Chapitre 3

Fonctions de plusieurs variables Calcul différentiel

Prof. Merazga Nabil

25 mars 2025

Table des matières

Le présent chapitre est consacré aux notions de base du calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables et des théorèmes fondamentaux qui lui sont attachés.
Fixons quelques notations utilisées de façon constante dans tout ce chapitre :
n, p et q désignent trois entiers naturels non nuls.
Pour deux vecteurs $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.
Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.
Le fait que Ω soit ouvert permettra de considérer les valeurs de f au voisinage de tout point de Ω. Si cela n'était pas le cas, il faudrait restreindre les définitions qui suivent aux points intérieurs à Ω.

1 Dérivées directionnelles, dérivées partielles

1.1 Dérivées directionnelles

Définition 1 (Dérivée directionnelle) *Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul donné. On dit que la fonction f est dérivable en un point $a = (a_1, ..., a_n)$ de Ω selon le vecteur $\mathbf{v}$ (ou dans la direction du vecteur $\mathbf{v}$) si*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\mathbf{v}) - f(a)}{t} \quad \textit{existe.} \tag{1}$$

Lorsque c'est le cas, cette limite est appelée <u>dérivée directionnelle</u> de f au point a dans la direction du vecteur $\mathbf{v}$, et est notée par l'un des symboles $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a)$ ou $D_{\mathbf{v}} f(a)$.

Autrement dit, $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a)$, si elle existe, est la dérivée en 0 de la fonction

$$\psi_{\mathbf{v}} : t \mapsto f(a + t\mathbf{v}),$$

définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Exemple 1 La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y$ admet en $a = (0, 0)$ des dérivées directionnelles selon $\mathbf{v} = (1, 1)$ et $\mathbf{v}' = (1, 0)$. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\mathbf{v}) - f(a)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = 2, \\ \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\mathbf{v}') - f(a)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 1, \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}'}(0, 0) = 1.$$

Exemple 2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

possède en $a = (0, 0)$ des dérivées selon toutes les directions. En effet, pour $\mathbf{v} = (h, k) \neq (0, 0)$ et $t \neq 0$, on a

$$f(a + t\mathbf{v}) = f(th, tk) = tf(h, k) = tf(\mathbf{v}),$$

d'où

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\mathbf{v}) - f(a)}{t} = f(\mathbf{v}) \quad \text{existe},$$

et $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = f(\mathbf{v})$.

Remarques.

1. L'existence de la dérivée directionnelle ne dépend pas du vecteur mais uniquement de sa direction. En effet, si f est dérivable en $a \in \Omega$ selon un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ alors f est aussi dérivable en a selon tous les vecteurs de la forme $\lambda\mathbf{v}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial (\lambda\mathbf{v})}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a).$$

2. Dans le cas $n = 1$, il y a équivalence entre "*dérivable*" et "*dérivable selon un vecteur*".

3. Comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, l'existence d'une limite est indépendante de la norme choisie. En conséquence, l'existence d'une dérivée directionnelle est elle aussi indépendante du choix de la norme.

Notons $f_1, ..., f_p$ les fonctions composantes de f, i.e. les fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x)).$$

Proposition 1 *La fonction f admet une dérivée en $a \in \Omega$ selon le vecteur $\mathbf{v}$ si et seulement s'il en est de même pour ses fonctions composantes. On a alors*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}(a), ..., \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{v}}(a)\right).$$

On peut ainsi toujours se ramener à des fonctions numériques (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}$).

1.2 Dérivées partielles

Le cas où $\mathbf{v}$ est l'un des vecteurs de la base canonique $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ conduit à la définition suivante.

Définition 2 (Dérivée partielle)

– *On appelle dérivée partielle de f par rapport à la j-ième variable x_j au point $a \in \Omega$, lorsqu'elle existe, la dérivée de f selon le vecteur $\mathbf{e}_j$, i.e.*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_j} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\mathbf{e}_j) - f(a)}{t}.$$

On la note $D_j f(a)$ ou $f'_{x_j}(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

– *Si f admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_j en tout point de Ω, alors on peut définir sur Ω la fonction*

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} : & \Omega & \to & \mathbb{R}^p \\ & x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x). \end{array}$$

Cette fonction (de n variables) s'appelle fonction dérivée partielle de f par rapport à la variable x_j.

Remarque 1 Pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, les dérivées partielles sont couramment désignées par $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$, avec $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)$ comme troisième dérivée partielle lorsqu'il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 2 Par définition, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_j, ..., a_n)}{t}.$$

Autrement dit $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est la dérivée, au point a_j, de la fonction partielle

$$\varphi_j^a : x_j \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_n).$$

En pratique : Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, ..., a_n)$, on procède de la manière suivante :

– lorsque f est donnée par une formule en $(x_1, ..., x_n)$ valable dans un ouvert contenant a, on considère toutes les variables $x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n$ fixées et dérive l'expression $f(x_1, ..., x_n)$ comme une fonction de la variable x_j seule en utilisant les règles usuelles de dérivation des fonctions d'une variable réelle ; on évalue ensuite l'expression obtenue en $(a_1, ..., a_n)$.

