Université d'Oum El Bouaghi | Année universitaire 2023/2024

Analyse 4 | Licence 2 - Mathématiques

FEUILLE DE TD N°2 - Limites et continuité

Exercice 1 *Déterminer et représenter le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :*

1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{\sqrt{x}y}{x^2 + y^2}$
2. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$
3. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{\sin(xy)}{xy}$
4. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(xy)$
5. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{\ln(y - x)}{x}$
6. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{1 - xy}$
7. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$
8. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \ln(y^2 - x)$

Exercice 2 *Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes en* $(0, 0)$ *:*

1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
2. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{|\sin(x + y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
3. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{|x| + |y|}$
4. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{\ln(1 + xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
5. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{xy^2}{x^4 + y^3}$
6. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{xy^2}{x^4 + y^2}$

Exercice 3 *Démontrer que la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On définit la fonction* f_α *sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant un changement de variables en coordonnées polaires : $x = r \cos\theta$ *et* $y = r \sin\theta$ *avec* $r \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\theta \in [0, 2\pi[$, *étudier, suivant les valeurs de* α, *la continuité de* f_α *sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 *Démontrer que la fonction définie par* $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$ *se prolonge en une fonction continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 *Montrer que la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2 + y^2}$$

n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Exercice 7 *Montrer que toute application linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$ *est lipschitzienne et donc uniformément continue.*