

Université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi
Faculté Des Sciences Exactes et De La Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et Informatique



Polycopié pédagogique

Intitulé

Systèmes dynamiques et introduction au chaos
Cours et Exercices Corrigés

Réalise par : **Djeddi Kamel**

Email : Kamel.djeddi@univ-oeb.dz

Pour la deuxième année de master
Spécialité: Mathématiques appliquées

Octobre 2022

Université à Oum El Bouagh
Département de mathématiques et informatique

Polycopié pédagogique

Systemes dynamiques et introduction au chaos

Cours et exercices corrigés

Par Dr djeddi kamel

Email : djeddi.kamel@gmail.com

Octobre 2022

Dédicaces

Je dédie ce travail:

A mon père Mr Djeddi Mostafa

À ma mère

À mes soeurs et mes frères

À ma femme

À mes enfants: Abdemouaiz, Rawthat Errahmane et Hibat Errahmane

À tous mes amis et tous mes collègues sans exception.

Remerciements

- Je remercie **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté de mener à terme ce présent travail.
- Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude Monsieur **ZERAOULIA Elhadj**, professeur à l'Université de Larbi Tébessi à Tébessa. Et Monsieur **KADA Allab**, professeur à l'École Normale Supérieure ENS Kouba, Vieux Kouba, Alger.
- Mes remerciements vont également à Monsieur **Adel Ouass**, professeur à l'Université d'Oum el bouaghi, et Madame **REZZAG Samia** Maître de conférence à l'Université el bouaghi pour revoir ce polycopié.
- De même je remercie Monsieur **ZEHROUR Okba**, professeur à l'Université el bouaghi et Monsieur **REZZOUG Imad**, Maître de conférence à l'Université d'Oum el bouaghi et Monsieur **OUSSAEIF Taki eddine**, Maître de conférence à l'Université d'Oum el bouaghi et Monsieur **GOUASMAI Abd Elhamid**, Maître de conférence à l'Université d'Oum el bouaghi. Pour les aider et les encourager à terminer ce polycopié.
- Je remercie également tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à L'élaboration de ce polycopié. Je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et tous ceux que j'ai connus au département de mathématiques et informatique surtout les professeurs décédés, Diyar Ahmed, Allouch Abdel Karim et Youcef Atiq.
- Bien entendu, il me serait impossible de terminer sans adresser une pensée chaleureuse à mes **parents** pour leur soutien et leurs encouragements pendant de longues années, sans qui je n'aurais pu arriver à ce niveau d'études.

Table des matières

Table des matières	5
Liste des figures	9
0 Introduction	11
1 Rappels de calcul différentiel	13
1.1 Dérivation	13
1.2 Intégration	14
1.3 Primitive	14
1.4 Accroissements finis	15
1.4.1 Cas réel	15
1.4.2 Cas vectoriel	15
1.5 Formules de Taylor	16
1.6 Fonctions différentiables	16
1.6.1 Différentiabilité	16
1.6.2 Matrice Jacobienne	17
2 Systèmes dynamiques linéaires	18
2.1 Introduction	18
2.2 Les systèmes dynamique	18
2.2.1 Système dynamique à temps continu et discret	19
2.3 Systèmes linéaires	20
2.4 Trajectoires et orbites	21
2.5 Point d'équilibre	22

2.6	Fonction définie positive ou négative	23
2.6.1	Fonction semi-définie positive ou semi-définie négative	23
2.7	Flot d'une équation différentielle	23
2.8	Espace des phases	24
2.9	Section de Poincaré	24
2.9.1	Stabilité des systèmes linéaires	25
2.9.2	Point limite	26
2.9.3	Attracteur et Bassin d'attraction	26
3	Systèmes dynamiques non linéaires	27
3.1	Systèmes autonomes et non autonomes	27
3.2	Systèmes conservatifs et dissipatifs	27
3.3	Etude de la stabilité du point fixe	28
3.3.1	stable au sens de Lyapunov	28
3.3.2	Point attractif	29
3.3.3	Méthode de linéarisation	30
3.3.4	Méthode de Lyapunov	30
	Méthode indirecte de Lyapunov	30
	Méthode directe de Lyapunov	31
3.3.5	Stabilité des points périodiques	34
3.4	Nature des points fixes et cycles	34
3.5	Exposants de Lyapunov	36
3.5.1	Exposant de Lyapunov pour un système de dimension égale a un	37
3.5.2	Exposants de Lyapunov pour un système de dimension supé- rieure strictement à un	38
3.5.3	Méthode de Wolf	39
4	Systèmes dynamiques chaotiques	41
4.1	Définition mathématique du chaos	41
4.1.1	Point limite positif	42
4.1.2	Ensemble limite positif	42
4.1.3	Ensemble limite attractif	42

4.1.4	Bassin d'attraction	42
4.1.5	Ensemble limite positif non-stable	43
4.1.6	Ensemble invariant	43
4.1.7	Ensemble indécomposable	43
4.1.8	Ensemble dense	43
4.1.9	Chaos	45
	Chaos et simulations numériques	46
4.2	Chaos au sens de Li et Yorke	47
4.2.1	Théorème de Li et Yorke	48
4.3	Chaos au sens de Devaney	49
4.3.1	Théorème de Devaney	49
4.3.2	Exemples de systèmes chaotiques au sens de Devaney	49
4.4	Chaos au sens de Marotto	52
4.4.1	Théorème de Marotto 1978	53
4.4.2	Une version modifiée du théorème de Marotto	58
4.5	Caractérisation du chaos temporel	60
4.5.1	Sensibilité aux conditions initiales	60
4.5.2	Exposants de Lyapunov	61
4.6	Signes des exposants de Lyapunov	61
4.6.1	Dimension de Kaplan-Yorke (ou de Lyapunov)	61
4.6.2	Dimension de Kolmogorov (ou de capacité)	62
4.6.3	Dimension de corrélation	64
4.7	Exemples des systèmes chaotiques à temps continu	64
4.7.1	Système de Lorenz	64
4.7.2	Système de Rössler	65
4.8	Exemples des systèmes chaotiques à temps discret	66
4.8.1	Récurrence logistique	66
4.8.2	Récurrence de Hénon	67
4.8.3	Récurrence de Lozi	68
4.8.4	Récurrence d'Ikeda	68
4.9	Bifurcations	70
4.9.1	Diagramme de bifurcations	71

4.9.2	Cas discret, dimension 1	71
4.9.3	Bifurcation selle-nœud ou col	75
4.9.4	Bifurcation de Hopf	76
	Étude d'un exemple dans \mathbb{R}^2	76
	Description du phénomène général	77
	Cas des difféomorphismes	78
	Cas des orbites périodiques	78
4.9.5	Autres bifurcations	79
4.9.6	Dynamique des polynômes quadratiques	79
5	Exercices corrigés	80
5.1	Solutions	85
6	Bibliographie	98

Liste des figures

2.1	La section de Poincaré.	25
3.1	Classification des portraits de phases dans le plan ($\det A, \text{Tr } A$)	36
4.1	La fonction de doublement de l'angle.	50
4.2	La fonction tente.	51
4.3	Itérations du chat d'Arnold.	52
4.4	Diagramme d'un point snap-back (de retour) répulsif. Le point x^* est un snap-back répulsif.	53
4.5	Un vecteur arbitraire réduit dans la norme euclidienne par une carte linéaire	55
4.6	Le voisinage local d'un point fixe instable x^* et $ \lambda(DF(x)) > 1$	56
4.7	Une transformation 2-dimensionnelle non linéaire dans l'espace. . . .	57
4.8	Recouvrement d'un segment de longueur L (a) et d'un carré de côté L (b).	63
4.9	Attracteur de Lorenz pour $a = 10, b = 28, c = 8/3$	65
4.10	Attracteur de Rössler pour $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$	66
4.11	Itérations de la fonction logistique.	67
4.12	Attracteur de Hénon pour les valeurs $a = 1.4, b = 0.3$ et $x_0 = y_0 = 0$	68
4.13	Attracteur de Lozi pour $a = 0.7, b = 0.5$ et $x_0 = y_0 = 0$	69
4.14	Attracteur d'Ikeda pour $\mu = 0.9$ et $x_0 = y_0 = 0.1$	70
4.15	Bifurcation de la famille $f_{(+1),\tau}(x)$	72
4.16	Diagramme de bifurcation de la famille $f_{(+1),\tau}(x)$, autour de $\tau_0 = 0$. . .	73
4.17	Bifurcation subie par $f_{(-1),\tau}(x)$	73
4.18	Bifurcation subie par $f_{(-1),\tau}^2(x)$	74

4.19	Diagramme de bifurcation de la famille $f_{(-1),\tau}(x)$, autour de $\tau_0 = 1$. . .	74
4.20	Bifurcation selle-noeud : espace des phases de part et d'autre de $\mu_0 = 0$. . .	75
4.21	Bifurcation de Hopf : orbites de part et d'autre de $\epsilon_0 = 0$	76
4.22	Diagramme d'une bifurcation de Hopf.	77

Introduction

Les systèmes dynamiques sont les concepts mathématiques qui permettent d'étudier des phénomènes qui se développent au fil du temps, Cette évolution peut être exprimée par un ensemble limité d'équations qui peuvent être des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles ou des applications, ces phénomènes proviennent de la physique, de la chimie, de la mécanique, de la biologie ou de l'environnement, ce système se compose d'un espace de phases, l'espace des états possibles du phénomène convenablement paramétré, muni d'une loi d'évolution qui décrit la variation temporelle de l'état du système.

