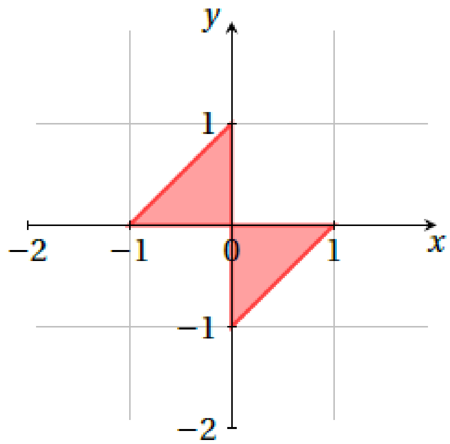


Fig. 4

Exemple 5 Calcul de l'intégrale double $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où l'ensemble d'intégration est colorié dans la figure ci-dessous.



On a $D = D_1 \cup D_2$ où

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ -1 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq x+1\right\}, \\ D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \leq x \leq 1,\ x-1 \leq y \leq 0\right\}. \end{aligned}$$

Comme $\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \varnothing$ et la fonction $(x,y) \mapsto xy$ est continue, on a

$$\begin{aligned} \iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{0}\left(\int_0^{x+1} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_0^1\left(\int_{x-1}^{0} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0}\left[x\,\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x+1}\mathrm{d}x + \int_0^1\left[x\,\frac{y^2}{2}\right]_{y=x-1}^{y=0}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(x^3+2x^2+x\right)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=0} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Le fait que le domaine d'intégration D soit défini par des inégalités larges signifie qu'il est fermé. Ceci n'est pas une obligation, et pour un domaine qui serait ouvert (inégalités strictes) ou ni ouvert ni fermé (il y a à la fois des inégalités strictes est des inégalités larges), l'intégrale double de f sur ce domaine est égale à l'intégrale double sur l'adhérence du domaine, comme le stipule le résultat suivant.

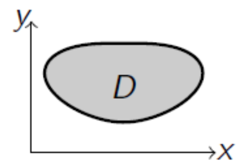
Proposition 4 *Pour un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$, dont l'adhérence $\overline{D}$ est un compact simple, et une fonction f continue sur $\overline{D}$, on a*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathring{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\overline{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4 Applications géométriques

Définition 4 (Aire d'un domaine plan) *On appelle <u>aire</u> d'un domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par (2) ou (3), l'intégrale sur D de la fonction constante 1 :*

$$\text{Aire}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

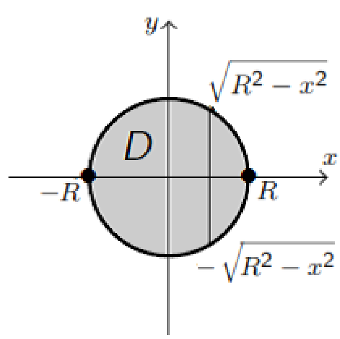


Cette définition correspond à la notion intuitive d'aire, comme le montrent les exemples suivants :

Exemple 6 Un rectangle $[a,b] \times [c,d]$ admet pour aire :

$$\text{Aire}\left([a,b] \times [c,d]\right) = \int_a^b \left(\int_c^d \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = (b-a)(d-c).$$

Exemple 7 L'aire du disque D centré en O et de rayon $R > 0$ est πR^2. En effet :



$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in [-R,R] \quad \text{et} \quad -\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}\right\}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D) &= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2R^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \left(\text{changement de variable } \frac{x}{R}=t\right) \\
&= 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad (\text{changement de variable } t=\sin\theta) \\
&= R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \pi R^2.
\end{aligned}$$

Définition 5 (Volume sous le graphe d'une fonction) *Soit f une fonction continue sur un domaine plan D défini par (2) ou (3). On définit :*

- *Volume "algébrique" sous le graphe de $f \overset{\text{déf}}{=} \displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;*
- *Volume sous le graphe de $|f| \overset{\text{déf}}{=} \displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.*

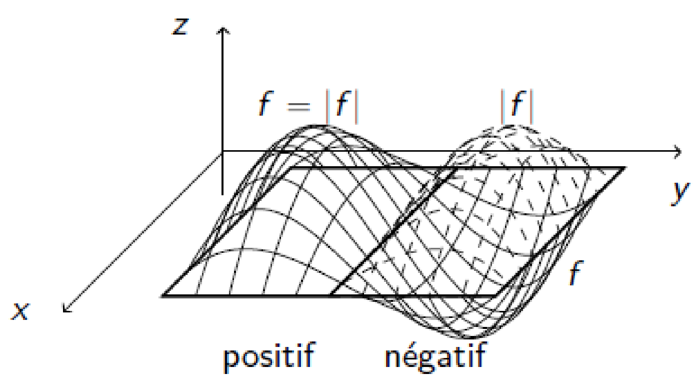


Fig. 3

Exemple 8 On veut calculer le volume du solide qui s'élève sur le domaine D du plan Oxy délimité par la droite d'équation $y = 2x$ et la parabole $y = x^2$ et couvert par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$.

