Chapitre 3
Fonctions de plusieurs variables : Calcul différentiel

Prof. Merazga Nabil

31 mars 2024

Le présent chapitre est consacré aux notions de base du calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables et des théorèmes fondamentaux qui lui sont attachés.
Fixons quelques notations utilisées de façon constante dans tout ce chapitre :
n, p et q désignent trois entiers naturels non nuls.
Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

1 Différentiabilité

1.1 Dérivation suivant un vecteur, dérivées partielles

Définition 1 (Dérivée directionnelle) *Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul donné. On dit que la fonction f est dérivable en un point $a = (a_1, ..., a_n)$ de Ω selon le vecteur $\mathbf{v}$ (ou dans la direction du vecteur $\mathbf{v}$) si*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\mathbf{v}) - f(a)}{t} \quad \textit{existe.} \tag{1}$$

Lorsque c'est le cas, cette limite est appelée <u>dérivée directionnelle</u> de f au point a dans la direction du vecteur $\mathbf{v}$, et notée par l'un des symboles $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a)$ ou $D_{\mathbf{v}} f(a)$.

Autrement dit, $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a)$, si elle existe, est la dérivée en 0 de la fonction

$$\psi_{\mathbf{v}} : t \mapsto f(a + t\mathbf{v}),$$

définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Exemple 1 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

possède en $a = (0,0)$ des dérivées selon toutes les directions $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = f(\mathbf{v})$.

Remarques.

1. L'existence de la dérivée directionnelle ne dépend pas du vecteur mais uniquement de sa direction. En effet, si f est dérivable en a selon un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors f est aussi dérivable en a selon tous les vecteurs de la forme $\lambda \mathbf{v}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et l'ona
$$\frac{\partial f}{\partial (\lambda \mathbf{v})}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a).$$
2. Dans le cas $n = 1$, il y a équivalence entre "dérivable" et "dérivable selon un vecteur".
3. Comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, l'existence d'une limite est indépendante de la norme choisie. En conséquence, l'existence d'une dérivée directionnelle est elle aussi indépendante du choix de la norme.

Exemple 2 Soit la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - 2xy + |\sin y|$ et $a = (0,0)$.
f n'est pas dérivable en a selon le vecteur $\mathbf{v}_1 = (2,1)$, car le taux d'accroissement :

$$\frac{f(a + t\mathbf{v}_1) - f(a)}{t} = \frac{f(0+2t, 0+t) - f(0,0)}{t} = \frac{|\sin t|}{t}, \qquad t \neq 0,$$

n'a pas de limite lorsque $t \to 0$.
f est dérivable en a selon le vecteur $\mathbf{v}_2 = (1,0)$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_2}(a) = 0$ puisque le taux d'accroissement

$$\frac{f(a + t\mathbf{v}_2) - f(a)}{t} = \frac{f(0+t, 0) - f(0,0)}{t} = t, \qquad t \neq 0,$$

admet pour limite 0 lorsque $t \to 0$.

Dans la définition 1, le cas où $\mathbf{v}$ est l'un des vecteurs de la base canonique $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ conduit à la notion suivante.

Définition 2 (Dérivée partielle)

– *On appelle j-ième dérivée partielle de f en $a \in \Omega$, lorsqu'elle existe, la dérivée de f selon le vecteur $\mathbf{e}_j$, i.e.*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\mathbf{e}_j) - f(a)}{t}.$$

On la note $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ *ou* $f'_{x_j}(a)$ *ou* $D_j f(a)$ *ou* $\partial_j f(a)$.

– *On dit que la j-ième dérivée partielle de f existe sur Ω si elle existe en tout point de Ω.*

Remarque 1 Ainsi, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_j, ..., a_n)}{t}.$$

La j-ième dérivée partielle de f en $a = (a_1, ..., a_n)$ s'obtient donc en considérant toutes les variables $x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n$ fixées, et en dérivant l'expression $f(x_1, ..., x_n)$ par rapport à la seule variable x_j en utilisant les règles usuelles de dérivation des fonctions d'une variable réelle ; on évalue ensuite l'expression obtenue en $(a_1, ..., a_n)$. *C'est donc la dérivée, au point a_j, de la fonction partielle*

$$\varphi_j^a : x_j \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_n).$$

On l'appelle aussi dérivée partielle de f par rapport à x_j ou dérivée partielle de f par rapport à la j-ième variable.

