Université Larbi Ben M'Hidi-Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département des Mathématiques et Informatique

Licence 3$^{\text{e}}$ année Maths, 2019-2020

Méthodes numériques pour EDO et EDP

Examen du 18 octobre 2020

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h00.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
La calculatrice est autorisée.
Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Exercice 1 *On considère le problème suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} & = & 0 & \textit{pour} \quad (x,t)\in[-1,1]\times[0,1], \\ y(x,0) & = & \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \textit{pour} \quad x\in[-1,1], \\ y(-1,t) & = & -\exp\left(\frac{-\pi^2}{4}t\right) & \textit{pour} \quad t\in[0,1], \\ \frac{\partial y}{\partial x}(1,t) & = & 0 & \textit{pour} \quad t\in[0,1], \end{array}\right. \tag{1}$$

où $y=y(x,t)$.

1. *Donner le nom du problème (1).*

2. *Montrer que la solution exacte du problème (1) est donnée par*

$$y(x,t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(\frac{-\pi^2}{4}t\right).$$

3. *On construit un schéma aux différences finies sur un maillage uniforme de longueur* $\Delta x=1$ *en espace et* $\Delta t=\frac{1}{4}$ *en temps. On note* $y_{i,j}$ *l'approximation de* $y(i\Delta x, j\Delta t)$.

- *Écrire le schéma explicite pour le problème (1) et donner son ordre (sans calcul).*
- *Par le critère de Fourier-Von Neumann, montrer que ce schéma est* L^2-*stable sous une condition sur* Δt *à préciser.*
- *Tracer le maillage du pavé* $[-1,1]\times[0,1]$.
- *Trouver la solution approchée*[1] *en* $t=\frac{1}{4}$.
- *Comparer la solution approchée avec la solution exacte en* $t=\frac{1}{4}$.

Bon courage

[1] On donne les résultats à 10^{-2} près.

Corrigé type de l'examen

1. Le problème (1) est l'**équation de la chaleur** (01p) avec **condition initiale non homogène** (0.5p) et des **conditions aux limites de type Dirichlet** (0.5p).

2. Solution exacte :

Pour montrer que $y(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)$ est une solution exacte, il suffit que y vérifie le problème (1).

On a :

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = -\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)$ (0.75p).

Et on a aussi

$\frac{\partial}{\partial t}y(x,t) = -\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)$ (0.75p).

En injectant ses valeurs de dérivées dans l'équation du problème (1), on déduit que vérifie notre équation

$\frac{\partial}{\partial t}y(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = -\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right) + \frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right) = 0$ (0.5p).

Maintenant, il reste à vérifiés la condition initiale et les conditions aux limites. Il est clair que

$y(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ (0.5p).

Et avec un calcul simple on trouve :

$y(-1,t) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right) = -\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)$ (0.5p).

On a $\frac{\partial}{\partial x}y(x,t) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)$, donc

$\frac{\partial}{\partial x}y(1,t) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right) = 0$ (0.5p).

3. Le **schéma explicite** pour le problème (1) :

On a :

$\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{(x_i,t_j)} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t}$ (01p).

Et

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{(x_i,t_j)} = \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$ (01p).

On écrit le schéma d'Euler explicite correspondant au problème (1) comme suit

$\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{(x_i,t_j)} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{(x_i,t_j)} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} - \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$

On pose $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ (0.5p). Alors on a :

$$\boxed{y_{i,j+1} = ry_{i-1,j} + (1-2r)\,y_{i,j} + ry_{i+1,j} \text{ avec } r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}} \text{(01p).}$$

- Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de Taylor de l'erreur de troncature en (x_i, t_j), qui est définie par : $\mathcal{E}_{i,j} = \delta_t^+ y(x_i,t_j) - \delta_x^2 y(x_i,t_j)$.

Donc $\mathcal{E}_{i,j} = \frac{\partial}{\partial t}y(x_i,t_j) + o(\Delta t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x_i,t_j) + o\left((\Delta x)^2\right)$.

Donc $\mathcal{E}_{i,j} = o(\Delta t) + o\left((\Delta x)^2\right)$.

Et $\mathcal{E}_{i,j} \longrightarrow 0$ lorsque $\Delta t, \Delta x \longrightarrow 0$. Alors le schéma explicite est consistant d'**ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace** (01p).