Première méthode. Le domaine D peut être décrit par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ 0 \leq x \leq 2,\ x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Le volume se calcule alors par

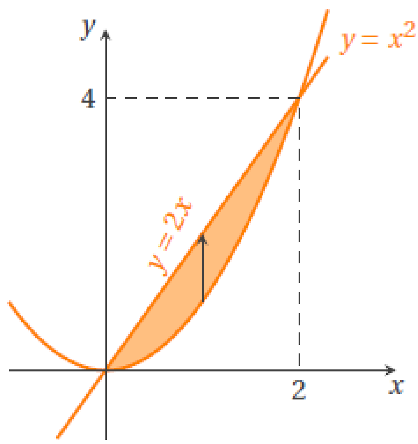
$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(x^2(2x)+\frac{(2x)^3}{3}-x^2(x^2)-\frac{(x^2)^3}{3}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{7x^4}{6}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{216}{35}.
\end{aligned}$$

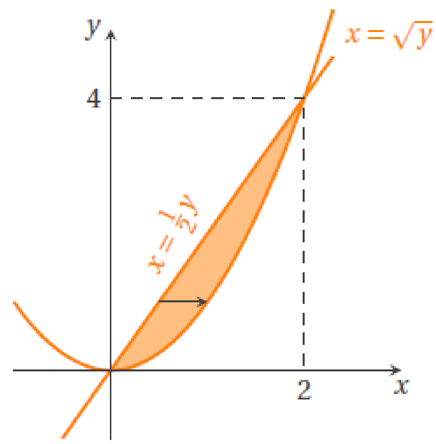
Deuxième méthode. Le domaine D peut être décrit par

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ ;\ 0\le y\le 4,\ \ y/2\le x\le \sqrt{y}\right\}.$$

Le volume se calcule alors par

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \left(\frac{(\sqrt{y})^3}{3}+\sqrt{y}y^2-\frac{(y/2)^3}{3}-(y/2)y^2\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3}+y^{5/2}-\frac{13y^3}{24}\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{2y^{5/2}}{15}+\frac{2y^{7/2}}{7}-\frac{13y^4}{96}\right]_{y=0}^{y=4} = \frac{216}{35}.
\end{aligned}$$





5 Changement de variables dans les intégrales doubles

5.1 Théorème de changement de variables

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, et soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ un C^1-difféomorphisme de U sur V. Son jacobien au point $(u, v) \in U$ est noté

$$\det \mathbf{J}(\varphi)_{(u,v)} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{D}(\varphi_1, \varphi_2)}{\mathrm{D}(u, v)}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

On sait que dans ce cas, $\det \mathbf{J}(\varphi) : U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, qui ne prend pas la valeur 0.

On admet le théorème suivant, dit théorème de changement de variables.

Théorème 3 (de changement de variables) *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, φ un C^1-difféomorphisme de U sur V :*

$$\varphi : (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (x, y)$$

et $D \subset V$ un compact simple de $\mathbb{R}^2$.

Alors, pour toute fonction $f : V \to \mathbb{R}$ des variables x, y, continue sur D, la fonction composée $(f \circ \varphi) |\det \mathbf{J}(\varphi)| : U \to \mathbb{R}$ est continue sur $\varphi^{-1}(D)$ et l'on a la formule de changement de variables :

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\varphi^{-1}(D)} f[\varphi(u, v)] \left|\det \mathbf{J}(\varphi)_{(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{6}$$

On a également la version suivante du théorème de changement de variables.