– Lorsqu'au voisinage d'un point particulier (spécial) a, la fonction f n'est pas définie par une seule formule (valable pour le point a et pour tous ses points voisins) alors on peut avoir recours à la définition (avec la limite du taux d'accroissement) pour établir l'existence et calculer les dérivées partielles en a.

Exemples.

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy + \sin(xy^2)$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et l'on a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1 + y\cos(xy^2)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1 + 2y\cos(xy^2)).$$

2. La fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $r(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ possède des dérivées partielles en tout point différent de $0 = (0, ..., 0)$ et l'on a :
$$\frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_j}{r(x)}.$$

3. La fonction définie sur $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $\theta(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ possède en tout point $(x,y) \in \Omega$ des dérivées partielles qui sont :
$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

4. Reprenons la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y)\neq(0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0)=0$$

et calculons ses dérivées partielles.

En tout point $(x,y)\neq(0,0)$, les dérivées partielles de f se calculent comme indiqué ci-dessus :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x(x^2+y^2)-2y^2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-y^2x}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Au point $(0,0)$, les dérivées partielles de f se calculent via les taux d'accroissement

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0.\end{aligned}$$

Or, on a vu que cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$. Cette exemple montre que *l'existence des dérivées partielles d'une fonction en un point n'entraîne pas sa continuité en ce point.*

A l'instar de la proposition 1, on a

Proposition 2 *La fonction $f=(f_1,\dots,f_p)$ admet des dérivées partielles en $a\in\Omega$ si et seulement si ses fonctions composantes en admettent et l'on a alors*

$$\forall j=1,\dots,n: \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a),\dots,\frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a)\right).$$

On peut ainsi toujours se ramener à des fonctions numériques.

Exemples.

1. La fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$ possède en tout point $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles qui sont :

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)=(\cos\theta,\sin\theta) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial\theta}(r,\theta)=(-r\sin\theta,r\cos\theta).$$

2. Calculer les dérivées partielles de la fonction $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z)=\left(\frac{x^2-z^2}{2},\sin(x)\cos(y)\right).$$

1.3 Matrice jacobienne

Lorsqu'on manipule les dérivées partielles d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, il est commode d'introduire une matrice, appelée matrice jacobienne de f, dont les éléments sont les dérivées partielles des composantes de f en un point.

Définition 3 (Matrice jacobienne, Jacobien) *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction, de composantes $(f_1, ..., f_p)$, admettant des dérivées partielles en un point $a \in \Omega$. On appelle matrice jacobienne de f en a et on note $\mathbf{J}(f)_a$ la matrice définie par :*

$$\mathbf{J}(f)_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Lorsque $n = p$, on appelle jacobien de f en a le déterminant de la matrice jacobienne de f en a :

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(a) = \det(\mathbf{J}_f(a)).$$

On l'appelle aussi déterminant fonctionnel de f (ou des n fonctions numériques f_i) au point a.

Remarques.

1. Le $j-$ième vecteur colonne de la matrice jacobienne est constitué des coordonnées de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
2. En particulier, lorsque $n = 1$, la matrice jacobienne de f est la matrice colonne représentant le vecteur $f'(a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$:

$$\mathbf{J}(f)_a = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_p'(a) \end{pmatrix}.$$

3. Lorsque $p = 1$, la matrice jacobienne de f est la matrice ligne :

$$\mathbf{J}(f)_a = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Exemple 3 La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, xy)$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Notons f_1 et f_2 ses fonctions composantes, i.e.

$$f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \qquad \text{et} \qquad f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy.$$

Pour $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1, a_2), \frac{\partial f_2}{\partial x}(a_1, a_2)\right) = (1, a_2)\,,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1, a_2), \frac{\partial f_2}{\partial y}(a_1, a_2)\right) = (1, a_1)\,.$$

La matrice jacobienne de f en $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ vaut

$$\mathbf{J}(f)_{(a_1,a_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1, a_2) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a_1, a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

et le jacobien de f en (a_1, a_2) qui est le déterminant de cette matrice vaut :

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}(a_1, a_2) = a_1 - a_2.$$

Exemple 4 (Coordonnées polaires) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Sa matrice jacobienne au point (r, θ) est :

$$\mathbf{J}(f)_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et son jacobien est

$$\det\left(\mathbf{J}(f)_{(r,\theta)}\right) = r.$$

2 Différentiabilité

2.1 Différentiabilité en un point

La simple existence de toutes les dérivées directionnelles n'a pas d'autres conséquences telles que la continuité. L'exemple suivant illustre la situation et motive l'introduction de la notion plus forte de différentiabilité des fonctions de plusieurs variables.

Exemple 5 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

possède en $(0,0)$ des dérivées directionnelles (nulles) suivant tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, mais n'est pas continue. Pour montrer que f dans l'exemple ci-dessus n'est pas continue en $(0,0)$, on calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ par exemple.

Ainsi, la notion de dérivée *directionnelle* n'est pas une notion de dérivée satisfaisante, en particulier parce que l'existence de telles dérivées pour une fonction f en un point ne garantit même pas la continuité de cette fonction en ce point.