Remarque 2 Pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, les dérivées partielles sont couramment désignées par $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$, avec $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)$ comme troisième dérivée partielle lorsqu'il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3 La fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $r(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ possède des dérivées partielles en tout point différent de $0 = (0, ..., 0)$ et l'on a :

$$\frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_j}{r(x)}.$$

Exemple 4 La fonction définie sur $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $\theta(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ possède en tout point $(x, y) \in \Omega$ des dérivées partielles qui sont :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Exemple 5 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0$$

possède en $(0,0)$ deux dérivées partielles qui son nulles, puisque les deux fonctions partielles en $(0,0)$: $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont nulles. Or, on a vu que cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$. *L'existence des dérivées partielles d'une fonction en un point n'entraîne pas sa continuité en ce point.*

Notons $f_1, ..., f_p$ les fonctions composantes de f, i.e. les fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x)).$$

Proposition 1 *La fonction f admet une dérivée en $a \in \Omega$ selon le vecteur $\mathbf{v}$ si et seulement s'il en est de même pour ses fonctions composantes. On a alors*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}(a), ..., \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{v}}(a)\right).$$

En particulier, f admet des dérivées partielles en a si et seulement si ses fonctions composantes en admettent et l'on a alors

$$\forall j = 1, ..., n : \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), ..., \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a)\right).$$

On peut ainsi toujours se ramener à des fonctions scalaires (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Exemple 6 La fonction $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ possède en tout point $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ des dérivées partielles qui sont :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta).$$

1.2 Fonctions différentiables, fonctions de classe C^1

Exemple 7 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

possède en $(0,0)$ des dérivées directionnelles (nulles) suivant tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, mais n'est pas continue. Pour montrer que f dans l'exemple ci-dessus n'est pas continue en $(0,0)$, on calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x^2)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0)$ par exemple.

Ainsi, la notion de dérivée directionnelle n'est pas une notion de dérivée satisfaisante, en particulier parce que l'existence de telles dérivées pour une fonction f ne garantit même pas la continuité de cette fonction.

Définition 3 *On dit que f est différentiable (ou dérivable) en $a \in \Omega$ s'il existe une application linéaire*

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \qquad (\textit{dépendant de } a \textit{ en général})$$

telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0, \tag{2}$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

On peut reformuler la définition ci-dessus de la manière suivante :

Définition 4 *Une fonction f est différentiable en $a \in \Omega$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et une fonction ε_a définie au voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ tels que pour tout h proche de 0, on ait :*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\| \, \varepsilon_a(h) \quad \textit{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon_a(h) = 0. \tag{3}$$

Remarque 3 En utilisant les notations de Landau, la relation (3) s'écrit aussi

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|). \tag{4}$$

Proposition 2 *Si f est différentiable en $a \in \Omega$, l'application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est unique. On l'appelle différentielle (ou dérivée ou application linéaire tangente) de f en a et on la note $\mathrm{d}f_a$.*

Avec cette notation, (2), (3) et (4) se réécrivent respectivement

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f_a(h)}{\|h\|} = 0,$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \|h\| \, \varepsilon_a(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon_a(h) = 0, \\ f(a+h) &= f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Exemple 8 Toute *fonction constante* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en tout point de Ω, avec $\mathrm{d}f_a = 0$ pour tout $a \in \Omega$.

Exemple 9 Les *projections canoniques* $p_j : (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_j \in \mathbb{R}$ sont des fonctions différentiables en tout point a de $\mathbb{R}^n$, de différentielle $(\mathrm{d}p_j)_a = p_j$.

Exemple 10 Toute *application linéaire* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R}^n$, de différentielle constante $\mathrm{d}f_a = f$.

Exemple 11 La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$, sa différentielle en $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ étant l'application linéaire

$$\mathrm{d}f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (h_1, h_2) \mapsto a_2 h_1 + a_1 h_2.$$

En effet, formons la différence entre les termes $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2)$ et $f(a_1, a_2)$:

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) &= (a_1 + h_1)(a_2 + h_2) - a_1 a_2 \\ &= a_1 h_2 + a_2 h_1 + h_1 h_2. \end{aligned}$$

Dans cette expression, on identifie les termes qui sont « linéaires » en la variable $h = (h_1, h_2)$ et on pose

$$L : (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto a_1 h_2 + a_2 h_1.$$

On en déduit que le rapport

$$\frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - L(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|_2} = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

tend vers zéro quand (h_1, h_2) tend vers $(0, 0)$.