C'est le mathématicien Henri Poincaré qui, dès la fin du 19^{ème} siècle, a mis en évidence l'imprévisibilité d'un système de trois corps en interaction. Maintenant la théorie du chaos est utilisée dans de très nombreux domaines : géophysique, météorologie, astronomie, turbulence, économie, sociologie, biologie... Le chaos n'est pas aussi 'chaotique' que sa dénomination le fasse entendre ; son désordre n'est qu'apparent. Un système chaotique est imprévisible, mais il est parfaitement décrit par des équations simples et déterministes. Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer) son évolution au cours du temps : la connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, l'instant initial, permet le calcul précis de l'état du système à n'importe quel autre moment. Le lien entre ces deux notions paradoxales, déterminisme et imprévisibilité, se manifeste par la sensibilité aux conditions initiales : deux conditions initiales quasiment semblables peuvent conduire à des états très différents du système. Cette impossibilité pratique

à calculer l'évolution de systèmes déterministes est la principale caractéristique des systèmes chaotiques.

Chapitre 1

Rappels de calcul différentiel

1.1 Dérivation

Définition 1.1 (Dérivabilité) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

On notera $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications dérivables de I dans \mathbb{R} .

Théorème 1.1 Une application est dérivable si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a :

$$f \text{ dérivable} \Leftrightarrow \exists l \text{ tel que } f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + (x - a)l + (x - a)\varepsilon(x)$$

Alors, l est la dérivée en a de f

Proposition 1.1 Continuité f dérivable $\implies f$ continue

Linéarité $(f + \alpha g)' = f' + \alpha g'$

Dérivées usuelles

Application linéaire u linéaire, f dérivable ; $(u \circ f)'(x) = u \circ f'(x)$

Application multi-linéaire φ une application n -linéaire ;

$$\left(\varphi(f_1, \dots, f_n) \right)'(x) = \sum_{i=0}^n \varphi \left(f_1(x), \dots, f_{i-1}(x), f'_i(x), f_{i+1}(x), \dots, f_n(x) \right)$$

Quotient u et v dérivables ; $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Composition f et g dérivables ; $(f \circ g)' = f' g'(f)$

Définition 1.2 (Application \mathcal{C}^1) $f \in \mathcal{C}^1(E, F)$ si l'application $f' : a \mapsto f'(a)$ existe et est continue.

Définition 1.3 (Dérivée k -ième) On définit récursivement la dérivée k -ième $f^{(k)}$:

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})' \quad (1.1)$$

Définition 1.4 (Application de classe \mathcal{C}^k) f est \mathcal{C}^k si f est k fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue.

Théorème 1.2 (LEIBNIZ) Soit φ une application bilinéaire, alors :

$$\varphi^{(n)}(f, g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi(f^{(k)}, g^{(n-k)}) \quad (\text{Leibniz})$$

1.2 Intégration

Théorème 1.3 (Inégalité de la moyenne : cas réel) Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et qu'il existe m et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq M$$

Alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (1.2)$$

Théorème 1.4 (Somme de RIEMANN) Soit $f : [a, b]$. Si f est intégrable, alors :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt \quad (1.3)$$

1.3 Primitive

Définition 1.5 (Primitive) F est une primitive de f si $\forall x, F'(x) = f(x)$.

Théorème 1.5 Si F est une primitive de f ,

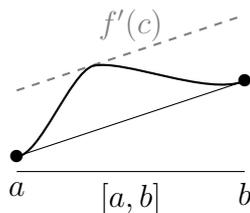
$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a) \quad (1.4)$$

1.4 Accroissements finis

1.4.1 Cas réel

Théorème 1.6 (Accroissements finis) $f \in \mathcal{D}(]a, b[,)$, alors

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } \boxed{f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)} \quad (1.5)$$

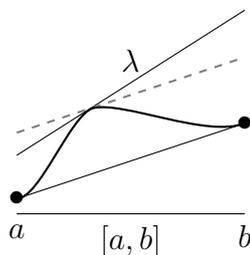


1.4.2 Cas vectoriel

Théorème 1.7 (Accroissements finis) $f \in \mathcal{C}(]a, b[,)$

Si $\exists \lambda$ tel que $\forall t \in]a, b[, N(f'(t)) \leq \lambda$, alors

$$\boxed{N(f(b) - f(a)) \leq \lambda(b - a)} \quad (1.6)$$



1.5 Formules de Taylor

Théorème 1.8 (Formules de Taylor) $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$, avec $(a, b) \in I^2$

$$\textit{Taylor-Young} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

$$\begin{aligned} \textit{Taylor-Laplace} \quad f(x) &= \overbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}^{T_n(x)} + \overbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}^{\text{Reste intégral } R_n(x)} \\ &= (x-a)^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^k}{k!} f^{(k+1)}((1-u)a + ux) du \end{aligned}$$

$$\textit{Taylor-Lagrange} \quad N \left(f(b) - f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} N_{\infty}^{[a,b]}(f^{(n+1)})$$

1.6 Fonctions différentiables

1.6.1 Différentiabilité

Définition 1.6 Soient E et F deux espaces de Banach. U un ouvert de E et f une fonction de U dans F . On dit que f est **différentiable** en un point a de U s'il existe une application linéaire continue $T \in L(E, F)$ telle que:

$$f(x) - f(a) - T(x-a) = o(x-a),$$

quand x tend vers a .

Proposition 1.2 Si f est différentiable en a , alors $y = f(x)$ est continue.

Définition 1.7 Si la fonction f est différentiable en a , on appelle **différentielle** de f au point a l'unique application linéaire $T \in L(E, F)$ telle que:

$$f(x) - f(a) - T(x-a) = o(x-a).$$

1.6.2 Matrice Jacobienne

Théorème 1.9 *Si U est un ouvert de \mathbb{R}^n et f une application de U dans \mathbb{R}^p , différentiable en $x_0 \in U$, et si (f_1, f_2, \dots, f_p) sont les fonctions coordonnées de f , la matrice Jacobienne de f en x_0 s'écrit:*

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Théorème 1.10 *Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , V un ouvert de \mathbb{R}^p , f une application de U dans \mathbb{R}^p et g une application de V dans \mathbb{R}^q . Si $f(U) \subset V$, si f est différentiable en x_0 et g en $y_0 = f(x_0)$, on a:*

$$J_{g \circ f} = J_g(y_0) \cdot J_f(x_0).$$

Chapitre 2

Systèmes dynamiques linéaires

2.1 Introduction

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0 ;
- de sa loi d'évolution.

2.2 Les systèmes dynamique

Définition 2.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que*

- (1) $\mu(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
- (2) $\mu(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
- (3) $\mu(0, x) = x$
- (4) $\mu(t + s, x) = \mu(t, \mu(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Exemple 2.1 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où A est une matrice constante, $x \in \mathbb{R}^n$. la solution du système précédent est $x(t) = e^{At}x_0$.

Le système (2.1) engendre un système dynamique $(t, x) \rightarrow \mu(t, x) = e^{At}x_0$.

(1) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|\mu(t, x) - \mu(t, y)\| &= \|e^{At}x_0 - e^{At}y_0\| = \|e^{At}\| \cdot \|x_0 - y_0\| \\ &\leq e^{\|A\|t} \|x_0 - y_0\| \\ \lim_{x \rightarrow y} \|\mu(t, x) - \mu(t, y)\| &\leq \lim_{x \rightarrow y} e^{\|A\|t} \|x_0 - y_0\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

car $\|e^{At}\| = \left\| \frac{(At)^n}{n!} \right\| \leq \frac{(\|At\|)^n}{n!} = e^{\|A\|t}$, alors $\lim_{x \rightarrow y} \|\mu(t, x) - \mu(t, y)\| = 0$ donc $\mu(\cdot, x)$ est continue.