Définition 4 *On dit que f est <u>différentiable</u> (ou dérivable) en $a \in \Omega$ s'il existe une application linéaire*

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \qquad (\textit{dépendant de } a \textit{ en général})$$

telle que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0, \tag{2}$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 3 En notant $a + h = x$, (2) s'écrit

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0. \tag{3}$$

Exemple 6 La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$ est différentiable en chaque point $a = (a_1, a_2)$ de $\mathbb{R}^2$. En effet, formons la différence entre les termes $f(a_1+h_1, a_2+h_2)$ et $f(a_1,a_2)$:

$$\begin{aligned} f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1,a_2) &= (a_1+h_1)(a_2+h_2) - a_1a_2 \\ &= a_1h_2 + a_2h_1 + h_1h_2. \end{aligned}$$

Dans cette expression, on identifie les termes qui sont « linéaires » en la variable $h = (h_1, h_2)$ et on pose

$$L : (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto a_1h_2 + a_2h_1.$$

On en déduit que le rapport

$$\frac{f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1,a_2) - L(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|_2} = \frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

tend vers zéro quand $(h_1,h_2) \to (0,0)$.

On peut reformuler la définition 4 de la manière suivante :

Définition 5 *Une fonction f est dite différentiable en $a \in \Omega$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et une fonction ε_a de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie au voisinage de 0 tels que pour tout h proche de 0, on ait :*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\| \, \varepsilon_a(h) \quad \textit{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon_a(h) = 0. \tag{4}$$

En effet, si $r > 0$ est choisi de sorte que la boule $B(a,r)$ soit incluse dans Ω (ce qui est possible car Ω est ouvert), il est toujours possible de poser

$$\varepsilon_a(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} \quad \text{pour } 0 < \|h\| < r. \tag{5}$$

Avec cette fonction ε_a, il est facile de voir que l'égalité (4) est vérifiée. Cela signifie que $L(h)$ "approche" la différence $f(a+h) - f(a)$ lorsque h est proche de 0.

Remarque 4 En notant $a + h = x$ et $\eta(x) = \varepsilon_a(x-a)$, (4) se réécrit

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \, \eta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \eta(x) = 0. \tag{6}$$

Remarque 5 En utilisant les notations de Landau, la relation (4) s'écrit aussi

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o\left(\|h\|\right). \tag{7}$$

Proposition 3 *Si f est différentiable en $a \in \Omega$, l'application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ qui intervient dans la définition est* <u>unique</u>*. On l'appelle* <u>différentielle</u> *de f en a et on la note $\mathrm{d}f_a$.*

Avec la notation introduite dans la proposition ci-dessus, (2), (4) et (7) se réécrivent respectivement

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f_a(h)}{\|h\|} = 0, \tag{8}$$

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \|h\| \, \varepsilon_a(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon_a(h) = 0, \tag{9}$$

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + o\left(\|h\|\right). \tag{10}$$

Exemple 7 Toute <u>fonction constante</u> $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en tout point de Ω, avec $\mathrm{d}f_a = 0$ pour tout $a \in \Omega$.

Exemple 8 Les projections canoniques $p_j : (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_j \in \mathbb{R}$ sont des fonctions différentiables en tout point a de $\mathbb{R}^n$, avec $\mathrm{d}\,(p_j)_a = p_j$.

Exemple 9 Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R}^n$, de différentielle constante $\mathrm{d}f_a = f$.

A l'instar du résultat de la proposition 1, on a

Proposition 4 *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \Omega$ si et seulement si ses p fonctions composantes $f_1, ..., f_p$ sont différentiables en a, et l'on a*

$$\mathrm{d}f_a = \left(\mathrm{d}\,(f_1)_a\,, ..., \mathrm{d}\,(f_p)_a\right).$$

Exemple 10 La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ car ses fonctions composantes $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ le sont, sa différentielle au point (a_1, a_2) étant l'application :

$$\mathrm{d}f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (h_1, h_2) \mapsto (h_1 + h_2, a_2 h_1 + a_1 h_2).$$

Remarque 6 (Application de la différentielle au calcul approché) Pour une fonction différentiable f en un point a, et pour $\|h\|$ suffisamment petit, la relation (10) donne lieu à l'égalité approchée

$$f(a + h) \simeq f(a) + \mathrm{d}f_a(h). \tag{11}$$

Exemple 11 Calcul approximatif de $1,02^{3,01}$.

Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto x^y\ (= e^{y \ln x})$. Cette fonction est différentiable en tout point (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, sa différentielle en (x, y) étant l'application

$$\mathrm{d}f_{(x,y)} : (h_1, h_2) \mapsto (yx^{y-1})h_1 + (x^y \ln x)h_2.$$

Le nombre cherché peut être considéré comme la valeur accrue de cette fonction à partir de $a = (1, 3),\ h = (0,02; 0,01)$, la valeur initiale de la fonction étant $f(a) = 1^3 = 1$. Par suite,

$$1,02^{3,01} = f(a + h) \simeq f(a) + \mathrm{d}f_a(h) = 1 + (3.1).0,02 + (1.\ln 1).0,01 = 1,06.$$

Proposition 5 *Si une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \Omega$, alors*

i) *f est continue en a ;*

ii) *f admet en a une dérivée directionnelle selon tout vecteur $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et cette dérivée vaut $\mathrm{d}f_a(h)$, i.e.*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \mathrm{d}f_a(h). \tag{12}$$

En particulier, f admet en a des dérivées partielles et $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \mathrm{d}f_a(\mathbf{e}_j)$.