Remarque 4 Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \Omega$ si et seulement si ses p fonctions composantes $f_1, ..., f_p$ sont différentiables en a, et l'on a

$$\mathrm{d}f_a = \left(\mathrm{d}\,(f_1)_a\,, ..., \mathrm{d}\,(f_p)_a\right).$$

Exemple 12 La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ car ses fonctions composantes $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ le sont, sa différentielle au point (a_1, a_2) étant l'application :

$$\mathrm{d}f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (h_1, h_2) \mapsto (h_1 + h_2, a_2 h_1 + a_1 h_2).$$

Proposition 3 *Si une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \Omega$, alors*

i) *f est continue en a ;*

ii) *f admet en a une dérivée directionnelle selon tout vecteur $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et cette dérivée vaut $\mathrm{d}f_a(h)$, i.e.*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \mathrm{d}f_a(h). \tag{5}$$

En particulier, f admet en a des dérivées partielles et $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \mathrm{d}f_a(\mathbf{e}_j)$.

Preuve.

i) Par définition, on a pour tout h au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \|h\|\, \varepsilon_a(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon_a(h) = 0.$$

L'application linéaire $\mathrm{d}f_a$ étant continue sur $\mathbb{R}^n$, on a $\lim\limits_{h \to 0} \mathrm{d}f_a(h) = \mathrm{d}f_a(0) = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. Cela exprime la continuité de f.

ii) Soit $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$ proche de 0, on a

$$f(a+th) = f(a) + \mathrm{d}f_a(th) + \|th\|\, \varepsilon_a(th) = f(a) + t\mathrm{d}f_a(h) + o_0(t).$$

Cela prouve que $\psi_h : t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0 de dérivée $\mathrm{d}f_a(h)$.

■

Le corollaire suivant indique que la différentielle en a d'une fonction différentiable en a peut être exprimée à l'aide des dérivées partielles en a.

Corollaire 1 *Si une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \Omega$, sa différentielle en a est donnée par*

$$\mathrm{d}f_a(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \qquad \forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Par conséquent, pour tout h au voisinage de 0, on a

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o\left(\|h\|\right). \tag{7}$$

Preuve. Le fait que les dérivées partielles de f existent au point a résulte de la proposition précédente appliquée avec les vecteurs de la base canonique. Par linéarité de $\mathrm{d}f_a$, l'égalité (5) donne

$$\mathrm{d}f_a(h) = \mathrm{d}f_a\left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{d}f_a(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_j}(a) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

■

On notera par contre que la proposition 3 ci-dessus n'admet pas de réciproque : l'existence des dérivées selon tous les vecteurs en a ne suffit pas pour assurer la différentiabilité de f.

Notation différentielle En notant $\mathrm{d}x_j$ la projection canonique sur $\mathbb{R}^n$: $h \mapsto h_j$, la formule (6) permet d'écrire :

$$\mathrm{d}f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\mathrm{d}x_j.$$

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, la notion de différentiabilité coïncide avec celle de dérivabilité comme le stipule la proposition suivante.

Proposition 4 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en un point $a \in I$ si, et seulement si, elle est dérivable en ce point. Dans ce cas, la différentielle de f en a est*

$$\mathrm{d}f_a : h \in \mathbb{R} \mapsto hf'(a),$$

où $f'(a)$ désigne la dérivée de f en a ([1]). En particulier $f'(a) = \mathrm{d}f_a(1)$.

Définition 5 *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est dite différentiable sur Ω si elle est différentiable en tout point x de Ω.*
Dans ce cas, on appelle différentielle de f et on note $\mathrm{d}f$ la fonction

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & \Omega & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ & x & \mapsto & \mathrm{d}f_x \end{array}$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ désigne l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
Si de plus $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω, i.e.

$$\lim_{x \to a} \mathrm{d}f_x = \mathrm{d}f_a \ , \quad \forall a \in \Omega,$$

on dit que f est continûment différentiable (ou que f est de classe C^1) sur Ω.
On note $C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur l'ouvert Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Remarque 5 Une norme sur l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est définie par

$$|||L|||_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} = \sup_{h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0} \frac{\|L(h)\|_{\mathbb{R}^p}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

[1]) Notons que $h \in \mathbb{R}$ est un scalaire et $f'(a)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$, c'est pourquoi on les a écrits dans cet ordre.

Ainsi, l'application df sera continue sur Ω si pour tout $a \in \Omega$, on a

$$\lim_{x \to a} |||\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_a|||_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} = 0,$$

où

$$|||\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_a|||_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} = \sup_{h \in \mathbb{R}^n,\, h \neq 0} \frac{\|\mathrm{d}f_x(h) - \mathrm{d}f_a(h)\|_{\mathbb{R}^p}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

Remarque 6 Ne pas confondre df et sa valeur en x, df_x. En particulier, la continuité de df n'a rien à voir avec la continuité de df_x !! df_x est par définition linéaire donc continue, alors que df n'a aucune raison d'être linéaire en général.