Comme le schéma est consistant donc d'après le théorème du Lax la stabilité est une condition nécessaire est suffisante pour la convergence.

- La stabilité :

On a le schéma explicite suivante :

$$y_{i,j+1} = ry_{i-1,j} + (1-2r)\, y_{i,j} + ry_{i+1,j}$$

Donc on utilise l'analyse de Von Neumann. Pour cela, on se place avec des conditions périodiques. On a :

$\lambda^{q+1} \exp(ip\theta) = \lambda^{q} \left[r\exp(i(p-1)\theta) + (1-2r)\exp(ip\theta) + r\exp(i(p+1)\theta) \right].$

Donc $\lambda = 2r\cos\theta + 1 - 2r$.

Comme $-1 \leq \cos\theta \leq 1$. Donc, on a :

$$1 - 4r \leq \lambda \leq 1 \tag{2}$$

La partie droite de l'inégalité (2) est satisfaite pour toutes les valeurs possibles de θ.

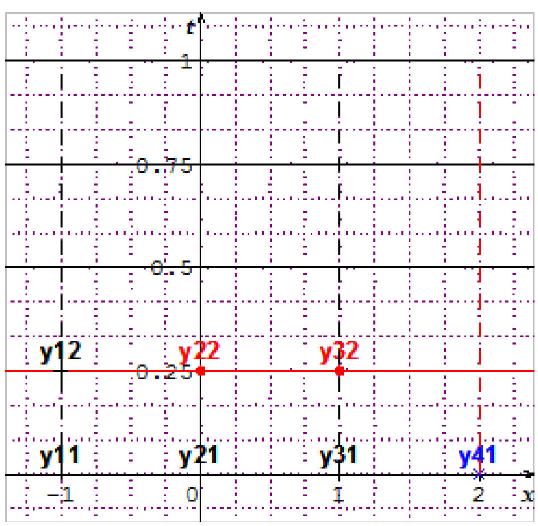
Mais la partie gauche donne $|\lambda| \leq 1$ si est seulement si $\Delta t \leq \frac{1}{2} |\Delta x|^2$.

Donc, le schéma est stable sous la condition $\Delta t \leq \frac{1}{2} |\Delta x|^2$ (03p).

- Le Maillage :

$m = \frac{L}{\Delta x} + 1 = \frac{2}{1} + 1 = 3$ donc $i = 1, 2, 3$ (0.5p).

$n = \frac{l}{\Delta t} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + 1 = 5$ donc $j = \overline{1, 5}$ (0.5p).



(01p).

- Solutions approchées en $t = 0.25$

On a

$$y_{i,j+1} = \frac{1}{4} y_{i-1,j} + \frac{1}{2} y_{i,j} + \frac{1}{4} y_{i+1,j}.$$

Premièrement, on a :

$\boxed{y_{1,2} = -\exp\left(-\frac{\pi^2}{4} 0.25\right) = -0.54}$ (0.5p).

Et

$\frac{\partial y}{\partial x}\mid_{(x_3,t_1)}=\frac{y_{4,1}-y_{2,1}}{2\Delta x}=0$

Donc $\boxed{y_{4,1}=y_{2,1}}$ (01p).

On fixe $j=1$ et on a :

Pour $i=2$:

$$\begin{aligned} y_{2,2} &= \frac{1}{4}y_{1,1}+\frac{1}{2}y_{2,1}+\frac{1}{4}y_{3,1} \\ &= \frac{1}{4}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin(0)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 \quad \text{(01p).} \end{aligned}$$

Pour $i=3$:

$$\begin{aligned} y_{3,2} &= \frac{1}{4}y_{2,1}+\frac{1}{2}y_{3,1}+\frac{1}{4}y_{4,1} \\ &= \frac{1}{2}y_{2,1}+\frac{1}{2}y_{3,1} \\ &= \frac{1}{2}\sin(0)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0.5 \quad \text{(01p).} \end{aligned}$$

- Comparaison entre la solution exacte et approchée :

$(x_i;0.25)$	$(-1;0.25)$	$(0;0.25)$	$(1;0.25)$
solution exacte	-0.54	0	0.5
solution approchée (explicite)	-0.54	0	0.54

(02p).