Université d'Oum El Bouaghi | Année universitaire 2023/2024
Analyse 4 | Licence 2 - Mathématiques

FEUILLE DE TD N°1

Exercice 1 *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur un espace vectoriel E. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a l'inégalité*

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|\,.$$

Exercice 2 *Rappelons les normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$:*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|\,, \quad \text{pour } x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

et utilisons les notations B_1, B_2 et B_∞ pour désigner les boules dans $\mathbb{R}^n$ correspondant à chacune de ces normes.

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a les inégalités*

   $$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty\,.$$

   Qu'en déduit-on ?

2. *Montrer que pour tout $r > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a les inclusions suivantes :*

   $$B_\infty(a, r/n) \subset B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r).$$

Exercice 3 *Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est ni ouverte, ni fermée.*

Exercice 4 *Représenter graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et pour chacune d'elles, dire si elle est ouverte, fermée, ou bien ni ouverte ni fermée.*

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; |x| = 1 \text{ et } |y| \neq 1\} \qquad A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x + y \geq 0 \text{ et } x > 0\}$$

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x \geq 0 \text{ et } y = 0\} \qquad A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; 1 - xy > 0\}$$

$$A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$$

Exercice 5 *Déterminer si chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ est bornée ou non, compacte ou non :*

$$A_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x^2 + y^4 = 1\right\}, \qquad A_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x^2 + y^3 = 1\right\}.$$