Remarque 7 Une fonction différentiable n'est pas nécessairement de classe C^1. Par exemple, la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (Voir TD).

Exemple 13 On a vu qu'une *fonction constante* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en tout point $x \in \Omega$ et que d$f_x = 0$. Donc sa différentielle df est l'application nulle donc continue. On en déduit que f est continûment différentiable sur Ω.

Exemple 14 On a vu qu'une *application linéaire* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, et que d$f_x = f$. Donc sa différentielle df est l'application constante $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f$ donc continue sur $\mathbb{R}^n$ et donc f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 15 On a vu que la fonction $f : (x,y) \mapsto xy$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, sa différentielle en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est l'application $\mathrm{d}f_{(x,y)} : h \mapsto yh_1 + xh_2$. On vérifie que d$f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et par conséquent f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \mathrm{d}f_{(x,y)}(h) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} (yh_1 + xh_2) = bh_1 + ah_2 = \mathrm{d}f_{(a,b)}(h), \quad \forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque 8 (Lien avec le caractère C^1 des fonctions composantes) Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^1 sur Ω si et seulement si ses p fonctions composantes $f_1, ..., f_p$ sont de classe C^1 sur Ω.
Ainsi, par exemple, la fonction $(x,y) \mapsto (x+y, xy)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses composantes le sont.

Lorsque la fonction f admet des dérivées partielles en tout point de Ω, on peut définir les fonctions dérivées partielles ; ce sont des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial x_j} : & \Omega & \to & \mathbb{R}^p \\ & x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) \end{array}$$

Les dérivées partielles permettent de caractériser les fonctions de classe C^1 :

Proposition 5 (Caractérisation des fonctions C^1) *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^1 sur Ω, ou continûment différentiable sur Ω, si et seulement si les n dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ $(1 \leq j \leq n)$ de f existent en tout point de Ω, et sont des fonctions continues sur Ω.*

Exemple 16 Une fonction polynômiale en $(x_1, ..., x_n)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ puisqu'elle admet des dérivées partielles qui sont encore polynômiales, donc continues sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 17 La fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $r(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|x\|_2$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ car ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = \frac{x_j}{r(x)}$$

sont continues sur Ω. En effet :

- $x \mapsto x_j$ est continue,
- r est continue comme composée de la fonction racine, continue sur $\mathbb{R}_+$, et d'une fonction polynômiale à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
- le quotient est une fonction continue sur Ω puisque r ne s'annule pas sur Ω.

Corollaire 2 *Si toutes les dérivées partielles de f sont définies au voisinage d'un point $a \in \Omega$ et continues en a, alors f est différentiable en a.*

Récapitulation

Schématiquement, on peut retenir que

$$\boxed{f \text{ admet des dérivées partielles } \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ continues sur } \Omega}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \Omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f \text{ est différentiable sur } \Omega}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{f \text{ admet des dérivées partielles } \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ en tout point de } \Omega} \quad \boxed{f \text{ est continue (de classe } C^0) \text{ sur } \Omega}$$

Chacune des implications inverses étant fausse. En particulier, il n'y a aucune relation de causalité entre les deux assertions en bas : l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité, et la continuité n'implique pas l'existence de dérivées partielles.

1.3 Opérations sur les fonctions différentiables

Proposition 6 *Si f et g sont deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}^p$ différentiables en $a \in \Omega$, alors*

1. *leur somme $f + g$ est différentiable en a, de différentielle*

$$\mathrm{d}(f+g)_a = \mathrm{d}f_a + \mathrm{d}g_a.$$

2. *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction αf est différentiable en a, de différentielle*

$$\mathrm{d}(\alpha f)_a = \alpha\, \mathrm{d}f_a.$$

Cette proposition signifie que l'ensemble des fonctions différentiables sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est un espace vectoriel.

Proposition 7 *Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions différentiables en $a \in \Omega$. Alors,*

1. *le produit $fg : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en a, de différentielle*

$$\mathrm{d}(fg)_a(h) = \mathrm{d}f_a(h)g(a) + f(a)\mathrm{d}g_a(h), \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

2. si f ne s'annule pas sur Ω, alors $1/f$ est différentiable en a, de différentielle

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)_a(h) = -\frac{\mathrm{d}f_a(h)}{f(a)^2}, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

De cette proposition découle l'important résultat suivant.

Corollaire 3

1. *Toute fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$.*
2. *Toute fonction rationnelle est différentiable en tout point où son dénominateur ne s'annule pas.*

La propriété suivante généralise la règle de dérivation pour la composée de fonctions d'une variable réelle.