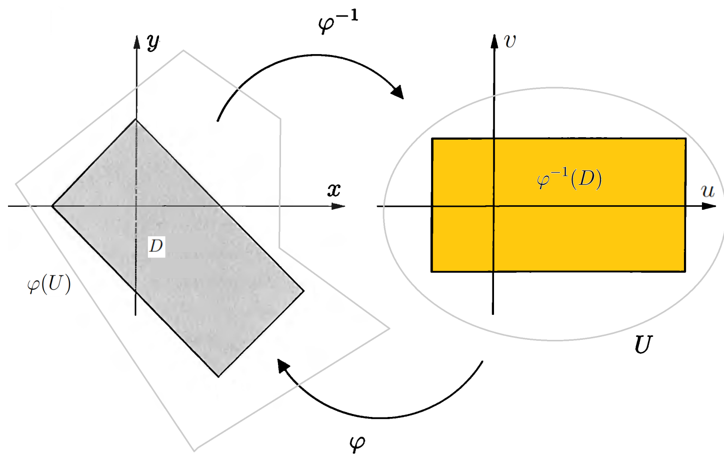
Théorème 4 (du changement de variables) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et φ un difféomorphisme de classe C^1 de U sur $\varphi(U)$:*

$$\varphi : (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (x, y)$$

tel que φ et son jacobien $\det \mathbf{J}(\varphi)$ soient prolongeables par continuité sur $\overline{U}$. Soit D un compact simple de $\mathbb{R}^2$ inclus dans $\varphi(\overline{U})$ (et donc $\varphi^{-1}(D) \subset \overline{U}$).

Alors, pour toute fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$ des variables x, y, la fonction $(f \circ \varphi)\ |\det \mathbf{J}(\varphi)|$ est prolongeable par continuité sur $\varphi^{-1}(D)$, et on a la formule de changement de variables :

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\varphi^{-1}(D)} f[\varphi(u, v)] \left|\det \mathbf{J}(\varphi)_{(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7}$$



5.2 Passage en coordonnées polaires (planes)

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ l'application qui définit les coordonnées polaires. Elle est de classe C^1 et on a

$$\det \mathbf{J}(\Phi)_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Elle définit donc un C^1-difféomorphisme sur tout ouvert de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ sur lequel elle est injective, par exemple sur $U =]0,+\infty[\times]0,2\pi[$. Par ailleurs, Φ et son jacobien $\det \mathbf{J}(\Phi)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur $\overline{U} = [0,+\infty[\times[0,2\pi]$.

Soit D un compact simple de $\mathbb{R}^2$, alors D est inclus dans $\Phi(\overline{U}) = \mathbb{R}^2$. Par conséquent, pour toute fonction réelle continue sur D, on a d'après le théorème 4 :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Phi^{-1}(D)} f(\Phi(r,\theta))\left|\det \mathbf{J}(\Phi)_{(r,\theta)}\right|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \iint_{\Phi^{-1}(D)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Corollaire 3 *Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, et soit D un compact simple de $\mathbb{R}^2$. Si f est une fonction réelle continue sur D, alors on a :*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Phi^{-1}(D)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Exemple 9 Retrouvons l'aire du disque D de centre O et de rayon $R > 0$ en faisant un passage aux coordonnées polaires.

On a :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

Puisque $x^2 + y^2 = r^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(D) &= \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \ ; \ \Phi(r,\theta) \in D\} \\
&= \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \ ; \ r \leq R\} \\
&= [0, R] \times [0, 2\pi]\,,
\end{aligned}$$

d'où

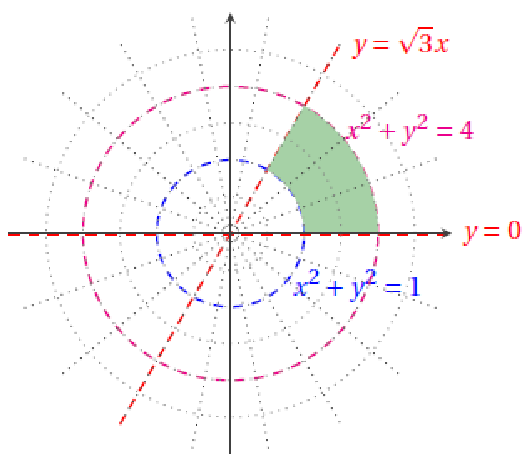
$$\text{Aire}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Phi^{-1}(D)} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r = \int_0^R 2\pi r\,\mathrm{d}r = \pi R^2.$$

Exemple 10 On veut intégrer la fonction continue $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ sur l'ensemble

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < y < \sqrt{3}x \ \text{ et } \ 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

Si on passe en coordonnées polaires on a

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(D) &= \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \ ; \ \Phi(r,\theta) \in D\} \\
&= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\ ; \ 1 < r < 2 \ \text{ et } \ 0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right\} \\
&=]1, 2[\times \left]0, \frac{\pi}{3}\right[.
\end{aligned}$$



On a donc

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\Phi^{-1}(D)} \frac{1}{1+r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^2 \frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 \frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right) = \frac{\pi}{3}\left[\frac{\ln(1+r^2)}{2}\right]_1^2 = \frac{\pi \ln(5/2)}{6}.
\end{aligned}$$