(2) Soit $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\mu(t+s, x) - \mu(t, x)\| &= \|e^{A(t+s)}x_0 - e^{At}x_0\| \\ &\leq \|e^{At}\| \cdot \|e^{A(s)}x_0 - x_0\| \\ &\leq e^{\|A\|t} \|x_0\| \cdot \|e^{A(s)} - I\|, \end{aligned}$$

alors $\lim_{s \rightarrow 0} \|\mu(t+s, x) - \mu(t, x)\| = 0$ donc $\mu(t, \cdot)$ est continue.

(3)

$$\mu(0, x) = e^{0 \cdot A}x = I \cdot x = x.$$

(4)

$$\mu(t+s, x) = e^{(t+s)A}x = e^{tA+sA}x = e^{tA}e^{sA}x,$$

alors

$$\mu(t+s, x) = e^{tA}\mu(s, x) = \mu(t, \mu(s, x)).$$

2.2.1 Système dynamique à temps continu et discret

Un système peut être :

– **à temps continu** : représentée par une équation différentielle ordinaire.

On définit un système dynamique à temps continu avec le système suivant:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \quad (2.2)$$

où F une application de D dans D , et $D \subset \mathbb{R}^n$

- **à temps discret** : l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues. Elle est représentée par le modèle général des équations aux différences finie.

On définit un système dynamique à temps discret avec la relation de récurrence donnée comme suivante:

$$x(k+1) = F(x(k)), \quad (2.3)$$

où F une application de $D \times \mathbb{N}$ dans D , $(x_k, k) \in (D, \mathbb{N})$ et $D \subset \mathbb{R}^n$ satisfaite:

$$F^0(x) = x, F^1(x) = F(x), F^2(x) = F(F(x)), \dots, F^k(x) = F(F^{k-1}(x)),$$

et

$$x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \dots, x_k = F^k(x_0).$$

il peut être aussi

Un système dynamique est une structure qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- **Causale**, où son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent
- **Déterministe**, c'est-à-dire qu'à partir d'une condition initiale donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible.

2.3 Systèmes linéaires

Définition 2.2 *Le système différentiel (1) est linéaire s'il écrit sous la forme :*

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + a, \quad (2.4)$$

où A une matrice et b un vecteur.

Si $b = 0$ alors le système correspondant est dit linéaire homogène.

2.4 Trajectoires et orbites

Définition 2.3 Soit $\dot{x} = F(t, x)$ un système déterministe défini sur un ouvert $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Chaque solution $x(t, t_0, x_0)$ de cette équation, défini pour $t \in I$, où I est intervalle contenant t_0 , est représentée par une courbe de l'espace \mathbb{R}^{n+1} , contenue dans Δ , dont chaque point $(t, x(t))$ donne l'état du système à l'instant t .

L'ensemble de ces points est appelé une trajectoire (ou courbe intégrale).

On peut considérer les n fonctions $x_i(t)$, coordonnées de $x(t)$, comme la représentation paramétrique d'une courbe dans l'espace \mathbb{R}^n appelé espace des phases du système.

Définition 2.4 L'orbite (positive) d'une solution $x(t, t_0, x_0)$ de l'équation $\dot{x} = F(t, x)$ est l'ensemble $\{f^n(x) \text{ tel que } n \geq 0\}$. pour $t \in I$, dans l'espace des phases .

Si f est bijective, l'orbite de x est $\{f^n(x) \text{ tel que } n \in \mathbb{Z}\}$.

Chaque orbite est orientée dans le sens du déplacement de $x(t)$ pour t croissant.

On appelle portrait de phase du système différentiel l'ensemble des orbites des solutions de ce système.

La théorie des systèmes dynamiques s'intéresse particulièrement au comportement des orbites. Il est souvent utile de considérer aussi des «pseudo-orbites» au sens de la définition suivante.

Définition 2.5 (δ -pseudo-orbite) Soit $\delta > 0$. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$) est une δ -pseudo-orbite si $\forall i \in \mathbb{N}$ (ou \mathbb{Z}), $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$.

Par exemple, une orbite simulée numériquement est une δ -pseudo-orbite, puisque les calculs sont effectués avec une précision limitée.

Dans la suite, on supposera X métrique compact.

La notion de conjugaison topologique est extrêmement importantes. Elle traduit l'idée que deux systèmes dynamiques sont topologiquement équivalents.

Définition 2.6 (Conjugaison topologique) Soit $r \geq 0$. Deux applications C^r $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ sont topologiquement conjuguées lorsqu'il existe un homéomorphisme $h : X \rightarrow Y$ tel que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Lorsque h est un C^m difféomorphisme ($m \leq r$), on parle de *conjugaison lisse*. Parfois, on peut seulement trouver $h : X \rightarrow Y$ continue surjective telle que $h \circ f = g \circ h$. On parle alors de *semi-conjugaison*.

Nous pouvons désormais définir la stabilité structurelle d'un système dynamique.

Définition 2.7 (Stabilité structurelle) Une application f de C^r est C^m structurellement stable ($1 \leq m \leq r \leq \infty$) s'il existe un voisinage U de f pour la C^m topologie telle que toute application $g \in U$ est topologiquement conjuguée à f .

Si de plus on peut choisir $h = h_g$ dans la conjugaison de f et g tel que h_g et h_g^{-1} convergent uniformément vers l'identité lorsque g converge vers f pour la topologie C^m , alors on dit que f est C^m fortement structurellement stable.

2.5 Point d'équilibre

Définition 2.8 Cas continu : On appelle point d'équilibre, point critique ou point singulier du système différentiel non linéaire $\dot{x} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x_0) = 0$.

Définition 2.9 Cas discret : On dit que $x^* \in D$ est un **point fixe** de F si:

$$F(x^*) = x^*.$$

Définition 2.10 On dit que x^* est un **point périodique** si $n \geq 1$, tel que $F^n(x^*) = x^*$. La période d'un point périodique x^* est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que:

$$F^n(x^*) = x^*,$$

l'ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ forme une **orbite périodique d'ordre p** ou un cycle d'ordre p , si:

$$F(x_i) = x_{i+1} \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, p-2 \text{ et } F(x_{p-1}) = x_0.$$

Autrement dit, chaque point d'une orbite périodique d'ordre p est un point fixe pour F^p : $F^p(x_i) = x_i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ et n'est pas un point fixe pour F^k si $k < p$.

2.6 Fonction définie positive ou négative

Définition 2.11 Soit $V : B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue où B_ρ la boule unité ouverte de rayon ρ de \mathbb{R}^n .

V est dite définie positive si :

- 1) $V(0) = 0$ et
- 2) $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ de B_ρ .

Définition 2.12 V est dite définie négative si $-V$ est définie positive.

2.6.1 Fonction semi-définie positive ou semi-définie négative

Définition 2.13 V est dite semi-définie positive si :

- 1) $V(0) = 0$ et
- 2) $V(x) \geq 0$ pour tout $x \in B_\rho$ pour un $\rho > 0$.

Définition 2.14 V est dite semi-définie négative si $-V$ est semi-définie positive.

2.7 Flot d'une équation différentielle

Définition 2.15 Soit système non linéaire

$$\dot{x} = f(x)$$

et le problème à valeurs initiales

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, E un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Pour $x_0 \in E$ et $\phi(t, x_0)$ la solution de problème à valeurs initiales, l'ensemble des applications ϕ_t défini par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

est appelé le flot du système différentiel.

2.8 Espace des phases

L'espace des phases (ou espace d'états) est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié.

Théorème 2.1 (Brouwer) *Soit F une application continue de $\overline{B^n}$ dans lui-même où*

$\overline{B^n} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$, alors l'équation $F(x) = x$ admet une solution dans $\overline{B^n}$ c'est-à-dire F admet un point fixe.

Théorème 2.2 (Contraction de Banach) *Soit F une application continue de $\overline{B^2}$ dans lui-même, on suppose que:*

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| < \lambda \|x_1 - x_2\|,$$

pour tout vecteur $x_{i,j} \in \overline{B^2}$ et un certain $\lambda \in (0, 1)$. Alors il existe un point fixe unique $x^ \in \overline{B^2}$. De plus on a:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = x, \quad \forall x \in \overline{B^2}.$$

2.9 Section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret. Cette transformation s'opère via une réduction d'une unité de l'ordre du système. Soit un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension n et une surface de dimension $(n - 1)$ définie dans cet espace. L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface.

L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface représente la section de Poincaré. Dans un espace euclidien, le plan de la section doit être choisi de manière à garantir l'existence d'intersections avec la trajectoire φ et de telle sorte que celle-ci le traverse alternativement dans un sens puis dans l'autre.