Proposition 8 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable en $a \in \Omega$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $f(\Omega)$ et $g : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction différentiable en $b = f(a)$. Alors, la fonction composée $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ est différentiable en a, de différentielle*

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_b \circ \mathrm{d}f_a \qquad (\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)), \tag{8}$$

i.e.

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a(h) = \mathrm{d}g_b\left(\mathrm{d}f_a(h)\right), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 9 *Soient Ω et U deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \Omega \to U$ un homéomorphisme. Si f est différentiable en un point $a \in \Omega$ et si sa différentielle $\mathrm{d}f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire inversible (bijective), alors la fonction réciproque f^{-1} est différentiable au point $f(a)$ de U, et l'on a*

$$\mathrm{d}\left(f^{-1}\right)_{f(a)} = \left(\mathrm{d}f_a\right)^{-1}.$$

Les fonctions de classe C^1 jouissent de propriétés analogues à celles des fonctions différentiables vis-à-vis des différentes opérations.

Proposition 10 *Soient $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha f + \beta g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$. Autrement dit, $C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$ a une structure d'espace vectoriel.*

Proposition 11 *Etant donné $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$,*

1. *le produit $fg \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$;*
2. *si f ne s'annule pas sur Ω, alors $1/f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.*

Proposition 12 *Etant donné un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$ avec $f(\Omega) \subset U$ et $g \in C^1(U, \mathbb{R}^q)$, alors $g \circ f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$.*

Exemple 18 La fonction $r : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2$ est de classe C^1 sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme composée de la fonction racine carrée de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction polynômiale $(x, y) \in \Omega \mapsto x^2 + y^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

En revanche, elle n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, car sa fonction partielle en $(0, 0)$: $t \mapsto r(t, 0) = |t|$ n'est pas dérivable en 0.

Méthode. Comment établir qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est différentiable (de classe C^1) ?

Etablir qu'une fonction est différentiable (de classe C^1) en ayant recours à la définition n'est pas toujours aisé. Aussi, pour montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est différentiable (de classe C^1), on montrera en général qu'on peut l'obtenir par des combinaisons linéaires, des produits, des quotients ou composées de fonctions polynômiales avec des fonctions usuelles d'une variable réelle dérivables (de classe C^1).

Exemple 19 La fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{\sin(x + y + xy)}{\cosh x + \cosh y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe C^1 :

- le numérateur comme composée de la fonction sinus, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et de la fonction polynômiale $(x, y) \mapsto x + y + xy$.
- le dénominateur comme somme de composées de la fonction cosinus hyperbolique, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec les fonctions polynômiales $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$.

1.4 Matrice jacobienne, opérateurs différentiels classiques

1.4.1 Matrice jacobienne

Définition 6 (Matrice jacobienne, Jacobien) *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction, de composantes $(f_1, ..., f_p)$, différentiable en un point $a \in \Omega$. On appelle matrice jacobienne de*

f en a et on note $\mathbf{J}(f)_a$ la matrice définie par :

$$\mathbf{J}(f)_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Lorsque $n = p$, on appelle jacobien de f en a le déterminant de la matrice jacobienne de f en a : $\det(\mathbf{J}(f)_a)$ *noté également*

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(a) \quad ou \quad \frac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}(a).$$

On l'appelle aussi déterminant fonctionnel de f (ou des n fonctions scalaires f_i) au point a.

Remarques.

1. Le $j-$ième vecteur colonne de la matrice jacobienne est constitué des coordonnées, dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, de la $j-$ième dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.
2. En particulier, lorsque $n = 1$, la matrice jacobienne de f est la matrice colonne représentant le vecteur $f'(a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$:
$$\mathbf{J}(f)_a = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_p'(a) \end{pmatrix}.$$
3. Lorsque $p = 1$, la matrice jacobienne de f est la matrice ligne :
$$\mathbf{J}(f)_a = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Exemple 20 La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car ses fonctions composantes $f_1 : (x, y) \mapsto x + y$ et $f_2 : (x, y) \mapsto xy$ le sont. Pour $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1, a_2), \frac{\partial f_2}{\partial x}(a_1, a_2)\right) = (1, a_2), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1, a_2), \frac{\partial f_2}{\partial y}(a_1, a_2)\right) = (1, a_1). \end{aligned}$$

La matrice jacobienne de f en $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ vaut

$$\mathbf{J}(f)_{(a_1,a_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1, a_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a_1, a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

et le jacobien de f en (a_1, a_2) qui est le déterminant de cette matrice vaut :

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}(a_1, a_2) = a_1 - a_2.$$

Exemple 21 (Coordonnées polaires) Soit la fonction

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (r, \theta) \mapsto (r \cos\theta, r \sin\theta).$$

Par le corollaire 2, Φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Sa matrice jacobienne au point (r, θ) est :

$$\mathbf{J}(\Phi)_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et son jacobien est

$$\det\left(\mathbf{J}(\Phi)_{(r,\theta)}\right) = r.$$

Exercice 1 *Ecrire la matrice jacobienne de la fonction* $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xyz, x^2y + y)$ *en tout point de* $\mathbb{R}^3$.

