République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de Recherche Scientifique
Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et d'informatique

3 ème année Licence Maths (2020-2021)

Éxamen Méthodes Numériques pour EDO et EDP

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Coefficients : 5. crédits : 6.

Le 06 juin 2021 de 9h à 10h30

Exercice 1 ***(10pts) I.*** *Soit le problème :*

$$y' = f(t, y) \quad et \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

1. *La méthode de Taylor d'ordre 2 est donné par :*

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n)\right). \tag{2}$$

   Quelle est l'inconvénient de la méthode de Taylor d'ordre 2 ?

2. *Le but est de remplacer cette dernière relation par une expression équivalente possédant le même ordre de précision $O(h^3)$. On propose la forme :*

$$y_{n+1} = y_n + a_1 hf(t_n, y_n) + a_2 hf\left(t_n + a_3 h, y_n + a_4 h\right). \tag{3}$$

   Déterminer une relation entre les paramètres a_1, a_2, a_3 et a_4 de telle sorte que les expressions (2) et (3) aient toutes deux une erreur en $O(h^3)$.

   II. *Soit le problème :*

$$y' = -y, y(0) = 1. \tag{4}$$

   On prend dans la forme (3) $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ et $a_4 = f(t_n, y_n)$ (c'est la méthode de Heun appelée aussi méthode d'Euler améliorée).

3. *Appliquer la méthode de Heun avec un pas h au problème (4).*

4. *Montrer que les approximations fournies par la méthode de Heun peuvent s'écrire : $y_n = (1 - h + \frac{1}{2}h^2)^n$.*

5. *Pour quelles valeurs de h la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est bornée ?*

6. *Calculer une valeur approchée de $y(1)$ par la méthode de Heun en prenant $h = 0.1$.*

Exercice 2 ***(10 pts) I.*** *On considère l' équation aux dérivées partielles :*

$$-2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + 3\frac{\partial y}{\partial x} - 3\frac{\partial y}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

1. *Déterminer le type de l'équation (5).*

2. *Ecrire (5) sous forme canonique.*

3. *Déterminer toutes les solutions de (5) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.*

   II. *On considère l'équation des ondes sur $\mathbb{R}$ suivant :*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{6}$$

avec les conditions initiales

$$y\,(x,0) = g(x), \frac{\partial y}{\partial t}\,(x,0) = h(x), \quad , x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

On construit un schéma aux différences finies sur un maillage uniforme de longueur Δx en espace et Δt en temps. On note $y_{i,j}$ l'approximation de $y(i\Delta x, j\Delta t)$, et on suppose par la suite que $r = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ est constant.

4. *Écrire le schéma explicite pour le problème (6 et 7) et donner son ordre (sans calcul).*

5. *Par le critère de Fourier-Von Neumann, montrer que ce schéma est L^2-stable sous une condition sur Δt à préciser.*

Solution 1 ***I***.

1. *La méthode de Taylor est simple mais devient rapidement laborieuse.*

   De plus, j'ai montré que le développement de Taylor pouvait converger très lentement.

   En conséquence, cette méthode ne s'emploie que localement: pour calculer y_{n+1} à partir de y_n ou pour calculer, à l'aide des conditions initiales, les premières valeurs de y dont certains algorithmes ont besoin pour démarrer et calculer la suite des y_k. . . ***(1.5 pts)***

2. *Le développement de Taylor du terme $f(t_n + a_3h, y_n + a_4h)$ autour du point (t_n, y_n) donne :*

$$f(t_n + a_3h, y_n + a_4h) = f(t_n, y_n) + a_3h\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + a_4h\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} + O(h^3).$$

   La relation (2) devient alors :

$$y_{n+1} = y_n + (a_1 + a_2)hf(t_n, y_n) + a_2a_3h^2\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + a_2a_4h^2\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} + O(h^3).$$