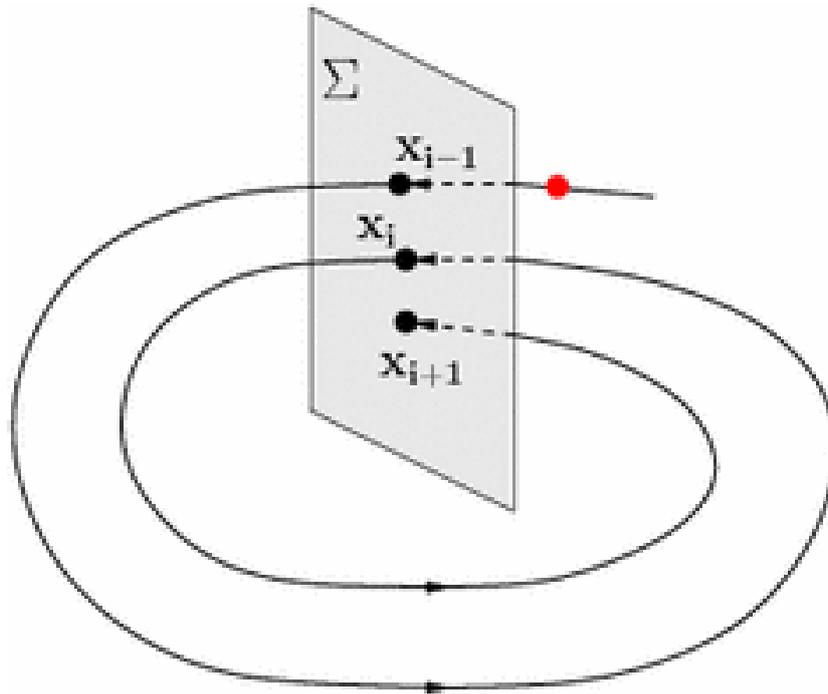


FIGURE 2.1 – La section de Poincaré.

2.9.1 Stabilité des systèmes linéaires

★ Cas continu

Le cas linéaire se définit par la situation particulière où F est un endomorphisme de \mathbb{R}^n d'où

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad (2.5)$$

où A est une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$.

L'origine est toujours un point d'équilibre de (2.5) (mais il peut y en avoir d'autres : tout élément de $\ker A$ est un point d'équilibre).

- L'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (2.5) si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.
- Si A a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas un point d'équilibre stable de (2.5).

★ **Cas discret** Soit le système linéaire

$$X_{n+1} = AX_n \quad (2.6)$$

où A est une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$.

- L'origine est un point fixe asymptotiquement stable de (2.6) si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont inférieure strictement 1 avec valeur absolue $|\lambda_i| < 1$.
- Si A a au moins une valeur propre de partie supérieure strictement 1 avec valeur absolue, alors l'origine n'est pas un point fixe stable de (2.6) $|\lambda_1| > 1$.

2.9.2 Point limite

Définition 2.16 *Pour tout point x , on note $\omega(x)$ (ensemble ω -limite de x) l'ensemble des points d'accumulation de $(f^n(x))_{n \geq 0}$ et $\alpha(x)$ (ensemble α -limite de x) l'ensemble des points d'accumulation de $(f^n(x))_{n \leq 0}$. On définit alors l'ensemble ω -limite $L^+(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)}$, l'ensemble α -limite $L^-(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \alpha(x)}$ et l'ensemble limite $L(f) = L^+(f) \cup L^-(f)$.*

Un point de $\omega(x)$ est un point dont l'orbite issue de x visite le voisinage une infinité de fois. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} R^+(f) &\subset L^+(f) \text{ et } R^-(f) \subset L^-(f) \\ f(L^+(f)) &= L^+(f) \text{ et } f(L^-(f)) = L^-(f) \end{aligned}$$

2.9.3 Attracteur et Bassin d'attraction

Les définitions suivantes précisent les notions intuitives d'attracteur et de bassin d'attraction.

Définition 2.17 (Attracteur) *Une partie compacte $A \subset X$ est un attracteur pour f s'il existe un voisinage V de A et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $f^N(V) \subset V$ et $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(V)$.*

Définition 2.18 (Bassin d'attraction) *Soit A un attracteur. Le bassin d'attraction de A , noté $B(A)$, est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\omega(x) \subset A$.*

Chapitre 3

Systèmes dynamiques non linéaires

3.1 Systèmes autonomes et non autonomes

- On dit que le système différentiel est **autonome**, si sa loi d'évolution ne dépend pas du temps (la loi est alors dite stationnaire) ;

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \quad (3.1)$$

- On dit que le système différentiel est **non autonome** ; sa loi d'évolution dépend alors du temps.

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), t), \quad (3.2)$$

3.2 Systèmes conservatifs et dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Définition 3.1 Soit $(\Gamma, F, d\tau)$ un système dynamique. Pour $\Omega \subset \Gamma$ une région de l'espace de phase, on définit $\phi_{t,0}(\Omega) = \{\phi_{t,0}(x), x \in \Omega\}$ le flot de cette région.

- Le système dynamique est dit conservatif, s'il conserve les volumes d'espace de

phase :

$$\forall \Omega \subset \Gamma, \forall t > 0, \int_{\phi_{t,0}(\Omega)} d\tau = \int_{\Omega} d\tau$$

– Le système dynamique est dit *dissipatif*, s'il contracte les volumes d'espace de phase :

$$\forall \Omega \subset \Gamma, \forall t > s > 0, \int_{\phi_{t,0}(\Omega)} d\tau < \int_{\phi_{s,0}(\Omega)} d\tau$$

3.3 Etude de la stabilité du point fixe

Soient E un ensemble et $A \subset E$,

- On dit que A est invariant par F si $F(A) \subset A$.
- On dit que A est un attractif (ou attracteur) si A compact fermé et invariant par F ; et s'il existe un voisinage V de A tel que pour $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 est une suite qui converge vers A . Le voisinage V est appelé le **bassin d'attraction** de A et on a:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} F^k(V).$$

- On dit que A est **instable** (ou répulsif) s'il existe un voisinage V de A tel que pour tout $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 s'éloigne de A (ou de manière équivalente: si A est un attracteur pour F^{-1}).
- On dit que A est un **attracteur étrange** si l'orbite de x est dense dans A , $\forall x \in A$ et est sensible aux conditions initiales.
- L'attracteur le plus simple est le point fixe, il peut être attractif ou répulsif.

3.3.1 stable au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique à temps continu :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \quad \text{Condition initiales,} \end{cases} \quad (3.3)$$

où F une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , et $x \in \mathbb{R}^n$.

Et soit le système dynamique à temps discret :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ x_{k_0} = x_0 \quad \text{Condition initiales,} \end{cases} \quad (3.4)$$

où F une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , et $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 3.2 *Le système dynamique (3.3) est dit **stable au sens de Lyapunov** par rapport au point d'équilibre x^* si suffisamment proches du point fixe pour la condition initiales $x(t_0)$, et nous écrivons:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|F(t, t_0, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t > t_0.$$

En dimension un, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ c'est la pente $m = F'(x^)$ de la tangente au point fixe x^* qui détermine le type de point d'équilibre.*

Définition 3.3 *Le système dynamique (3.4) est dit **stable au sens de Lyapunov** par rapport au point fixe x^* si suffisamment proches du point fixe pour la condition initiales $x(k_0)$, et nous écrivons:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(k_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|F(k, k_0, x(k_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall k > k_0.$$

En dimension un, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ c'est la pente $m = F'(x^)$ de la tangente au point fixe x^* qui détermine le type de point fixe.*

3.3.2 Point attractif

Définition 3.4 *Le point d'équilibre x^* du système (3.3) est **attractif** si:*

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}; \exists \delta_0(t_0), \text{ tel que } \|x(t_0) - x^*\| < \delta_0(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, t_0, x(t_0)) = x^*,$$

lorsque $\delta_0(t_0) = +\infty$; on dit que le point d'équilibre x^ est globalement attractif.*

Définition 3.5 *Le point fixe x^* du système (3.4) est **attractif** si:*

$$\forall k_0 \in \mathbb{N}; \exists \delta_0(k_0), \text{ tel que } \|x(k_0) - x^*\| < \delta_0(k_0) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} F(k, k_0, x(k_0)) = x^*,$$

lorsque $\delta_0(k_0) = +\infty$; on dit que le point fixe x^ est globalement attractif.*

Définition 3.6 *Le point fixe x^* est dit asymptotiquement (respectivement globalement asymptotiquement) stable lorsqu'il est à la fois stable au sens de Lyapunov et attractif (respectivement globalement asymptotiquement).*