En vertu de la relation (6) du corollaire 1, on a

Proposition 13 *Si* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *est différentiable en* $a \in \Omega$*, la matrice* $\mathbf{J}(f)_a$ *est la matrice, dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^p$*, de l'application linéaire* $\mathrm{d}f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$*, i.e.*

$$\forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{d}f_a(h) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(f_1)_a(h) \\ \vdots \\ \mathrm{d}(f_p)_a(h) \end{pmatrix} = \mathbf{J}(f)_a \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

En utilisant la matrice jacobienne, on peut reformuler les propositions 8 et 9 comme suit :

Proposition 14 (Règle de la chaîne) *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *une fonction différentiable en* $a \in \Omega$*,* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *contenant* $f(\Omega)$ *et* $g : U \to \mathbb{R}^q$ *une fonction différentiable en* $f(a)$*. Alors, la fonction composée* $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ *est différentiable en* a*, et l'on a la relation matricielle*

$$\mathbf{J}(g \circ f)_a = \mathbf{J}(g)_{f(a)} \times \mathbf{J}(f)_a. \tag{9}$$

Si on note $x_1, ..., x_n$ *les coordonnées dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $y_1, ..., y_p$ *les coordonnées dans* $\mathbb{R}^p$*, cela donne*

$$\forall i = 1, ..., q, \quad \forall j = 1, ..., n, \qquad \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a), \tag{10}$$

où les fonctions $(g \circ f)_i$*,* g_i *et* f_k *correspondent aux fonctions composantes de* $g \circ f$*,* g *et* f *respectivement.*

Proposition 15 *Soient* Ω *et* U *deux ouverts non vides de* $\mathbb{R}^n$*, et soit* $f : \Omega \to U$ *un homéomorphisme. Si* f *est différentiable en un point* $a \in \Omega$ *et si*

$$\det\left(\mathbf{J}(f)_a\right) = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(a) \neq 0, \tag{11}$$

alors la fonction réciproque f^{-1} *est différentiable au point* $f(a)$ *de* U*, et l'on a*

$$\mathbf{J}\left(f^{-1}\right)_{f(a)} = \left(\mathbf{J}(f)_a\right)^{-1}. \tag{12}$$

Remarque 9 Dans le cas d'une seule variable ($n = 1$), la relation (10) s'écrit :

$$\forall i = 1, ..., q, \qquad (g \circ f)_i'(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) f_k'(a). \tag{13}$$

Exemple 22 Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $f : (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On note

$$\psi(r, \theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Clairement, $\psi = g \circ f$. Puisque les fonctions g et f sont toutes les deux différentiables, la composée $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ en vertu de la proposition 8. Calculons les dérivées partielles de ψ :

- Par utilisation de la règle de la chaine (10).

  Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(r,\theta))\frac{\partial f_1(r,\theta)}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}(f(r,\theta))\frac{\partial f_2(r,\theta)}{\partial r} \\
&= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial r} \\
&= \cos\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta),
\end{aligned}$$

  et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(r,\theta))\frac{\partial f_1(r,\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial y}(f(r,\theta))\frac{\partial f_2(r,\theta)}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial \theta} \\
&= -r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).
\end{aligned}$$

– Par la relation matricielle (9).

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(f_1(r,\theta), f_2(r,\theta)) & \frac{\partial g}{\partial y}(f_1(r,\theta), f_2(r,\theta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(r,\theta)}{\partial r} & \frac{\partial f_1(r,\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2(r,\theta)}{\partial r} & \frac{\partial f_2(r,\theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) & \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ -r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}.
\end{aligned}$$

Remarque 10 Dans le cas d'une fonction

$$\varphi : t \in I \mapsto g(f_1(t), ..., f_p(t))$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f_1, ..., f_p$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables sur I et g une fonction réelle des variables réelles $y_1, ..., y_p$, différentiable sur $\mathbb{R}^p$, la formule (10) s'écrit en notant $f = (f_1, ..., f_p)$ et en observant que $\varphi = g \circ f$:

$$\begin{aligned}
\forall t \in I,\ \varphi'(t) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(t))f_k'(t) \\
&= f_1'(t)\frac{\partial g}{\partial y_1}(f_1(t), ..., f_p(t)) + \cdots + f_p'(t)\frac{\partial g}{\partial y_p}(f_1(t), ..., f_p(t)).
\end{aligned}$$

