Faculté des Sciences Exactes et SNV - Univ. OEB
Département de Mathématiques et d'informatique
3 ème année Maths Licence - S6 (2021-2022)
Éxamen Méthodes Numériques pour EDO et EDP
Nombre de pages de l'énoncé :1. Coefficients : 5. crédits : 6.

Le 30-05-2022 de 9h00 à 10h30

On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$ ($\alpha > 0$ est donné)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}y - \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}y &= 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \\ y(x,0) &= y_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas Δx en espace et Δt en temps (schéma de Gear) :

$$\frac{3y_{i,j+1} - 4y_{i,j} + y_{i,j-1}}{2\Delta t} - \alpha\frac{y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j+1}}{(\Delta x)^2} = 0.$$

Note on pourra poser $r = \frac{2\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

1. *(4pts)* **Dessiner le stencil du schéma, de quel type de schéma s'agit-il ?**

2. *(4pts)* **Analyser la stabilité du schéma par la méthode de Von Neumann.**

3. *(4pts)* **Quel est l'ordre du schéma ?**

4. *(4pts)* On considère dans cette question ce même schéma pour le problème posé sur $[0,1]$ avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}y - \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}y &= 0 \qquad \forall x \in]0,1[, \forall t > 0 \\ y(x,0) &= y_0(x) \quad \forall x \in]0,1[\\ y(0,t) = \beta, y(1,t) = \gamma, \forall t > 0, \end{cases}$$

   où β et γ sont des constantes données.

   En prenant $x_i = i\Delta x$, avec $\Delta x = \frac{1}{n+1}$, **former le système à résoudre à chaque pas de temps et la matrice associée. Discuter de l'existence et de l'unicité de sa solution.**

5. *(4pts)* On considère maintenant l'équation de la chaleur sur $[0,1]$ avec des conditions aux limites de Dirichlet Neumann :

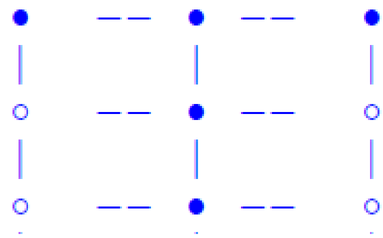
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}y - \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}y &= 0 \qquad \forall x \in]0,1[, \forall t > 0 \\ y(x,0) &= y_0(x) \quad \forall x \in]0,1[\\ \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \delta, y(1,t) = \gamma, \forall t > 0, \end{cases}$$

   où δ et γ sont des constantes données.

   En prenant $x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x$, avec $\Delta x = \frac{2}{2n+1}$, **adapter le schéma pour prendre en compte la condition de Neumann, former le système à résoudre à chaque pas de temps et la matrice associée. Discuter de l'existence et de l'unicité de sa solution.**

Dr. I. Rezzoug (E-mail : imad.rezzoug@univ-oeb.dz)

<u>Solution</u> 1 1. *Le stencil :* .... ***(2 pts)***



Le schéma est implicite.. ***(2 pts)***

2. *La stabilité du schéma par la méthode de von Neumann :*
   $y_{p,q} = \lambda^q e^{ip\theta} \iff \lambda^2 - \frac{4}{\mu} + \frac{1}{\mu} = 0$ *avec* $\mu = 3 + 4r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .... ***(1.5 pts)***
   $|\lambda| \leq 1 \iff \mu \geq 3,$ .... ***(1.5 pts)***
   toutes conditions qui sont réalisées, le schéma est donc inconditionnellement stable
   .... ***(1 pt)***

3. *La consistance : Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de l'erreur locale de troncature $\mathcal{E}_{i,j}$ qui est définie par :*

$$\mathcal{E}_{i,j} = \frac{3y\left(x_i, t_{j+1}\right) - 4y\left(x_i, t_j\right) + y\left(x_i, t_{j-1}\right)}{2\Delta t} - \alpha \frac{y\left(x_{i+1}, t_{j+1}\right) + y\left(x_{i-1}, t_{j+1}\right) - 2y\left(x_i, t_{j+1}\right)}{\left(\Delta x\right)^2}$$

   .... ***(1 pts)***
   pour y une solution suffisamment régulière de l'équation de la chaleur.
   Le schéma étant manifestement écrit au temps t_{j+1} et au point x_i, faisons des développements limités autour de ces valeurs
   .... ***(0.5 pts)***
   $\frac{y(x_{i+1},t_{j+1})+y(x_{i-1},t_{j+1})-2y(x_i,t_{j+1})}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y\left(x_i, t_{j+1}\right) + O\left(\Delta x^2\right),$
   $\frac{3y(x_i,t_{j+1})-4y(x_i,t_j)+y(x_i,t_{j-1})}{2\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} y\left(x_i, t_{j+1}\right) + O\left(\Delta t^2\right),$
   Ainsi, $\mathcal{E}_{i,j} = O\left(\Delta x^2\right) + O\left(\Delta t^2\right),$ .... ***(1 pt)***
   $\mathcal{E}_{i,j} \longrightarrow 0$ *lorsque* $\Delta x \longrightarrow 0$ *et* $\Delta t \longrightarrow 0$*. Donc, le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace*.. ***(1.5 pts)***

4. *Le schéma numérique :*

$$\left(3 + 2r\right) y_{i,j+1} - r y_{i+1,j+1} - r y_{i-1,j+1} = 4y_{i,j} - y_{i,j-1}, i = 1, \cdots, n.$$

   .... ***(1 pt)***

Système matricielle :

$$\begin{pmatrix} 3+2r & -r & 0 & \cdots & 0 \\ -r & 3+2r & -r & & \vdots \\ 0 & -r & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3+2r & -r \\ 0 & \cdots & 0 & -r & 3+2r \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

. . . . ***(1 pt)***

Discuter la solution :

Comme $r > 0$ la matrice est strictement diagonalement dominante et donc inversible quels que soient x et t.

Symétrique, à diagonale positive strictement dominante, la matrice est définie positive,

le système étant tridiagonal,

il peut alors être résolu en $O(n)$ opérations par décomposition de Choleski de la matrice

. . . . ***(2 pts)***

5. *Le schéma numérique : on a $x_{n+1} = 1$ et $\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t_{j+1}) = \delta \Longleftrightarrow y_{0,j+1} = y_{1,j+1} - \delta\Delta x$,*

. . . . ***(1 pt)***

donc

$$(3+r)\, y_{1,j+1} - r y_{2,j+1} = -r\delta\Delta x + 4y_{1,j} - y_{1,j-1}, i = 1$$

Système matricielle :

$$\begin{pmatrix} 3+r & -r & 0 & \cdots & 0 \\ -r & 3+2r & -r & & \vdots \\ 0 & -r & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3+2r & -r \\ 0 & \cdots & 0 & -r & 3+2r \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

. . . . ***(1 pt)***

Discuter la solution :

Pour les mêmes raisons que dans la question précédente la matrice est symétrique, à diagonale positive strictement dominante, la matrice est définie positive ; le système étant tridiagonal, il peut alors être résolu en $O(N)$ opérations par décomposition de Choleski de la matrice. . . . . ***(2 pts)***