3.3.3 Méthode de linéarisation

Soit le système dynamique non linéaire

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= F(x(t)), \\ x(t_0) &= x(0), \text{ Condition initiales.} \end{aligned} \quad (3.5)$$

La linéarisation au tour du point d'équilibre x^* revient à poser :

$$x = x^* + \delta x.$$

Alors

$$\dot{x} = \dot{x}^* + \delta \dot{x}.$$

On obtient donc :

$$\dot{x}^* + \delta \dot{x} = F(\dot{x}^* + \delta \dot{x}).$$

Par le développement de Taylor du premier ordre de $F(x)$, on obtient

$$F(\dot{x}^* + \delta \dot{x}) = F(\dot{x}^*) + F'(\dot{x}^*)(\delta \dot{x}).$$

D'où

$$\delta \dot{x} = DF(\dot{x}^*)\delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0$$

$DF(x)$ représente la matrice jacobienne de $F(x)$ par rapport à x , tel que

$$DF(\cdot) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta x_1} & \frac{\delta F_1}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta F_1}{\delta x_n} \\ \frac{\delta F_2}{\delta x_1} & \frac{\delta F_2}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta F_2}{\delta x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\delta F_n}{\delta x_1} & \frac{\delta F_n}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta F_n}{\delta x_n} \end{pmatrix}$$

3.3.4 Méthode de Lyapunov

Méthode indirecte de Lyapunov

La méthode indirecte, aussi appelée première méthode de Lyapunov, consiste à linéariser le système dynamique autour d'un point fixe x^* et à tester la stabilité du système.

Théorème 3.1 *Soit le système non linéaire (3.3), et soient λ_i , $i = 0, 1, \dots, n$, les valeurs propres de la matrice jacobienne de $F(\cdot)$ au point d'équilibre x^* du système (3.3) est:*

1. *Asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne sont de partie réelle strictement négative.*
2. *Instable (ou répulsif) si la matrice jacobienne admet au moins une valeur propre au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive*
3. *On ne peut pas conclure la stabilité locale du point fixe si certaines valeurs propres de la matrice jacobienne sont nulles*

Théorème 3.2 *Soit le système non linéaire (3.4), et soient λ_i , $i = 0, 1, \dots, n$, les valeurs propres de la matrice jacobienne de $F(\cdot)$ au point fixe x^* du système (3.4) est:*

1. *Asymptotiquement stable si $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$, tel que $\|\lambda_i\| < 1$.*
2. *Instable (ou répulsif) si la matrice A admet au moins une valeur propre de module strictement supérieur à l'unité. $\exists i \in \{0, 1, \dots, n\}$, tel que $\|\lambda_i\| > 1$.*
3. *On ne peut pas conclure la stabilité locale du point fixe si certaines valeurs propres de la matrice A sont sur le cercle du rayon de l'unité et les autres à l'intérieur.*

Méthode directe de Lyapunov

Dans la méthode directe de Lyapunov, on cherche une fonction scalaire (de type énergétique), que admet une différence négative. Cette fonction est appelée fonction de Lyapunov.

Définition 3.7 *Soit le système (3.3), la fonction de Lyapunov est une fonction scalaire $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, continue en $x(t)$, tel que:*

1. $V(0) = 0$,
2. $V(x(t)) > 0, \forall x(t) \neq 0$,
3. $V(x(t)) \rightarrow +\infty$ si $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$.

Exemple 3.1 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^2 \\ \dot{y} = xy - y^3 \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité en point d'équilibre $(0, 0)$ avec une fonction de Lyapunov, supposons $V(x, y) = ax^2 + by^2$ où $a > 0, b > 0$, alors

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} \\ \dot{V}(x, y) &= 2ax(-x^3 - y^2) + 2byxy - y^3 \end{aligned}$$

donc

$$\dot{V}(x, y) = -2ax^4 - 2axy^2 + 2bxy^2 - 2by^4.$$

On pose $a = b = 1$ alors

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= -2x^4 - 2y^4 = -2(x^4 + y^4) \\ \implies &\begin{cases} V(x, y) = x^2 + y^2 > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ V(0, 0) = 0 \\ \dot{V}(x, y) = -2(x^4 + y^4) < 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} V(x, y) = +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

Théorème 3.3 Le principe de la deuxième méthode de Lyapunov consiste à remplacer l'étude de convergence de $x(t)$ vers $x^* = 0$, c'est-à-dire le point d'équilibre $x^* = 0$ est asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, telle que:

$$\dot{V}(x(t)) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0. \quad (3.6)$$

C'est-à-dire la fonction de Lyapunov est strictement décroissante où $\dot{V}(x(t)) = \frac{\delta V}{\delta x} \dot{x}$ et $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Remarque 3.1 Si le point d'équilibre $x^* \neq 0$, on s'y ramène par un changement de variable du type $x'(t) = x(t) - x^*$.

Définition 3.8 Soit le système (3.4), la fonction de Lyapunov est une fonction scalaire $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, continue en x_k , tel que:

1. $V(0) = 0$,
2. $V(x_k) > 0, \forall x_k \neq 0$,
3. $V(x_k) \rightarrow +\infty$ si $\|x_k\| \rightarrow +\infty$.

Théorème 3.4 *Le principe de la deuxième méthode de Lyapunov consiste à remplacer l'étude de convergence de x_k vers $x^* = 0$, c'est-à-dire le point fixe $x^* = 0$ est asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, telle que:*

$$\Delta V(x_{k+1}, x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0, \quad \forall x_k \neq 0. \quad (3.7)$$

Remarque 3.2 *Si le point fixe $x^* \neq 0$, on s'y ramène par un changement de variable du type $x'_k = x_k - x^*$.*

Exemple 3.2 *Soit le système différentiel de Lorenz suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(y - x) \\ \dot{y} = -xz + \frac{1}{2}x - y \\ \dot{z} = xy - 3z. \end{cases} \quad (3.8)$$

En étude la stabilité de point d'équilibre $(0, 0, 0)$ de ce système

Posons

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)$$

$$\dot{V}(x, y, z) = \alpha x \dot{x} + \beta y \dot{y} + \gamma z \dot{z}$$

$$\dot{V}(x, y, z) = 2\alpha x(y - x) + \beta y(-xz + \frac{1}{2}x - y) + \gamma z(xy - 3z)$$

alors

$$\dot{V}(x, y, z) = 2\alpha xy - 2\alpha x^2 - \beta xyz + \frac{1}{2}\beta xy - \beta y^2 + \gamma xyz - 3\gamma z^2,$$

on pose $\beta = \gamma$ alors

$$\dot{V}(x, y, z) = 2\alpha xy - 2\alpha x^2 + \frac{1}{2}\beta xy - \beta y^2 - 3\beta z^2,$$

on pose $\beta = \gamma = 2$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ alors

$$\dot{V}(x, y, z) = -x^2 + 2xy - 2y^2 - 6z^2$$

$$\dot{V}(x, y, z) = -(x - y)^2 - y^2 - 6z^2$$

donc

$$\dot{V}(x, y, z) = -[(x - y)^2 + y^2 + 6z^2] < 0 \text{ si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

La fonction de Lyapunov est

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + 2z^2\right)$$

V est satisfaite les conditions de définition (3.7) alors le point d'équilibre $(0, 0, 0)$ est asymptotiquement stable.

3.3.5 Stabilité des points périodiques

Comme les points périodiques sont des points fixes de F^p , alors:

Théorème 3.5 *Soit x le point périodique d'un cycle d'ordre p : Si les valeurs propres de la matrice $DF^p(x)$ sont des modules strictement inférieurs à l'unité, le cycle est stable; si la matrice $DF^p(x)$ admet au moins une valeur propre de module strictement supérieur à l'unité, le cycle est instable.*

En dimension un, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est $m_p = F^p(x^*)$ alors:

Théorème 3.6 Cas discret : Pour $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le cycle $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$:

1. Stable (ou attractif) si: $|m_p| < 1$.
2. Instable (ou répulsif) si: $|m_p| > 1$.
3. Indifférent si: $|m_p| = 1$.
4. Super stable (ou super attractif) si: $|m_p| = 0$.

m_p s'appelle le multiplicateur de F du cycle $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ et $m_p = \prod_{i=0}^{p-1} F'(x_i)$,
où $F' = \frac{dF}{dx}$.

3.4 Nature des points fixes et cycles

Pour caractériser la nature des points fixes et les cycles nous supposons que:

- a) Si la dimension de système (3.2) est égal à un, le multiplicateur d'un point fixe x^* est $m = F'(x^*)$ où $F' = \frac{dF}{dx}$ et le multiplicateur d'un cycle d'ordre p , $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ est $m_p = \prod_{i=0}^{p-1} F'(x_i)$.

