Université d'Oum El Bouaghi — Année universitaire 2023/2024

Analyse 4 — Licence 2 - Mathématiques

FEUILLE DE TD N°3 - Calcul différentiel

Exercice 1

1. *Montrer que la fonction* $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sin(x + y)$ *est dérivable selon les deux vecteurs* $\mathbf{u} = (-1, 1)$ *et* $\mathbf{v} = (1, 1)$ *en tout point* $a \in \mathbb{R}^2$ *et calculer* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a)$.

2. *Soient* g *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* f *la fonction* $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto g(x + y)$. *Déterminer les dérivées de* f *dans toutes les directions* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ *et en tout* $a \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 *Calculer la différentielle de la fonction* $f : (x, y) \mapsto 3x^2y - 4xy$ *au point* $a = (1, 2)$. *En déduire la dérivée directionnelle de* f *au point* $a = (1, 2)$ *le long de la direction* $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 3 *Considérons la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Calculer les dérivées partielles premières de* f.

2. *Déterminer la matrice jacobienne de* f *au point* $(1, 1)$ *puis en déduire l'expression de la différentielle de* f *en* $(1, 1)$.

Exercice 4 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. *Expliquer pourquoi* f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}^2$? (On pourra passer en coordonnées polaires)

3. f *admet-elle des dérivées partielles d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{R}^2$?

4. f *est-elle de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$? (On pourra passer en coordonnées polaires)

5. f *est-elle différentiable sur* $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 *Considérons la fonction* f *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que f est de classe C^1 sur l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; y \neq 0\}$.*

2. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*

3. *Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.*

4. *Calculer les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*

5. *Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.*

Exercice 6 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :*

$$f(x,y,z) = x^3 y + x^2 - y^2 - x^4 + z^5.$$

Après vérification de la validité du théorème de Schwarz, calculer la matrice hessienne de f.

Exercice 7 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{xy}.$$

Est-elle différentiable au point $(1,0)$? Si oui, linéariser f au voisinage de $(1,0)$ et approcher la valeur $f(1.1,-0.1)$.

Exercice 8 *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0.$$

1. *Expliquer pourquoi f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.*

2. *Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x) = f(x,x).$$

   En déduire que la fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 *Soit $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable qui satisfait $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}(1,2) = -1$ et $\dfrac{\partial \theta}{\partial y}(1,2) = 3$. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(t) := \theta(t^2, 3t-1)$. Calculer $f'(1)$.*

Exercice 10 *A l'aide de la règle de la chaîne, calculer la dérivée de la fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où*

$$\begin{aligned} w(t) &= f\left(x(t), y(t), z(t)\right), \\ f\left(x,y,z\right) &= x\,\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}, \\ x(t) &= t^2, \qquad y(t) = 1, \qquad z(t) = 1+2t. \end{aligned}$$

Exercice 11 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *une fonction de classe* C^1 *et* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la fonction*

$$g(u,v) = f(\cos u + \sin v, \sin u + \cos v, \mathrm{e}^{u-v}).$$

1. *Montrer que* g *est de classe* C^1.
2. *On suppose que la matrice jacobienne de* f *au point* $a = (1,1,1)$ *est*

$$\mathbf{J}(f)_a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer la différentielle de g *au point* $b = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 12 (Coordonnées sphériques) *Soit la fonction* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$f(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi).$$

1. *Calculer les dérivées partielles de* f *par rapport aux variables* ρ, θ *et* φ.
2. *Déterminer la matrice jacobienne ainsi que le jacobien de* f.
3. *Soit* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $\mathbb{R}^3$. *Calculer les dérivées partielles de la fonction composée* $\psi = g \circ f$ *en fonction des dérivées partielles de la fonction* g.

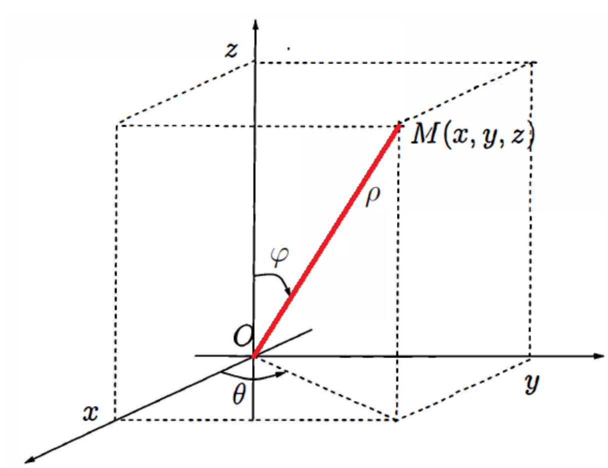


Illustration du passage en coordonnées sphériques

Exercice 13 *Soit* f *une fonction de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *Calculer les dérivées (éventuellement partielles) des fonctions suivantes :*

1. $g(x,y) = f(y,x)$,

2. $g(x) = f(x, x)$,

3. $g(x, y) = f(y, f(x, x))$,

4. $g(x) = f(x, f(x, x))$.

Exercice 14 *Montrer que la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x^3 + 3x\,\mathrm{e}^y, y - x^2)$ *est un* C^1-*difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15 *On note* $U =]0, +\infty[^2$ *et* $\varphi : (x, y) \mapsto \left(x^3y^2, \dfrac{1}{x^2y}\right)$.
Montrer que φ *est un* $C^\infty-$*difféomorphisme de* U *sur* U.

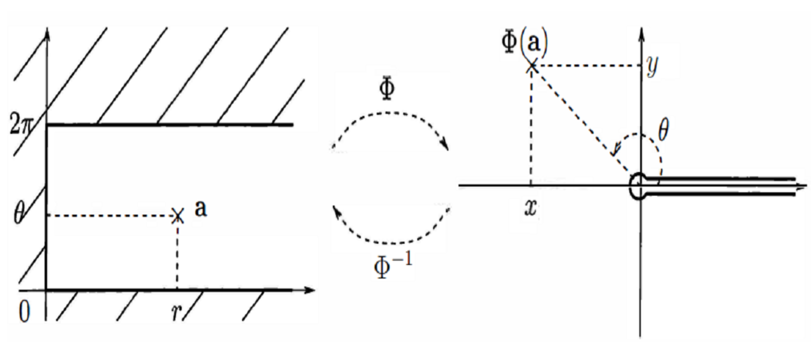
Exercice 16 *Soit la fonction* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$$

1. *Montrer que* Φ *n'est pas un* C^1-*difféomorphisme sur* $\mathbb{R}^2$.

2. *Montrer que si on restreint la fonction* Φ *à l'ouvert* $U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$, *alors on obtient une application injective.*

3. *En déduire que* Φ *est un* C^1-*difféomorphisme de* U *sur* $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geq 0\}$.



Exercice 17 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par :*

$$f(x, y) = \sin x \sin y.$$

Ecrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 *de* f *au voisinage du point* $(0, 0)$.

Exercice 18 *Soit* $f :]-1, 1[^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$f(x, y) = -\frac{1 + x}{((1 + x)^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Écrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 *de* f *au voisinage de* $(0, 0)$.