Preuve.

i) Par définition, on a pour tout h au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \|h\| \, \varepsilon_a(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon_a(h) = 0.$$

L'application linéaire $\mathrm{d}f_a$ étant continue sur $\mathbb{R}^n$, on a $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{d}f_a(h) = \mathrm{d}f_a(0) = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. Cela exprime la continuité de f.

ii) Soit $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$ proche de 0, on a

$$f(a+th) = f(a) + \mathrm{d}f_a(th) + \|th\| \, \varepsilon_a(th) = f(a) + t\mathrm{d}f_a(h) + o_0(t).$$

Cela prouve que $\psi_h : t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0 de dérivée $\mathrm{d}f_a(h)$.

■

Le corollaire suivant indique que la différentielle en a d'une fonction différentiable en a peut être exprimée à l'aide des dérivées partielles en a.

Corollaire 1 *Si une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \Omega$, sa différentielle en a est donnée par*

$$\mathrm{d}f_a(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \qquad \forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Par conséquent, pour tout h au voisinage de 0, on a

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o\left(\|h\|\right). \tag{14}$$

Preuve. Le fait que les dérivées partielles de f existent au point a résulte de la proposition précédente appliquée avec les vecteurs de la base canonique. Par linéarité de $\mathrm{d}f_a$, l'égalité (12) donne

$$\mathrm{d}f_a(h) = \mathrm{d}f_a\left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{d}f_a(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_j}(a) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

■

Remarque 7 (Notation différentielle) En notant $\mathrm{d}x_j$ la projection canonique $p_j : h \in \mathbb{R}^n \mapsto h_j$, i.e. $\mathrm{d}x_j(h) = h_j$, la formule (13) permet d'écrire :

$$\mathrm{d}f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\mathrm{d}x_j.$$

On notera que la proposition 5 ci-dessus n'admet pas de réciproque : l'existence de dérivées directionnelles selon tous les vecteurs en un point a ne garantit pas la différentiabilité de f en ce point. Cependant, on a

Corollaire 2 (Condition nécessaire et suffisante de différentiabilité) *Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \Omega$ si et seulement si*

i) *f admet des dérivées partielles en a et*

ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{\|h\|} = 0.$

En vertu de la relation (13) du corollaire 1, on a

Corollaire 3 *Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \Omega$, alors on a*

$$\forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad (\mathrm{d}f_a(h))^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(f_1)_a(h) \\ \vdots \\ \mathrm{d}(f_p)_a(h) \end{pmatrix} = \mathbf{J}(f)_a \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne $\mathbf{J}(f)_a$ est donc la matrice représentant l'application linéaire $\mathrm{d}f_a$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Dans le cas des fonctions numériques de deux variables réelles, on a :

Proposition 6 (Plan tangent, normale à une surface) *Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$, alors la surface S (dans $\mathbb{R}^3$) d'équation $z = f(x, y)$ (i.e. le graphe de f) admet un plan tangent au point $M_0\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ et ce plan a pour équation*

$$z - z_0 = \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(x - x_0, y - y_0),$$

soit

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

où $z_0 = f(x_0, y_0)$.

La <u>normale</u> à la surface S au point de tangence M_0 (i.e. la droite passant par M_0 et orthogonale au plan tangent) a pour équation

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1},$$

soit

$$\begin{cases} (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(z-z_0) = 0, \\ (y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(z-z_0) = 0. \end{cases}$$

Exemple 12 Pour la surface d'équation $z = \sin(x+y)$, le plan tangent en $M_0(0,0,0)$ a pour équation $z = x+y$. La normale à S au point M_0 a pour équation $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$, i.e.

$$\begin{cases} x+z = 0, \\ y+z = 0. \end{cases}$$

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, la notion de différentiabilité coïncide avec celle de dérivabilité comme le stipule la proposition suivante.

Proposition 7 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en un point $a \in I$ si, et seulement si, elle est dérivable en ce point. Dans ce cas, la différentielle de f en a est*

$$\mathrm{d}f_a : h \in \mathbb{R} \mapsto hf'(a),$$

où $f'(a)$ désigne la dérivée de f en a ([1]). En particulier $f'(a) = \mathrm{d}f_a(1)$.