Un point fixe ou un cycle est dit stable (ou attractif) si $|m| < 1$ ($|m_p| < 1$ respectivement), et instable (ou répulsif) si $|m| > 1$ ($|m_p| > 1$ respectivement).

- b) Si la dimension de système (3.2) supérieur un, les multiplicateurs d'un point fixe x^* ou d'un cycle d'ordre p sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne de $F(x^*)$ ou de $F^p(x_i)$.

Lorsque la dimension de système (2) est égal à deux, il existe deux valeurs propres λ_1 et λ_2 alors la nature de point fixe ou cycle donnée comme suivante:

Cas continu

- 1) **Col:** Si λ_1 et λ_2 sont réels: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

Un col est un point instable:

- 2) **Noeud:** Si λ_1 et λ_2 sont réels

a- stable si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$,

b- instable si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

- 3) **Foyer:** Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $\lambda_{i,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$,

a- stable si $\alpha < 0$,

b- instable si $\alpha > 0$,

c- centre si $\alpha = 0$.

Cas discret

- 1) **Col:** Si λ_1 et λ_2 sont réels: $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$.

Un col est un point instable:

a- de type 1 si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$,

b- de type 2 si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$,

c- de type 3 si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

- 2) **Noeud:** Si λ_1 et λ_2 sont réels

a- stable si $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$,

b- instable si $|\lambda_i| > 1, i = 1, 2$.

3) Foyer: Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $r = |\lambda_i|, i = 1, 2$,

a- stable si $r < 1$,

b- instable si $r > 1$.

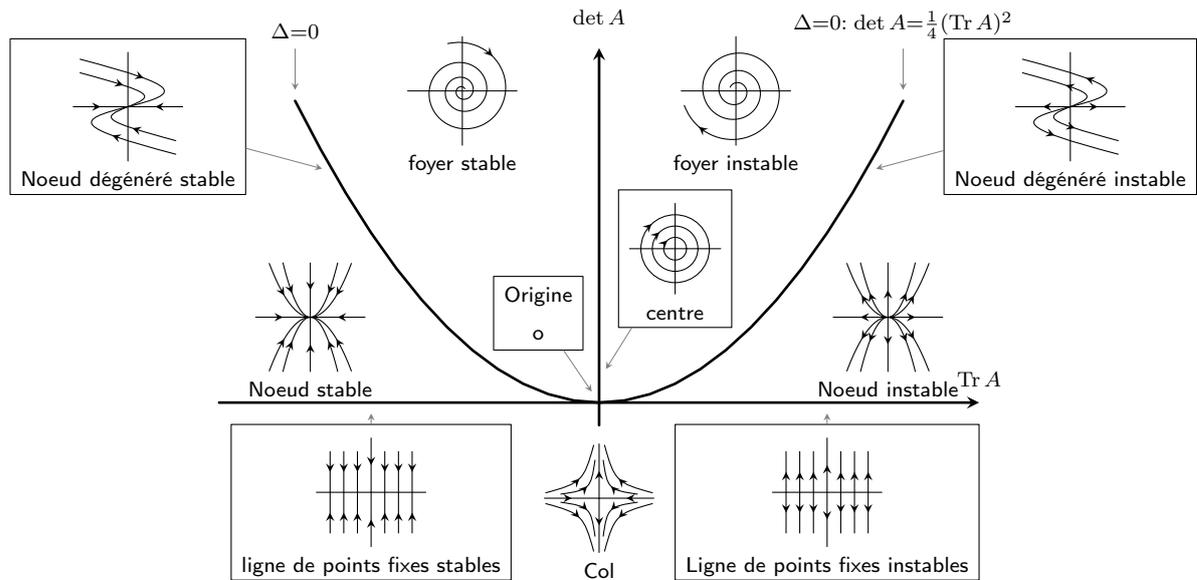


FIGURE 3.1 – Classification des portraits de phases dans le plan $(\det A, \text{Tr } A)$.

3.5 Exposants de Lyapunov

En régime chaotique, la distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. tant donné une précision sur les mesures, le temps que mettent deux conditions initiales dont la distance à l'origine est de l'ordre de cette précision constitue l'horizon prédictif du système. Les exposants dits de Lyapunov permettent de mesurer ce taux de divergence.

La mesure du plus grand exposant de Lyapunov nécessite d'itérer la dynamique du modèle pour deux conditions initiales très proches, et de mesurer au bout d'un temps fini la distance entre ces deux trajectoires. Pour que ce calcul soit valable, il faut

bien sûr que ces deux conditions initiales soient situées à proximité de l'attracteur.

Une erreur $\epsilon_0 > 0$ sur la condition initiale va évoluer exponentiellement et l'erreur, à un instant t , aura l'expression suivante : $|\epsilon(t)| = \epsilon_0 e^{\lambda t}$. On peut calculer la valeur de λ , appelé exposant de Lyapunov, grâce aux méthodes développées par Alexandre Lyapunov.

3.5.1 Exposant de Lyapunov pour un système de dimension égale a un

Soit un système dynamique de dimension égal un. donné par une application discrète $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$x_{k+1} = f(x_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Soit x_0 une condition initiale x_0 , un accroissement δx_0 , (avec $\delta x_0 \rightarrow 0$) afin d'obtenir une seconde initiale proche x'_0 telle que:

$$x'_0 = x_0 + \delta x_0.$$

On utilise les deux premiers termes d'un développement en séries de Taylor on a ;

$$f(x'_0) = f(x_0 + \delta x_0) = f(x_0) + f'(x_0). \delta x_0. \quad (3.10)$$

En remplaçant dans (3.10) on obtient

$$\delta x_1 = f'(x_0). \delta x_0 \text{ tel que } \delta x_1 = x'_1 - x_1, \quad (3.11)$$

où $x_1 = f(x_0)$ et $x'_1 = f(x'_0)$. Nous prenons à nouveau l'image par f des deux membres de (3.11) on obtient

$$f(x'_1) = f[f(x_0 + \delta x_0)] = f[f(x_0)] + f'[f(x_0)]. \delta x_0, \quad (3.12)$$

donc

$$f(x'_1) = f^2(x_0) + f'[f(x_0)]. \delta x_0, \quad (3.13)$$

donc le premier itéré de f sur x'_1 , il vient

$$f(x'_1) = f(x_1) + f'(x_1). \delta x_1. \quad (3.14)$$

En introduisant (3.10) dans (3.14), nous obtenons l'équation suivante:

$$f(x'_1) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot f'(x_0) \cdot \delta x_0. \quad (3.15)$$

On suppose ainsi

$$\delta x_2 = f'(x_1) \cdot f'(x_0) \cdot \delta x_0, \quad (3.16)$$

alors l'équation (3.15) est équivalent l'équation suivante

$$f(x'_1) = f(x_1) + \delta x_2. \quad (3.17)$$

Nous généralisons l'équation (3.16) à une étape d'itération quelconque k en écrivant

$$\delta x_k = \left(\prod_{m=0}^{m=k-1} f'(x_m) \right) \cdot \delta x_0. \quad (3.18)$$

En supposant $|\delta x_k| \approx (\gamma)^k |\delta x_0|$, l'évolution est obtenue par un taux effectif γ par pas d'itération, qui est donné par l'équation (3.18) avec l'équation (3.19).

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{\delta x_k}{\delta x_0} \right| \right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\prod_{m=0}^{m=k-1} |f'(x_m)| \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (3.19)$$

Après logarithme de l'équation (3.19), nous obtenons l'exposant de Lyapunov,

$$\lambda = \log(\gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{m=k-1} \log(|f'(x_i)|), \quad (3.20)$$

$$\lambda = \log(\gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{m=k-1} \log(|f'(x_i)|). \quad (3.21)$$

Pour $\lambda \leq 0$ la trajectoire de l'évolution du système peut tendre vers un point fixe, avoir un comportement périodique (ou quasi-périodique).

Pour $\lambda > 0$ le système est chaotique.

Pour $\lambda \rightarrow \infty$ le système devient aléatoire.

3.5.2 Exposants de Lyapunov pour un système de dimension supérieure strictement à un

Soit le système dynamique de dimension n défini par:

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k), & k = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 \text{ est la condition initiale,} \end{cases} \quad (3.22)$$

où F une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . Pour le calcul des exposants de Lyapunov, la méthode est la suivante. On remarque la trajectoire du point initial x_0 et celui de un point très proche, $x_0 + \varepsilon_0$ (x_0 et $x_0 + \varepsilon_0$ sont des vecteurs d'espace d'état). L'évolution du système est décrite par l'application F . D'abord, la distance entre les deux points est déterminée par la norme de ε_0 . Après itération, la distance entre les deux points de trajectoires est donnée comme suivante:

$$\|\varepsilon_1\| = \|F(x_0 + \varepsilon_0) - F(x_0)\| = \|J(x_0)\varepsilon_0\|, \quad (3.23)$$

où $J(x_0)$ est la matrice jacobienne de F évaluée en x_0 .

