Exercice 1 *On considère, pour l'équation d'advection :*

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (\alpha > 0)$$

le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas Δx en espace et Δt en temps :

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}}{2\Delta x} = 0.$$

Note on pourra poser $r = \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x}$.

1. *Dessinez le stencil du schéma, de quel type de schéma s'agit-il ?.*

2. *Analysez la stabilité du schéma par la méthode de Van Neumann.*

3. *Quel est l'ordre du schéma ?.*

Solution

Le modèle : $\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \alpha > 0 \cdots$ l'équation d'advection.

Schéma numérique : $\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}}{2\Delta x} = 0$

On pose $r = \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x}$.

1.

$$y_{i,j+1} - y_{i,j} + \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} \left[y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} \right] = 0$$

$$\boxed{-r y_{i-1,j+1} + y_{i,j+1} + r y_{i+1,j+1} - y_{i,j} = 0}$$

Le stencil:

$$\begin{pmatrix} t_{j+1} \cdots & \boxed{\text{-r}} & --- & \boxed{1} & --- & \boxed{\text{r}} \\ & & & | & & \\ & & & | & & \\ t_j \cdots & & & \boxed{\text{-1}} & & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & x_{i-1} & & x_i & & x_{i+1} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \longleftarrow \text{ valeurs inconnues} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{ valeur connue} \end{array}$$

Type de schéma: $\boxed{\text{Schéma Implicite}}$

2. L'ordre du schéma:

L'erreur de troncature est:

$$\mathcal{E}_{i,j} = \frac{y(x_i, t_{j+1}) - y(x_i, t_j)}{\Delta t} + \alpha \frac{y(x_{i+1}, t_{j+1}) - y(x_{i-1}, t_{j+1})}{2\Delta x}$$

D'après Taylor: $y(x_i, t_{j+1}) = y(x_i, t_j) + \Delta t y'(x_i, t_j) + \frac{(\Delta t)^2}{2} y''(x, \xi)\,; t_j < \xi < t_{j+1}$.

Donc

$$\frac{y(x_i, t_{j+1}) - y(x_i, t_j)}{\Delta t} = y'(x_i, t_j) + \circ(\Delta t)\,; \circ(\Delta t) = \frac{\Delta t}{2} y''(x, \xi)\,; t_j < \xi < t_{j+1}. \tag{1}$$

Et $y(x_{i+1},t_{j+1}) = y(x_i,t_{j+1}) + \Delta x y'(x_i,t_{j+1}) + \frac{(\Delta x)^2}{2} y''(x_i,t_{j+1}) + \frac{(\Delta x)^3}{6} y'''(\eta^+,t)\,; x_i < \eta^+ < x_{i+1}$.

$y(x_{i-1},t_{j+1}) = y(x_i,t_{j+1}) - \Delta x y'(x_i,t_{j+1}) + \frac{(\Delta x)^2}{2} y''(x_i,t_{j+1}) - \frac{(\Delta x)^3}{6} y'''(\eta^-,t)\,; x_{i-1} < \eta^- < x_i$.

Donc

$$\frac{y(x_{i+1},t_{j+1}) - y(x_{i-1},t_{j+1})}{2\Delta x} = y'(x_i,t_{j+1}) + \circ(\Delta x)^2. \qquad (2)$$

Avec $\circ(\Delta x)^2 = \frac{(\Delta x)^2}{3} y'''(\eta,t)\,; x_{i-1} < \eta < x_{i+1}$.

Alors

$$\frac{y(x_{i+1},t_{j+1}) - y(x_{i-1},t_{j+1})}{2\Delta x} = [y'(x_i,t_j) + \circ(\Delta t)] + \circ(\Delta x)^2. \qquad (3)$$

Avec $\circ(\Delta t) = \Delta t \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}(x,\xi)\,; t_j < \xi < t_{j+1}$.