2.2 Différentiabilité sur un ouvert, fonctions de classe C^1

Définition 6 *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est dite <u>différentiable sur Ω</u> si elle est différentiable en tout point x de Ω.*

Dans ce cas, on appelle <u>différentielle</u> de f et on note $\mathrm{d}f$ la fonction

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & \Omega & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ & x & \mapsto & \mathrm{d}f_x \end{array}$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ désigne l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Si de plus $\mathrm{d}f$ est <u>continue</u> sur Ω, i.e.

$$\lim_{x \to a} \mathrm{d}f_x = \mathrm{d}f_a\ , \quad \forall a \in \Omega,$$

[1]) Notons que $h \in \mathbb{R}$ est un scalaire et $f'(a)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$, c'est pourquoi on les a écrits dans cet ordre.

on dit que f est continûment différentiable (ou que f est de classe C^1) sur Ω.
On note $C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur l'ouvert Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Remarque 8 Ne pas confondre $\mathrm{d}f$ et sa valeur en x, $\mathrm{d}f_x$. En particulier, la continuité de $\mathrm{d}f$ n'a rien à voir avec la continuité de $\mathrm{d}f_x$. Cette dernière est par définition linéaire donc continue alors que $\mathrm{d}f$ n'a aucune raison d'être linéaire en général.

Remarque 9 Une fonction différentiable n'est pas nécessairement de classe C^1. Par exemple, la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (Voir TD).

Exemple 13 On a vu qu'une fonction constante $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en tout point $x \in \Omega$ et que $\mathrm{d}f_x = 0$ *(application nulle sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$)*. Donc sa différentielle $\mathrm{d}f$ est la fonction nulle sur Ω. Cette dernière étant continue, on déduit que f est continûment différentiable sur Ω.

Exemple 14 On a vu qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, et que $\mathrm{d}f_x = f$. Sa différentielle $\mathrm{d}f$ est donc la fonction constante $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f$ et par suite continue sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 15 On a vu que la fonction $f : (x,y) \mapsto xy$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, sa différentielle en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est l'application $\mathrm{d}f_{(x,y)} : h \mapsto yh_1 + xh_2$. On vérifie que $\mathrm{d}f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et par conséquent f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \mathrm{d}f_{(x,y)}(h) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} (yh_1 + xh_2) = bh_1 + ah_2 = \mathrm{d}f_{(a,b)}(h), \quad \forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque 10 (Lien avec le caractère C^1 des fonctions composantes) Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^1 sur Ω si et seulement si ses p fonctions composantes $f_1, ..., f_p$ sont de classe C^1 sur Ω.
Ainsi, par exemple, la fonction $(x,y) \mapsto (x+y, xy)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses composantes le sont.

La proposition suivante donne une caractérisation des fonctions de classe C^1.

Proposition 8 (Caractérisation des fonctions C^1) *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^1 sur Ω si, et seulement si, les n fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ $(1 \leq j \leq n)$ sont définies et continues sur Ω.*

Exemple 16 Une fonction polynômiale en $(x_1, ..., x_n)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ puisqu'elle admet des dérivées partielles qui sont encore polynômiales, donc continues sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 17 La fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $r(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|x\|_2$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ car ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = \frac{x_j}{r(x)} = \frac{x_j}{\|x\|_2}$$

sont continues sur Ω comme quotient de deux fonctions continues sur Ω, le dénominateur ne s'annulant pas sur Ω.

Corollaire 4 *Si toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues au voisinage d'un point $a \in \Omega$ (i.e. sur une boule ouverte de centre a), alors f est différentiable en a.*

Récapitulation

Schématiquement, on peut retenir que

$$\boxed{f \text{ admet des dérivées partielles } \tfrac{\partial f}{\partial x_j} \text{ continues sur } \Omega}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \Omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f \text{ est différentiable sur } \Omega}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{f \text{ admet des dérivées partielles } \tfrac{\partial f}{\partial x_j} \text{ en tout point de } \Omega} \quad \boxed{f \text{ est continue (de classe } C^0) \text{ sur } \Omega}$$

La réciproque de chacune des implications ci-dessus est fausse. En particulier, il n'y a aucune relation de causalité entre les deux assertions en bas : l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité, et la continuité n'implique pas l'existence de dérivées partielles.

2.3 Opérations sur les fonctions différentiables

Proposition 9 *Si f et g sont deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}^p$ différentiables en $a \in \Omega$, alors*

1. *leur somme $f + g$ est différentiable en a, de différentielle*

$$\mathrm{d}(f+g)_a = \mathrm{d}f_a + \mathrm{d}g_a.$$

2. *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction αf est différentiable en a, de différentielle*

$$\mathrm{d}(\alpha f)_a = \alpha\, \mathrm{d}f_a.$$

Cette proposition signifie que l'ensemble des fonctions différentiables sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est un espace vectoriel.

Proposition 10 *Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (fonction numérique) et $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions différentiables en $a \in \Omega$. Alors,*

1. *le produit $fg : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en a, de différentielle*

$$\mathrm{d}(fg)_a(h) = \mathrm{d}f_a(h)g(a) + f(a)\mathrm{d}g_a(h), \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

2. *si f ne s'annule pas sur Ω, alors $1/f$ est différentiable en a, de différentielle*

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)_a(h) = -\frac{\mathrm{d}f_a(h)}{f(a)^2}, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

De cette proposition découle l'important résultat suivant.