Après généraliser l'équation (3.23) une étape d'itération quelconque k , nous écrivons

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_k\| &\approx \|J(x_{k-1})J(x_{k-2})\dots J(x_0)\varepsilon_0\| \\ &\approx \left\| \prod_{i=0}^{i=k-1} J(x_i) \right\| \cdot \|\varepsilon_0\|, \end{aligned} \quad (3.24)$$

où $\prod_{i=0}^{i=k-1} J(x_i) = J(x_{k-1})J(x_{k-2})\dots J(x_0)$.

On définit alors les n exposants de Lyapunov avec la limite suivante:

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \frac{1}{k} \log \left(\frac{\|\varepsilon_k\|}{\|\varepsilon_0\|} \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{k} \log \left(\frac{\|\varepsilon_i\|}{\|\varepsilon_{i-1}\|} \right). \quad (3.25)$$

Puisque l'application F n'est pas connue, la procédure de calculer les exposants de Lyapunov sera composé à estimer les matrices jacobiennes à partir des données. Ce n'est pas possible pour des problèmes d'instabilité numérique et une autre procédure doit être appliquée. Wolf et al. [1985] ainsi que Eckmann et Ruelle [1985] ont présentés des algorithmes performants pour les séries temporelles.

3.5.3 Méthode de Wolf

Soit un système dynamique discret de dimension n défini par (3.22).

On définit la suite de vecteurs:

$$v_i(k+1) = J(k)v_i(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.26)$$

où $J(k)$ est la Jacobienne de F au point x_k .

Alors après n itération le système (3.26) devient:

$$v_i(k+1) = J(k)J(k-1)\dots J(0)v_i(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.27)$$

dans le système (3.26), la longueur du premier axe principal augmente comme $e(\lambda_1 k)$, la zone définie par les deux premiers axes principaux augmente comme $e((\lambda_1 + \lambda_2)k)$, le volume défini par les trois premiers axes principaux augmente comme $e((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)k)$... ect, et immédiatement:

$$\lambda_i \approx \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log \left(\frac{\|v_1\|}{\|v_0\|} \cdot \frac{\|v_2\|}{\|v_1\|} \dots \frac{\|v_N\|}{\|v_{N-1}\|} \right). \quad (3.28)$$

Pour $k = 0$, les vecteurs v_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sont définis par:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots, 0) \\ v_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ v_n &= (0, 0, 1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Pour éviter la divergence, à chaque itération les vecteurs $v_i(k)$, $v_2(k)$, \dots , $v_n(k)$ seront orthonormés par le procédé de Gram-Schmidt.

Alors, le i -ème approximation de l'exposant de Lyapunov est défini en application du taux de croissance du i -ème axe principal v_i par la formule:

$$\lambda_i \approx \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log \frac{\|v_N\|}{\|v_0\|}, \quad \text{où } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.29)$$

En conséquence, ils peuvent, en temps fini, être supérieurs en valeur absolue à leur valeur en temps infini qui est utilisée habituellement et qui est obtenu avec la méthode de alan Wolf.

Remarque 3.3 *Pour un système non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange possèdera toujours au moins trois exposants de Lyapunov, existe au moins un exposant positif.*

Chapitre 4

Systemes dynamiques chaotiques

4.1 Définition mathématique du chaos

Il existe plusieurs définitions possibles du chaos, allant de la théorie ergodique, à l'approche topologique. Nous choisirons cette dernière car elle a le mérite de mettre en exergue trois concepts véritablement clés dans un comportement chaotique : imprédictibilité, irréductibilité et un élément de régularité.

L'évolution de système dynamique est imprédictible en ce sens qu'elle est sensible aux conditions initiales. Il est en particulier clair que la moindre erreur ou simple imprécision sur la condition initiale interdit de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et, en conséquence, de faire une prédiction autre que statistique sur le devenir à long terme du système. Ainsi, bien que l'on traite de systèmes déterministes, il est impossible de prévoir à long terme leurs comportements s'ils sont chaotiques. La seule manière est d'opérer effectivement l'évolution du système. Si cette simulation se fait numériquement, un problème de précision sur les conditions initiales se pose alors de petites erreurs d'arrondis dues à la précision du type de la variable codant ces conditions initiales peuvent exponentiellement s'amplifier de telle sorte que la trajectoire de phases obtenue n'est pas représentative de la réalité.

Exemple

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, est le variable d'état, et f une application à deux variables x et t , et soit $\phi_t(x_0)$ la solution de l'équation (2.1) qui passe par x_0 quand $t = t_0$.

4.1.1 Point limite positif

Définition 4.1 *Un point $y \in \mathbb{R}^n$ est dit appartenant au point limite positif d'un point $x \in \mathbb{R}^n$, si pour tout voisinage U de y on a, $\phi_t(x_0)$, tend vers U quand t tend vers l'infini.*

4.1.2 Ensemble limite positif

Définition 4.2 *L'ensemble $L(x)$ de tous les points limites positifs de x est appelé : l'ensemble limite positif de x .*

Une autre définition de $L(x)$ est donnée par :

$$L(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \exists t \geq t_0, \text{ tel que } |f(x, t) - y| \leq \varepsilon\} \quad (4.2)$$

4.1.3 Ensemble limite attractif

Définition 4.3 *Un ensemble limite L est dit attractif, s'il existe un voisinage ouvert U de L tel que : $L(x) = L$, pour tous $x \in U$.*

4.1.4 Bassin d'attraction

Définition 4.4 *On appelle bassin d'attraction d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble défini par : $B(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / A \text{ tel que : } L(x) \subset A\}$.*

4.1.5 Ensemble limite positif non-stable

Définition 4.5 *On dit qu'un ensemble limite positif L est non stable, s'il existe au moins une trajectoire qui n'appartient pas à L , qui est attiré par L , et il existe au moins une trajectoire dans le voisinage L de qui n'est pas attirée par L .*

4.1.6 Ensemble invariant

Définition 4.6 *Un ensemble A est invariant dans \mathbb{R}^n sous l'action du flot ϕ_t si et seulement si $\phi_t(x) \in A$: pour tout $x \in A$.*

4.1.7 Ensemble indécomposable

Définition 4.7 *Un ensemble A fermé et invariant de \mathbb{R}^n est indécomposable si : pour tout couple de points $(x, y) \in A^2$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite de points $(x_k)_{k=0,m}$ tel que : $x_0 = x$ et $x_m = y$, et une suite de temps $(t_k)_{k=0,m}$, $t_k \geq 1$ tel que : $|f(x_{k-1}, t_k) - x_k| \leq \varepsilon$.*

Cette série de définition nous permet de donner des définitions assez claires sur le phénomène du chaos.

Définition 4.8 *L'application $F : J \rightarrow J$ possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour un certain $x \in J$ et un certain voisinage $V \subset J$ de x , il existe $y \in V$ tel que $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta$.*

Avant d'entamer la notion d'irréductibilité, il est nécessaire d'introduire la notion d'ensemble dense.

4.1.8 Ensemble dense

Définition 4.9 *Supposons que X est un ensemble et Y un sous-ensemble de X . Y est dense dans X si, pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x , c'est-à-dire si la fermeture de Y est égale à X : $\bar{Y} = X$. Ce qui revient à dire que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une séquence $\{y_n\} \in Y$ de points $\{y_n\} \in Y$ qui convergent vers x . Pour exemple, l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres irrationnels sont denses dans l'ensemble des nombres réels.*

- *L'irréductibilité empêche le système chaotique d'être décomposé en sous-systèmes (sous-ensembles ouverts invariants) qui n'interagissent pas sous l'application. Cette propriété s'appelle la transitivité topologique. Autrement dit, une application transitive topologiquement possède des points qui évoluent d'un petit voisinage arbitraire vers n'importe quel autre.*
- *Notons qu'une application possédant une orbite dense est transitive topologiquement et que l'inverse est également vrai.*

Définition 4.10 *L'application $f : J \rightarrow J$ est dite transitive topologiquement si pour toute paire d'ensembles ouverts $U, V \subset J$, il existe $k > 0$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

- *Contrairement aux comportements purement aléatoires, les systèmes chaotiques possèdent une certaine régularité qui se traduit par le fait que les points périodiques sont denses. La densité des points périodiques exprime l'infinité des comportements dynamiques que prodigue le chaos. Nous sommes maintenant prêts pour donner une définition, ou plutôt une caractérisation du chaos :*

Définition 4.11 *Soit un ensemble V , l'application $f : J \rightarrow J$ est dite chaotique sur V si*

1. *f possède une sensibilité aux conditions initiales,*
2. *f est topologiquement transitive,*
3. *les points périodiques sont denses dans V .*

- *Cette définition est certainement la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables. De plus, elle s'applique à un très grand nombre de systèmes dynamiques chaotiques et dans certains cas elle est même facilement vérifiable.*

En générale il n'y a pas de définition rigoureuse du chaos, car ce phénomène est plus une notion philosophique qu'une notion scientifique. On peut observer le phénomène

du chaos dans plusieurs domaines, mais comment le formaliser ? La réponse est négative car jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas une théorie générale qui donne une explication ou une caractérisation finale de ce phénomène. Tout ce qu'il est possible de dire est qu'il existe plusieurs critères physiques qui permettent de confirmer qu'un système est chaotique. Notons qu'il existe quelques définitions du chaos, mais

elles restent restrictives, la plus efficace du point de vue pratique est celle donnée dans 66 : Le chaos se produit quand le comportement du système, n'est pas un point d'équilibre, n'est pas périodique, n'est pas quasi-périodique.