Donc

$$\mathcal{E}_{i,j} = \frac{y(x_i,t_{j+1}) - y(x_i,t_j)}{\Delta t} + \alpha \frac{y(x_{i+1},t_{j+1}) - y(x_{i-1},t_{j+1})}{2\Delta x} \qquad (4)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{i,j} = \circ(\Delta t) + \circ(\Delta x)^2.}$$

Avec

$$\circ(\Delta x)^2 = \alpha \frac{(\Delta x)^2}{3} y'''_x(\eta,t)\,; x_{i-1} < \eta < x_{i+1}.$$

$$\circ(\Delta t) = \Delta t \left(\frac{1}{2} y''_t(x,\xi) + \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}(x,\xi) \right); t_j < \xi < t_{j+1}.$$

$\mathcal{E}_{i,j} \longrightarrow 0$ quand $\Delta t, \Delta x \longmapsto 0$; donc le schéma est **consistant** d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

3. La stabilité:

Pour la stabilité L^2, l'analyse de Fourier conduit à:

$$\lambda^{q+1}\left[-re^{i(p-1)\theta} + e^{ip\theta} + re^{i(p+1)\theta}\right] = \lambda^q e^{ip\theta} \qquad (5)$$

Tqs. $(\lambda,\theta) \in \mathbb{R}^2$ et (p,q) point d'un maillage.

Donc

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda\left[-re^{-i\theta} + 1 + re^{ip\theta}\right] \\ &= \lambda\left[1 + 2ir\sin\theta\right] \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda = \frac{1}{1 + 2ir\sin\theta} = [1 + 2ir\sin\theta]^{-1}. \qquad (6)$$

$$\boxed{\lambda = [1 + 2ir\sin\theta]^{-1}} \qquad (7)$$

On vérifie alors que le module du facteur d'amplification est toujours plus petit que 1.

$$|\lambda|^2 = \left[1 + (2r\sin\theta)^2\right]^{-1} \leq 1. \tag{8}$$

Le schéma est inconditionnellement stable. La convergence d'obtient alors par le théorème de Lax.

Exercice 2 *Appliquer la méthode des différences finies au problème de Dirichlet :*

$$\begin{cases} -y'' = f \ \ \textit{dans} \ \left]0,1\right[, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Vérifier qu'avec un schéma centré d'ordre deux, on obtient un système linéaire à résoudre avec la même matrice K_h (à un coefficient multiplicatif près) que celle issue de la méthode des éléments finis P_1 mais avec un second membre b_h différent. Même question pour le problème de Neumann :

$$\begin{cases} -y'' + ay = f \ \ \textit{dans} \ \left]0,1\right[, \\ \quad y'(0) = \alpha, \\ \quad y'(1) = \beta. \end{cases}$$

Solution

La méthode des différences finies, basée sur un schéma centré d'ordre 2, nous conduit à résoudre, dans le cas du Laplacien avec conditions de Dirichlet, le système :

$$\begin{cases} -\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \forall i = 1, \cdots, n, \\ \qquad y_0 = 0, \\ \qquad y_{n+1} = 0. \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système $K_h U_h = b_h$ où $U_h = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, K_h est la matrice d'ordre n.

$$K_h = \frac{1}{h^2} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

La matrice K_h diffère de la matrice obtenue par la méthode des éléments finis à un facteur multiplicatif $\frac{1}{h}$ près.

La méthode des éléments finis conduit ç une expression différente du second membre

$$b_h^{\mathrm{EF}} = \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\frac{x - x_{i-1}}{h}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\frac{x_{i+1} - x}{h}dx\right)_{1 \leq i \leq n}.$$

En pratique, on utilise une formule de quadrature pour évaluer les intégrales définissant b_h^{EF} . Si on utilise la formule de trapèzes, on obtient : $b_h^{\mathrm{EF}} = h\left(f\left(x_i\right)\right)_{1\leq i\leq n}$.

Avec un tel choix, les deux méthodes conduisent au même système linéaire.

