Université Larbi Ben M'Hidi-Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département des Mathématiques et Informatique

Licence 3^e^ année Maths, 2019-2020

Méthodes numériques pour EDO et EDP

Examen du 01 septembre 2020

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h00.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Donnez une définition de la méthode de Runge-Kutta, puis écrivez l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 et 4 et quels sont ses avantages et ses inconvénients.

Exercise 1 *Soit* $a > 0, b \in \mathbb{R}$ *et* $y_0 \in \mathbb{R}$. *On considère le problème de Cauchy suivant :*

$$y\left(0\right) = y_0 \quad et \quad \left(\forall t \in \mathbb{R}_+, y'(t) = -ay(t) + b\right), \tag{1}$$

1.

(a) *Donner explicitement* y *"la solution exacte".*

(b) *Quel est le comportement de* $y(t)$ *quand* $t \longrightarrow +\infty$?

2. *Soit* $h > 0$ *un pas de temps.*

(a) *Ecrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant* h *pour (1).*

On notera $\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(nh\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des temps d'approximation, et* $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des valeurs approchées correspondantes.*

(b) *Donner explicitement* $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) *Quelle condition doit satisfaire* h *pour que, quel que soit* y_0, y_n *tende quand* $n \longrightarrow +\infty$ *vers* $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} y(t)$?

(d) *On suppose cette condition satisfaite.*

Exprimer en fonction de a *le nombre minimal de temps d'approximation impliqués dans un calcul approché de* $y\mid_{[0,10]}$. *(la discrétisation de* $[0, 10]$ *avec* N *points)*

- *Quel est ce nombre lorsque* $a = 100$?

Correction

Questions de cours

- Les techniques de Runge-Kutta sont des schémas numériques à un pas qui permettent de résoudre les équations différentielles ordinaires. Elles font parties des méthodes les plus populaires de part leur facilité de mise en œuvre et leur précision. C'est Carle Runge et Martin Kutta qui, au début du XX^e siècle, ont inventé ces méthodes.

Nous décrivons ici deux algorithmes assez utilisés : celles de Runge-Kutta d'ordre 2 et 4.

<u>**Algorithme de (RK)$_2$**</u>

1. Initialisation du pas h, de la durée T.
2. Initialisation des conditions initiales : $t = 0$ et $y = y(0)$.
3. Définition de la fonction $f(t, y)$.
4. Tant que $t \leq T$ faire :
   a. Calcul de $k_1 = f(t, y)$.
   b. Calcul de $k_2 = f(t + h, y + hk_1)$.
   c. $y = y + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$; $t = t + h$.
   d. Enregistrement des données.

<u>**Algorithme de (RK)$_4$**</u>

1. Initialisation du pas h, de la durée T.
2. Initialisation des conditions initiales : $t = 0$ et $y = y(0)$.
3. Définition de la fonction $f(t, y)$.
4. Tant que $t \leq T$ faire :
   a. Calcul de $k_1 = f(t, y)$.
   b. Calcul de $k_2 = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1)$.
   c. Calcul de $k_3 = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2)$.
   d. Calcul de $k_4 = f(t + h, y + hk_3)$.
   e. $y = y + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$; $t = t + h$.
   f. Enregistrement des données.

- Les techniques de Runge-Kutta, d'ordre 2 ou 4, ont l'avantage d'être simples à mettre en œuvre, précises et assez stables pour les fonctions courantes rencontrées en physique. C'est ce qui explique leur grande popularité. De nombreux logiciels de calcul utilisent par défaut la méthode RK4 dans sa version adaptative "le pas h est alors variable et s'adapte pour optimiser précision et temps de calcul".

Bien entendu ces méthodes ont aussi leurs défauts : elles sont assez gourmandes en temps de calcul et ne sont pas adaptés aux systèmes conservatifs aux temps longs (par exemple la Méthode de Verlet).

<u>**Solution d'exercice N°1**</u>

Soit $a > 0, b \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$y\,(0) = y_0 \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+, y'(t) = -ay(t) + b)\,,$$

1.

(a) Les solutions du problème homogène sont données par, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$y(t) = k.\exp(-at), k \in \mathbb{R}.$$

Les solutions du problème non homogène sont données par, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$y(t) = \frac{b}{a} + c.\exp(-at), c \in \mathbb{R}.$$

Comme $y(0) = y_0$ donc $c = y_0 - \frac{b}{a}$.
La solution de (1) est donc donnée par, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$y(t) = \frac{b}{a} + \exp(-at)\left(y_0 - \frac{b}{a}\right).$$

(b) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$y(t) = \frac{b}{a} + \exp(-at)\left(y_0 - \frac{b}{a}\right) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{b}{a}.$$

2. Notons $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (nh)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des temps d'approximation.

Le schéma d'Euler explicite définit une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'approximation aux temps $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(-ay_n + b), \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } y(0) = y_0 \\ &= (1 - ah)y_n + hb. \end{aligned}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y_{n+1} = (1 - ah)y_n + hb$. Alors

$$\begin{aligned} y_0 &= (1 - ah)^0 y_0 \\ y_1 &= (1 - ah)y_0 + hb = (1 - ah)^1 y_0 + (1 - ah)^0 hb \\ y_2 &= (1 - ah)y_1 + hb = (1 - ah)^2 y_0 + (1 - ah)^1 hb + (1 - ah)^0 hb \\ &\dots \end{aligned}$$

On a par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = (1 - ah)^n y_0 + \sum_{k=1}^{n} (1 - ah)^{n-k} hb.$$

Donc

$$\begin{aligned} y_n &= (1 - ah)^n y_0 + \sum_{k=1}^{n} (1 - ah)^{n-k} hb \\ &= (1 - ah)^n y_0 + hb\frac{1 - (1 - ah)^n}{1 - (1 - ah)} \\ &= (1 - ah)^n \left(y_0 - \frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

car $1 - ah \neq 1$ puisque $ah > 0$. ($a > 0$ et $h > 0$)
On en déduit, Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = (1 - ah)^n \left(y_0 - \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a}.$$

(c) $\left(\forall y_0, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{cv}{\longrightarrow} \lim_{t\longrightarrow\infty} y(t) = \frac{b}{a}\right) \Longleftrightarrow \left(\left((1-ah)^n \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \underset{cv}{\longrightarrow} 0\right)$
Vérifions par ailleurs que

$$\left(\forall y_0, \lim_{n\longrightarrow+\infty} (1 - ah)^n \left(y_0 - \frac{b}{a} \right) = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} (1 - ah)^n = 0\right).$$

. L'implication $\Longleftarrow$ est directe.
. L'implication $\Longrightarrow$ s'obtient en choisissant $y_0 = 1 + \frac{b}{a}$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left(\forall y_0, \lim_{n\longrightarrow+\infty} y_n = \lim_{t\longrightarrow\infty} y(t)\right) &\Longleftrightarrow |1 - ah| < 1 \\
&\Longleftrightarrow -1 < 1 - ah < 1 \\
&\Longleftrightarrow -2 < -ah < 0 \\
&\Longleftrightarrow 0 < h < \frac{2}{a}.
\end{aligned}$$

(d) Discrétisation $[0, 10]$ avec N points. Alors la taille du pas est $h = \frac{10}{N}$.
Pour que la condition soit satisfaite, on doit avoir $\frac{10}{N} < \frac{2}{a}$ soit $N > 5a$.
. Il faut donc au moins $5a$ pas en temps.
. Lorsque $a = 100$, on doit effectuer au moins 500 pas.