Corollaire 5

1. *Toute fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$.*
2. *Toute fonction rationnelle sur $\mathbb{R}^n$ est différentiable en tout point où son dénominateur ne s'annule pas.*

La propriété suivante généralise la règle de dérivation pour la composée de fonctions d'une variable réelle.

Proposition 11 (Règle de la chaîne) *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable en $a \in \Omega$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $f(\Omega)$ et $g : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction différentiable en $b = f(a)$. Alors, la fonction composée $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ est différentiable en a, de différentielle*

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_b \circ \mathrm{d}f_a \qquad (\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)), \tag{15}$$

i.e.

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a(h) = \mathrm{d}g_b\left(\mathrm{d}f_a(h)\right), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

En termes matriciels on obtient

$$\mathbf{J}(g \circ f)_a = \mathbf{J}(g)_b \times \mathbf{J}(f)_a. \tag{16}$$

Si on note $x_1, ..., x_n$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ et $y_1, ..., y_p$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^p$ cela donne

$$\forall i = 1, ..., q, \quad \forall j = 1, ..., n, \qquad \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a), \tag{17}$$

où les fonctions $(g \circ f)_i$, g_i et f_k correspondent aux fonctions composantes de $g \circ f$, g et f respectivement.

Remarque 11 Dans le cas d'une seule variable ($n = 1$), la relation (17) s'écrit :

$$\forall i = 1, ..., q, \qquad (g \circ f)_i'(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) f_k'(a). \tag{18}$$

Exemple 18 Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $f : (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On note

$$\psi(r, \theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Clairement, $\psi = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Puisque les fonctions g et f sont toutes les deux différentiables, d'après la proposition 11, la composée $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Calculons les dérivées partielles de ψ :

- <u>Par utilisation de la règle de la chaîne (17).</u>

  Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(r, \theta)) \frac{\partial f_1(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}(f(r, \theta)) \frac{\partial f_2(r, \theta)}{\partial r} \\
&= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial r} \\
&= \cos\theta \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta),
\end{aligned}$$

  et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(r, \theta)) \frac{\partial f_1(r, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial y}(f(r, \theta)) \frac{\partial f_2(r, \theta)}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial \theta} \\
&= -r\sin\theta \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).
\end{aligned}$$

– Par la relation matricielle (16).

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial\psi}{\partial\theta}(r,\theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(f(r,\theta)) & \frac{\partial g}{\partial y}(f(r,\theta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(r,\theta)}{\partial r} & \frac{\partial f_1(r,\theta)}{\partial\theta} \\ \frac{\partial f_2(r,\theta)}{\partial r} & \frac{\partial f_2(r,\theta)}{\partial\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) & \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \\ -r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}.
\end{aligned}$$

Remarque 12 Dans le cas d'une fonction

$$\varphi : t \in I \mapsto g(f_1(t), ..., f_p(t))$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f_1, ..., f_p$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables sur I et $g : (y_1, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^p$, la formule (17) s'écrit en notant $f = (f_1, ..., f_p)$:

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = (g \circ f)'(t) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(t)) f_k'(t)$$

$$= f_1'(t)\frac{\partial g}{\partial y_1}(f_1(t), ..., f_p(t)) + \cdots + f_p'(t)\frac{\partial g}{\partial y_p}(f_1(t), ..., f_p(t)).$$

Exemple 19 Etant donné la fonction $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2 + 3xy$, on considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = g(2 + \cos t, \sin t)$.
Comme les fonctions $f_1 : t \mapsto 2 + \cos t$ et $f_2 : t \mapsto \sin t$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynômiale), la formule ci-dessus permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f_1(t), f_2(t))\, f_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(f_1(t), f_2(t))\, f_2'(t) \\
&= 3\cos 2t - 2\sin 2t + 2(3\cos t - 2\sin t).
\end{aligned}$$

Proposition 12 *Soient Ω et U deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \Omega \to U$ un homéomorphisme. Si f est différentiable en un point $a \in \Omega$ et sa différentielle $\mathrm{d}f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire inversible (bijective), i.e.*

$$\det(\mathbf{J}(f)_a) = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(a) \neq 0, \tag{19}$$

alors la fonction réciproque f^{-1} est différentiable au point $f(a)$ de U, et l'on a

$$\mathrm{d}\left(f^{-1}\right)_{f(a)} = \left(\mathrm{d}f_a\right)^{-1},$$

soit

$$\mathbf{J}\left(f^{-1}\right)_{f(a)} = \left(\mathbf{J}(f)_a\right)^{-1}. \tag{20}$$

Les fonctions de classe C^1 jouissent de propriétés analogues à celles des fonctions différentiables vis-à-vis des différentes opérations.