Exemple 23 Etant donné la fonction $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2 + 3xy$, on considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = g(2 + \cos t, \sin t)$.
Comme les fonctions $f_1 : t \mapsto 2 + \cos t$ et $f_2 : t \mapsto \sin t$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynômiale), la formule ci-dessus permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f_1(t), f_2(t))\, f_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(f_1(t), f_2(t))\, f_2'(t) \\
&= 3\cos 2t - 2\sin 2t + 2(3\cos t - 2\sin t).
\end{aligned}$$

1.4.2 Opérateur gradient et opérateur divergence

Considérons maintenant le cas d'une fonction **scalaire**.

Définition 7 (Vecteur gradient) *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction, à valeurs scalaires, différentiable en $a \in \Omega$. On appelle* gradient *de f en a, et on note* $\mathrm{grad}\, f(a)$ *ou* $\nabla f(a)$ *(qui se lit* *"nabla f de a") le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :*

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Le gradient de f en a n'est rien d'autre que la transposée de la matrice jacobienne $\mathbf{J}(f)_a$ qui se réduit dans ce cas à une matrice ligne.

Proposition 16 *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point $a \in \Omega$, alors le gradient $\nabla f(a)$ est l'**unique** vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on ait*

$$\mathrm{d}f_a(h) = h\nabla f(a).$$

Remarque 11 Les opérations algébriques sur les fonctions différentiables se traduisent, pour les fonctions numériques, en terme de gradient de la façon suivante :

Si $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions différentiables en $a \in \Omega$, alors :

1. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\nabla(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha \nabla f(a) + \beta \nabla g(a)$;*
2. *$\nabla(fg)(a) = g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a)$;*
3. *Si f ne s'annule pas sur Ω, $\nabla\left(\dfrac{1}{f}\right)(a) = -\dfrac{\nabla f(a)}{f(a)^2}$.*

On remarque les similitudes de ces relations avec les formules concernant la dérivation d'une fonction d'une seule variable.

Définition 8 (Opérateur gradient et opérateur divergence)

1. *Pour une fonction différentiable à valeurs scalaires, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on définit l'application*

$$\begin{array}{rccl} \nabla f : & \Omega \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & \nabla f(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^{\mathrm{t}}, \end{array}$$

appelée le <u>gradient</u> de f, et notée

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{t}}.$$

2. *Pour une fonction différentiable $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (noter l'égalité des dimensions au départ et à l'arrivée), de composantes $(f_1, ..., f_n)$, on définit l'application*

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{div} f : & \Omega \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\operatorname{div} f)(x) := \operatorname{Tr}\left(\mathbf{J}(f)_x\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x), \end{array}$$

appelée la <u>*divergence*</u> *de f.*

Exemple 24 Le gradient de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$ est :

$$\begin{array}{rccl} \nabla f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = e^{-(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 1 - 2x^2 \\ \\ -2xy \end{pmatrix}. \end{array}$$

Fonctions à gradient nul sur les ensembles connexes

Proposition 17 (Fonction à gradient nul) *Si une fonction scalaire f a un gradient nul en tout point d'un* ***ouvert connexe*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors f est constante sur Ω.*

1.5 Dérivées partielles d'ordre supérieur, fonctions de classe C^k

1.5.1 Dérivées partielles d'ordre 2

Supposons que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable au voisinage d'un point $a \in \Omega$. Chaque fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ (définie dans ce voisinage) est une fonction de n variables, donc susceptible d'avoir elle-même n dérivées partielles en a.

Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ admet en a une dérivée partielle par rapport à la i-ième variable, i.e. $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$, cette dernière s'appelle une <u>dérivée partielle seconde ou d'ordre 2</u> de f en a et se note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \quad \text{ou} \quad \partial^2_{ij} f(a) \qquad \text{si } i \neq j,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a) \quad \text{ou} \quad \partial^2_{jj} f(a) \qquad \text{si } i = j.$$

Pour calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, on dérive d'abord f par rapport à x_j, puis par rapport à x_i et on évalue ensuite l'expression obtenue en a. Par exemple, pour une fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de deux variables, il peut exister quatre dérivées secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exercice 2 *Calculer, en tous les points (x, y) où elles sont définies, toutes les dérivées partielles secondes de la fonction de deux variables*

$$f : (x, y) \mapsto x^2 \sin y.$$

Définition 9 *On dit que f est de classe C^2 sur Ω si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues sur Ω.*