   On voit immédiatement que les expressions (2) et (3) sont du même ordre. Pour déterminer les coefficients a_i, il suffit de comparer ces deux expressions terme à terme on trouve :

$$\begin{cases} h = (a_1 + a_2)h, \\ \frac{h^2}{2} = a_2a_3h^2, \\ \frac{h^2}{2}f(t_n, y_n) = a_2a_4h^2. \end{cases}$$

   On obtient ainsi un système non linéaire de 3 équations comprenant 4 inconnues :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1, \\ a_2a_3 = \frac{1}{2}, \\ a_2a_4 = \frac{1}{2}f(t_n, y_n). \end{cases} \tag{8}$$

   Le système (8) est sous-déterminé en ce sens qu'il y a moins d'équations que d'inconnues et qu'il n'a donc pas de solution unique. . . . . ***(2 pts)***

   II. *Soit le problème (4) : $y' = -y, y(0) = 1$.*

3. *On prend dans la forme (2) $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ et $a_4 = f(t_n, y_n)$.*

   On obtient

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(hf(t_n, y_n) + hf(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))$$

   Appliquons la méthode de Heun avec un pas h au problème (4) on trouve :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(-hy_n + h(-y_n - hy_n)) \\ &= (1 - h + \frac{1}{2}h^2)y_n. \end{aligned}$$

   . . . . . ***(1.5 pts)***

4.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (1-h+\frac{1}{2}h^2)y_n \\ &= (1-h+\frac{1}{2}h^2)(1-h+\frac{1}{2}h^2)y_{n-1} \\ &= (1-h+\frac{1}{2}h^2)^2(1-h+\frac{1}{2}h^2)y_{n-2} \\ &= ... = (1-h+\frac{1}{2}h^2)^{n+1}y_0, \end{aligned}$$

de la condition initiale on a : $y_0 = y(0) = 1$*, on a donc :*

$$y_{n+1} = (1-h+\frac{1}{2}h^2)^{n+1}.$$

.... ***(1.5 pts)***

5. La suite $(y_n)_{n\geq 0}$ *est bornée si et seulement si* $|1-h+\frac{1}{2}h^2| \leq 1 \Rightarrow 0 < h \leq 2$ *car* $h \neq 0$
.... ***(1.5 pts)***

6. $t_n = 1 = nh \Rightarrow n = \frac{1}{h} = \dfrac{1}{0.1} = 10$*, donc* $y(1) \simeq y_{10}$*, on calcul* y_{10} *par la formule*

$$\begin{aligned} y_{10} &= (1-h+\frac{1}{2}h^2)^{10} \\ &= (1-0.1+\frac{1}{2}(0.1)^2)^{10} = 0.368541. \end{aligned}$$

Donc, $y(1) \simeq 0.369$. .... ***(1.5 pts)***

<u>Solution</u> 2 *I.*

<u>Exercice</u> 3 *1.* $\Delta = 9 > 0$*, l'équation est donc hyperbolique.* .... ***(1.5 pts)***

2. La forme canonique de (5) est

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta\partial\eta} = -\frac{\partial v}{\partial\eta},$$

où $y(x,t) = v(\zeta(x,t), \eta(x,t)) = v(x+t, 2x-t)$ .... ***(1.5 pts)***

3. $y(x,t) = A(2x-t)\,e^{-(x+t)} + B(x+t)$*, où* A *et* B *désignent des fonctions de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *arbitraires.* .... ***(1.5 pts)***

II.

4. Le schéma explicite pour l'équation (6) sans les conditions initiales (7) est donné par l'expression suivantes :

$$y_{i,j+1} = -y_{i,j-1} + r^2 y_{i-1,j} + (2-2r^2)y_{i,j} + r^2 y_{i+1,j}, \text{ avec } r = \frac{c\Delta t}{\Delta x}, \tag{9}$$

.... ***(1.5 pts)***

son ordre $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ .... ***(1.5 pts)***

5. *Le schéma (9) est L^2-stable sous la condition $r \leq 1$. Donc, $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$ puisque c est un nombre réel positif donné.* . . . . ***(1.5 pts)***

2 pts pour tous les étudiants