Proposition 13 *Soient $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha f + \beta g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$. Autrement dit, $C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$ a une structure d'espace vectoriel.*

Proposition 14 *Etant donné $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$, le produit $fg \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$.*

Proposition 15 *Soit $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas sur Ω. Alors $1/f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.*

Proposition 16 *Etant donné un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$ avec $f(\Omega) \subset U$ et $g \in C^1(U, \mathbb{R}^q)$, alors $g \circ f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$.*

Exemple 20 La fonction $r : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2$ est de classe C^1 sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme composée de la fonction polynômiale $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ de $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction racine carrée de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
En revanche, elle n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, car sa première fonction partielle en $(0, 0)$: $t \mapsto r(t, 0) = |t|$ n'est pas dérivable en 0.

Méthode. Comment établir qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est différentiable (de classe C^1) ?

Etablir qu'une fonction est différentiable (de classe C^1) en ayant recours à la définition n'est pas toujours aisé. Aussi, pour montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est différentiable (de classe C^1), on montrera en général qu'on peut l'obtenir par des combinaisons linéaires, des produits, des quotients ou composées de fonctions polynômiales avec des fonctions usuelles d'une variable réelle dérivables (de classe C^1).

Exemple 21 La fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{\sin(x + y + xy)}{\cosh x + \cosh y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe C^1 :

– le numérateur comme composée de la fonction sinus, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et de la fonction polynômiale $(x,y) \mapsto x+y+xy$.
– le dénominateur comme somme de composées de la fonction cosinus hyperbolique, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec les fonctions polynômiales $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$.

2.4 Vecteur et champ gradient d'une fonction numérique

Considérons maintenant le cas d'une fonction numérique.

Définition 7 (Vecteur gradient) *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction, à valeurs réelles, admettant des dérivées partielles au point $a \in \Omega$. On appelle (vecteur) gradient de f en a, et on note* $\operatorname{grad} f(a)$ *ou* $\nabla f(a)$ *(qui se lit "nabla f de a") le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont les dérivées partielles de f :*

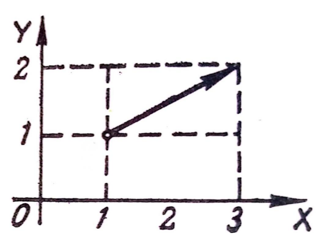
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Le gradient de f en a n'est rien d'autre que la matrice jacobienne $\mathbf{J}(f)_a$ qui se réduit dans ce cas à une matrice ligne.

Exemple 22 Calculons et construisons le gradient de la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 y$ au point $(1,1)$.
Calculons les dérivées partielles et leurs valeurs au point $(1,1)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\nabla f(1,1) = (2,1)$.



Proposition 17 *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point $a \in \Omega$, alors le gradient $\nabla f(a)$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on ait*

$$\mathrm{d}f_a(h) = \nabla f(a) \cdot h. \tag{21}$$

Preuve. C'est clair d'après la relation (13). ■

Combinant (21) avec (12), on obtient la relation

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \nabla f(a) \cdot h. \tag{22}$$

Les opérations algébriques sur les fonctions numériques différentiables se traduisent en terme de gradient de la façon suivante :

Proposition 18 *Si $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables en $a \in \Omega$, alors*

1. *Pour tous réels α, β, on a*
$$\nabla (\alpha f + \beta g)(a) = \alpha \nabla f(a) + \beta \nabla g(a).$$
2. $\nabla (fg)(a) = g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a).$
3. *Si f ne s'annule pas sur Ω,*
$$\nabla \left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{\nabla f(a)}{f(a)^2}.$$

On remarque la similarité de ces relations avec les formules concernant la dérivation des fonctions d'une seule variable.

Définition 8 (Champ gradient) *Si une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en tout point de Ω, on définit l'application*

$$\begin{array}{rccl} \nabla f : & \Omega \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & \nabla f(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right), \end{array}$$

appelée le <u>*(champ) gradient*</u> *de f sur Ω, et notée*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Exemple 23 Le gradient de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$ est :

$$\begin{array}{rccl} \nabla f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = e^{-(x^2+y^2)}\left(1-2x^2, -2xy\right). \end{array}$$

Fonctions à gradient nul sur un ouvert connexe

Le résultat suivant concerne les fonctions avec des dérivées partielles nulles sur un ouvert <u>connexe</u> de $\mathbb{R}^n$, et généralise le fait analogue dans le cas d'une seule variable, où une dérivée est nulle sur un intervalle.

Proposition 19 (Fonction à gradient nul) *Si une fonction numérique f a un gradient nul en tout point d'un* <u>*ouvert connexe*</u> *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors f est constante sur Ω.*

3 Dérivées partielles d'ordre supérieur, fonctions de classe C^k

3.1 Dérivées partielles d'ordre 2

Supposons que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable au voisinage $B(a, r)$ d'un point $a \in \Omega$. Chaque fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est définie dans ce voisinage et donc susceptible d'avoir elle-même n dérivées partielles en a.
Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ admet en a une dérivée partielle par rapport à la i-ième variable, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}(a),$$

cette dernière s'appelle une <u>dérivée partielle seconde ou d'ordre 2</u> de f en a et se note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \quad \text{ou} \quad \partial^2_{ij} f(a) \qquad \text{si } i \neq j,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a) \quad \text{ou} \quad \partial^2_{jj} f(a) \qquad \text{si } i = j.$$