Étant donné une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ admettant des dérivées secondes en $a \in \Omega$, il peut arriver que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \text{pour } i \neq j,$$

autrement dit l'ordre des dérivations ne peut pas être permuté en général. Nous admettons le résultat suivant :

Théorème 18 (de Schwarz) *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.*

- *Si pour $i \neq j$, les deux dérivées partielles secondes mixtes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent au voisinage d'un point $a \in \Omega$ et sont continues en a, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

- *Si f est de classe C^2 sur Ω, alors pour tous $i, j = 1, ..., n$:*

$$\forall x \in \Omega, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition 10 (Matrice hessienne) *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles secondes en un point $a \in \Omega$. On appelle <u>la matrice hessienne</u> de f en a la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbf{H}_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Le théorème de Schwarz implique que si f est une fonction de classe C^2 sur Ω alors sa matrice hessienne en tout point $a \in \Omega$ est *symétrique*.

Exemple 25 La matrice hessienne de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 \sin y$ en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\sin y & 2x\cos y \\ 2x\cos y & -x^2 \sin y \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 *Vérifier que la fonction suivante est de classe C^2 et calculer sa matrice hessienne :*

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \sin(xyz).$$

Définition 11 *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles secondes sur Ω. On appelle laplacien de f la fonction définie sur Ω par*

$$\Delta f : x \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{H}_f(x)\right) = \mathrm{div}(\nabla f(x)).$$

Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\Delta f = 0$ sur Ω est dite fonction harmonique.

1.5.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Les dérivées partielles secondes d'une fonction de classe C^2 peuvent à leur tour admettre des dérivées partielles, ce qui conduit à la notion de dérivée partielle d'ordre 3 :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial xj}\right)\right).$$

On peut ainsi définir plus généralement les dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$, lorsqu'elles existent, comme les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre $k-1$. Les dérivées partielles d'ordre k sont notées :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right)\right)\right)$$

où $i_1, ..., i_k$ sont des indices choisis dans $\{1, ..., n\}$ qui correspondent aux variables par rapports auxquelles on dérive successivement.

Définition 12

- *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^k sur Ω si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k inclus existent et sont continues sur Ω.*

- *On dit que* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *est de classe* C^∞ *sur* Ω *si elle est de classe* C^k *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*.*
- *Pour* $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$*, on note* $C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *l'ensemble des fonctions définies sur l'ouvert* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}^p$ *qui sont de classe* C^k *sur* Ω*. Les symboles* $C^0(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *et* $C(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *sont reservés à l'ensemble des fonctions continues.*

Remarque 12 On montre par récurrence, à l'aide du théorème de Schwarz, que si f est une fonction de classe C^k, l'ordre des dérivations dans la dérivée :

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}} \qquad \text{où } 2 \leq m \leq k,$$

n'a pas d'importance. Une telle dérivée s'écrira donc aussi :

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad \text{avec} \quad (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \quad \text{et} \quad \alpha_1 + ... + \alpha_n = m.$$

Remarque 13 Notons que si $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est une fonction de classe C^k avec $k \geq 2$, alors elle est aussi de classe C^{k-1} ; en d'autres termes on a les inclusions suivantes :

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p) \subset \cdots \subset C^k(\Omega, \mathbb{R}^p) \subset C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^p) \subset \cdots \subset C^1(\Omega, \mathbb{R}^p) \subset C(\Omega, \mathbb{R}^p).$$

Les résultats concernant les opérations sur les fonctions de classe C^1 permettent de voir que :

Proposition 19 *Pour* $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$*,*

1. *l'ensemble* $C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *est un sous-espace vectoriel de* $C(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *; i.e. si* $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *et* $g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, alors* $\alpha f + \beta g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$*.*
2. *les opérateurs* $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ *de dérivation partielle sont des applications linéaires de* $C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *dans* $C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *si* $k \in \mathbb{N}^*$*, et de* $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *dans lui-même si* $k = \infty$ *;*
3. *si* $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ *et* $g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$*, alors* $fg \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *;*
4. *si* $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ *ne s'annule pas sur* Ω*, alors le quotient* $1/f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ *;*
5. *si* $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ *et* $g \in C^k(U, \mathbb{R}^q)$*, avec* $f(\Omega) \subset U$*, alors* $g \circ f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^q)$*.*

Corollaire 4

1. *Toute fonction polynômiale en* $(x_1, ..., x_n)$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^n$*.*
2. *Toute fonction rationnelle est de classe* C^∞ *sur tout ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *dans lequel son dénominateur ne s'annule pas.*