Conditions aux limites de Neumann :

Pour le problème de Neumann, le système obtenu, suite à la discrétisation par différences finies, consiste à déterminer $\left(y_i\right)_{-1\leq i\leq n+2}$ tel que :

$$\begin{cases} -\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+a\left(x_i\right)y_i=f\left(x_i\right),\forall i=1,\cdots,n, \\ \frac{y_1-y_{-1}}{2h}=\alpha, \\ \frac{y_{n+2}-y_n}{2h}=\beta. \end{cases}$$

Où les noeuds fictifs x_{-1} et x_{n+2} ont été introduit afin que les conditions aux limites soient discrétisées à l'ordre 2. Si on élimine du système linéaire final les degrés de liberté artificiellement introduits, on obtient les expressions suivantes :

$$K_h=\frac{1}{h^2}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{a(x_0)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a\left(x_1\right) & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & a\left(x_n\right) & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{a(x_{n+1})}{2} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$b_h=\begin{pmatrix} \frac{f(x_0)}{2}+\frac{-\alpha}{h} \\ f\left(x_1\right) \\ \vdots \\ f\left(x_n\right) \\ \frac{f(x_{n+1})}{2}+\frac{\beta}{h} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 *Montrer que, si la condition **CFL***

$$|\alpha|\,\Delta t\leq\Delta x. \tag{10}$$

n'est pas satisfaite, le schéma décentré amont

$$\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j}}{\Delta t}+\alpha\frac{y_{i,j}-y_{i-1,j}}{\Delta x}=0 \tag{11}$$

pour l'équation d'advection est instable pour la donnée initiale $y_{i,0}=\left(-1\right)^i$.

<u>Solution</u>

Le schéma décentré amont est défini par

$$\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j}}{\Delta t}+\alpha\frac{y_{i,j}-y_{i-1,j}}{\Delta x}=0$$

Donc

$$y_{i,j+1} = \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right) y_{i,j} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} y_{i-1,j} \tag{12}$$

On a:

$y_{i,0} = (-1)^i = \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^0 (-1)^i$

$y_{i,1} = \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right) y_{i,0} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} y_{i-1,0} = \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right) (-1)^i - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} (-1)^i = \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^1 (-1)^i$ psq $(-1)^{i-1} = -(-1)^i$

...

On montre par récurrence que

$$\boxed{y_{i,j} = \left(1 - \tfrac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^i.}$$

- Pour $j = 0$: $y_{i,0} = \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^0 (-1)^i = (-1)^i$. ✓
- Supposons que: $y_{i,j} = \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^i$. Alors d'près (12),

$$\begin{aligned}
y_{i,j+1} &= \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right) y_{i,j} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} y_{i-1,j} \\
&= \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right) \left(\left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^i\right) + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} \left(\left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^{i-1}\right) \\
&= \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^i \left[-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} + 1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right] \text{ psq } (-1)^{i-1} = -(-1)^i \\
&= \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^i \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right) \\
&= \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^{j+1} (-1)^i. \quad ✓
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite y_j reste bornée si et seulement si

$$\left|1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1.$$

ou encore si la condition CFL

$$\frac{|\alpha| \Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

est vérifiée.

Exercice 4 *Soit* $\Omega = \mathbb{R}^N$. *Montrer que* $y(t) = \exp(ik.t)$ *est une solution de*

$$-\Delta y = \lambda y \tag{13}$$

si $|k|^2 = \lambda$. *Une telle solution est appelée onde plane.*

Solution

Rappels:

✓ $\nabla y(t) = \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial y(t)}{\partial t_N}\right).$

✓ $\Delta y(t)$[1] $= \operatorname{div}(\nabla y(t)) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial y(t)}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial y(t)}{\partial t_N}\right) = \frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial y(t)}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial t_N}\frac{\partial y(t)}{\partial t_N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t_i^2}.$

Soit $y(t) = \exp(ik.t)$, on a

$$\boxed{\nabla y(t) = ik \exp(ik.t)}$$

et

$$\boxed{\Delta y = \operatorname{div}(\nabla y(t)) = -|k|^2 \exp(ik.t).}$$

Ainsi, y est solution de l'équation (2) dès que $|k|^2 = \lambda$.

Dr. Rezzoug I

[1] $\Delta y = \nabla.\nabla y(t)$