Pour calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, on dérive f d'abord par rapport à x_j, puis par rapport à x_i et on évalue ensuite l'expression obtenue en a. Par exemple, pour une fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de deux variables, il peut exister quatre dérivées secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exercice 1 Calculer, en tous les points (x, y) où elles sont définies, toutes les dérivées partielles secondes de la fonction de deux variables

$$f : (x, y) \mapsto x^2 \sin y.$$

Définition 9 *On dit que f est de classe C^2 sur Ω si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues sur Ω.*

Étant donné une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ admettant des dérivées secondes en $a \in \Omega$, il peut arriver que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \text{pour } i \neq j,$$

autrement dit l'ordre des dérivations ne peut pas être permuté en général.
Nous admettons le résultat suivant :

Théorème 20 (de Schwarz) *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction.*

- *Si pour $i \neq j$, les deux dérivées partielles secondes mixtes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent au voisinage d'un point $a \in \Omega$ et sont continues en a, alors*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$
- *Si f est de classe C^2 sur Ω, alors pour tous $i, j = 1, ..., n$:*
$$\forall x \in \Omega, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition 10 (Matrice hessienne) *Soit f une fonction numérique définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, admettant des dérivées partielles secondes en un point $a \in \Omega$. On appelle **la matrice hessienne de f en** a la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbf{H}_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Le théorème de Schwarz implique que si f est une fonction de classe C^2 sur Ω alors sa matrice hessienne en tout point $a \in \Omega$ est symétrique.

Exemple 24 La matrice hessienne de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 \sin y$ en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ est
$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \sin y & 2x \cos y \\ 2x \cos y & -x^2 \sin y \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Vérifier que la fonction suivante est de classe C^2 et calculer sa matrice hessienne :
$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \sin(xyz).$$

Définition 11 *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On appelle laplacien de f la fonction définie sur Ω par*
$$\Delta f : x \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{H}_f(x)\right).$$

Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\Delta f = 0$ sur Ω est dite fonction harmonique.

3.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Les dérivées partielles secondes d'une fonction, si elles existent, peuvent à leur tour admettre des dérivées partielles, ce qui conduit à la notion de dérivée partielle d'ordre 3 :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial xj}\right)\right).$$

On peut ainsi définir plus généralement les dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$, lorsqu'elles existent, comme les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre $k-1$. Les dérivées partielles d'ordre k sont notées :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right)\right)\right)$$

où $i_1, ..., i_k$ sont des indices choisis dans $\{1, ..., n\}$ qui correspondent aux variables par rapports auxquelles on dérive successivement.

Définition 12

- *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^k sur Ω si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k inclus existent et sont continues sur Ω.*
- *On dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^∞ sur Ω si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*
- *Pour $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, on note $C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions définies sur l'ouvert Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ qui sont de classe C^k sur Ω. Les symboles $C^0(\Omega, \mathbb{R}^p)$ et $C(\Omega, \mathbb{R}^p)$ sont reservés à l'ensemble des fonctions continues.*

Exemple 25 Une fonction polynômiale en $(x_1, ..., x_n)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ puisqu'elle admet des dérivées partielles de tout ordre $k \in \mathbb{N}^*$ qui sont encore polynômiales, donc continues sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 13 On montre par récurrence, à l'aide du théorème de Schwarz, que si f est une fonction de classe C^k, l'ordre des dérivations dans la dérivée :

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}} \qquad \text{où } 2 \leq m \leq k,$$

n'a pas d'importance. Une telle dérivée s'écrira donc aussi :

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad \text{avec} \quad (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \quad \text{et} \quad \alpha_1 + ... + \alpha_n = m.$$

Remarque 14 Notons que si $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est une fonction de classe C^k avec $k \geq 2$, alors elle est aussi de classe C^{k-1} ; en d'autres termes on a les inclusions suivantes :

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p) \subset \cdots \subset C^k(\Omega, \mathbb{R}^p) \subset C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^p) \subset \cdots \subset C^1(\Omega, \mathbb{R}^p) \subset C(\Omega, \mathbb{R}^p).$$

Remarque 15 Une fonction est de classe C^k, avec $k \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k-1$ sont de classe C^1.

Les résultats concernant les opérations sur les fonctions de classe C^1 permettent de voir que :

Proposition 21 *Pour $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$,*

- *l'ensemble $C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de $C(\Omega, \mathbb{R}^p)$; i.e. si $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ et $g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \beta g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$.*
- *les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_j}$ de dérivation partielle sont des applications linéaires de $C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ dans $C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ si $k \in \mathbb{N}^*$, des endomorphismes de $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$ si $k = \infty$;*
- *si $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ et $g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$, alors $fg \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$;*
- *si $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ ne s'annule pas sur Ω, alors le quotient $1/f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$;*
- *si $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ et $g \in C^k(U, \mathbb{R}^q)$, avec $f(\Omega) \subset U$, alors $g \circ f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^q)$.*

Corollaire 6 *Toute fonction rationnelle est de classe C^∞ sur tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans lequel son dénominateur ne s'annule pas.*