4.1.9 Chaos

La notion de «chaos» en systèmes dynamiques, contrairement à sa signification usuelle de désordre total, se réfère à une situation où les orbites ne convergent pas vers une orbite périodique ou quasi-périodique, et où l'évolution des orbites est imprévisible à un certain point, ou leur comportement est sensible aux conditions initiales. Les premiers exemples étudiés furent — entre autres — l'attracteur de Lorenz, l'application logistique et l'application de Hénon.

Définition 4.12 (Orbite chaotique) *L'orbite de x , $\{f^n(x)/n \geq 0\}$, est sensible (ou chaotique) s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall q \in \omega(x), \forall \epsilon > 0, \exists n_1, n_2, n > 0 / d(f^{n_1}(x), q) < \epsilon, \quad (4.3)$$

$$d(f^{n_2}(x), q) < \epsilon \text{ et } d(f^{n_1+n_2}(x), f^{n_2+n_1}(x)) > C.$$

Une orbite asymptotique à une orbite périodique ou quasi-périodique n'est pas chaotique au sens où si $f^{n_1}(x)$ et $f^{n_2}(x)$ sont proches, alors $f^{n_1+n_2}(x)$ et $f^{n_2+n_1}(x)$ restent proches pour tout $n \geq 0$.

Une orbite sensible est également imprévisible dans la mesure où savoir qu'un point y de l'orbite est extrêmement proche de $q \in \omega(x)$ n'est pas suffisant pour prédire le futur de y à une distance C près.

Définition 4.13 (Expansivité) *Un homéomorphisme $f : X \rightarrow X$ est expansif s'il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta_0$.*

Dans l'ensemble stable d'un attracteur hyperbolique non-trivial, de même que l'on a une forte sensibilité aux conditions initiales¹, on peut montrer que l'ensemble des points ayant une orbite chaotique a une mesure de Lebesgue totale.

Définition 4.14 (Dynamique chaotique) *Un système dynamique (X, f) est sensible (ou a une dynamique chaotique) lorsque l'ensemble des points ayant une orbite chaotique a une mesure de Lebesgue non-nulle².*

Cependant, le chaos ainsi défini ne doit pas être interprété comme une totale imprédictibilité. En effet, on observe numériquement, pour certains systèmes chaotiques, que pour toute condition initiale prise dans un certain ouvert, on obtient le même ensemble ω -limite. Ceci conduit à la notion d'attracteur étrange.

Définition 4.15 (Attracteur étrange) *Une partie compacte A de X est un attracteur étrange s'il existe un ouvert U et $N \subset U$ de mesure de Lebesgue nulle tel que $\forall x \in U \setminus N$, $\omega(x) = A$ et l'orbite de x est chaotique.*

Un exemple d'attracteur étrange est l'*attracteur de Hénon*. On appelle parfois également attracteur étrange un attracteur A tel que f a une dépendance sensible aux conditions initiales avec probabilité totale sur $B(A) \times B(A)$ (où $B(A)$ est le bassin d'attraction de A).

Une dernière notion importante est celle de *dynamique chaotique persistante*, qui traduit que de petites perturbations de f ont, avec une probabilité positive, une dynamique chaotique. Cette définition a un sens lorsque par exemple $f = f_\alpha$ est paramétrée par $\alpha \in \mathbb{R}^n$, car alors on dispose de la mesure de Lebesgue sur l'espace des paramètres α . De façon plus restrictive, on peut demander la persistance d'une dynamique chaotique dans un voisinage ouvert de f .

Chaos et simulations numériques Il est problématique de vouloir observer ou même caractériser un comportement chaotique lors d'une simulation numérique. Comment en effet mettre en évidence un tel phénomène malgré la précision finie d'un ordinateur ? Celle-ci a plusieurs conséquences majeures.

1. Comme l'indique la propriété d'expansivité ??
 2. Cette définition n'a de sens que lorsque X est une variété, pour que les ensembles de mesure de Lebesgue nulle soient définis.

Tout d'abord, les erreurs d'arrondi font que l'on n'observe que des pseudo-orbités. Si le système étudié possède une propriété de pistage, comme c'est le cas avec les systèmes uniformément hyperboliques, on a de quoi être partiellement rassuré. Il reste cependant des cas (par exemple le doublement de l'angle) où les orbités qu'un ordinateur peut pister ne sont pas des orbités typiques du système. De même, lorsque les orbités calculées sont bornées, toutes les pseudo-orbités observées sont périodiques (même si la période est très longue), en raison du nombre fini de décimales que l'on peut calculer. Il faut donc fixer (arbitrairement) un seuil pour séparer orbités périodiques et non-périodiques.

Un deuxième effet est que l'on ne peut observer que le comportement en temps fini. Comment alors être sûrs qu'il s'agit bien du comportement stationnaire, et non d'un régime transitoire très long ? Il nous faut en effet fixer un seuil à partir duquel on observe la dynamique «à l'infini». Le choix de ce seuil est crucial pour éviter des erreurs, tout en limitant la durée des calculs.

Enfin, lorsque l'on étudie un système dépendant de paramètres réels, il faut garder à l'esprit que l'on ne peut observer celui-ci que sur un ensemble de mesure nul, l'ensemble des rationnels. C'est tout l'intérêt de considérer la persistance de la dynamique dans un voisinage ouvert, \mathbb{Q} étant dense dans \mathbb{R} . Ce problème peut cependant se ramener à celui du lien entre pseudo-orbités et vraies orbités si la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ dépend continûment de α pour la topologie de la convergence uniforme sur X , car alors une orbités sous $f_{\alpha+\epsilon}$ est une pseudo-orbités sous f_α si ϵ est assez petit.

4.2 Chaos au sens de Li et Yorke

La première définition mathématique du chaos est donnée en 1975 par les mathématiciens Li et Yorke. Voir [?] est donnée avec une application définie à temps discret de dimension un comme suit:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.4)$$

où f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

4.2.1 Théorème de Li et Yorke

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow I$, une application continue. On suppose qu'il existe un point $a \in I$ tel que:

$$b = f(a), c = f^2(a), d = f^3(a),$$

$$d \leq a < b < c,$$

ou

$$d \geq a > b > c.$$

Alors

- 1) Pour chaque $k = 1, 2, \dots$, il y a un point périodique de période k ,
- 2) L'ensemble $S \subset I$ ne contient pas de points périodiques qui satisfassent les conditions suivantes:

- i) Pour chaque $p, q \in S$ avec $p \neq q$,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |f^k(p) - f^k(q)| > 0,$$

et

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |f^k(p) - f^k(q)| = 0.$$

- ii) Pour chaque $p \in S$ et un point périodique $q \in I$ avec $p \neq q$,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |f^k(p) - f^k(q)| > 0.$$

Le cas de la dimension égale à un, le système dynamique (4.4) qui satisfait les conditions ci-dessus est dit chaotique au sens de Li et Yorke.

Le théorème peut être généralisé par supposition que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et que $f(I) \subset I$. De plus, la fonction f doit satisfaire:

$$f(I) \cap I \neq \emptyset, \tag{4.5}$$

afin qu'il contienne les points a, b, c et d .

4.3 Chaos au sens de Devaney

Soit f^m une fonction définie dans S vers S où $S \subset X$, (X espace topologique) satisfaite:

$$f^m = f(f^{m-1}), m = 1, 2, \dots, \quad (4.6)$$

et

$$f^0 = \text{Identité.}$$

On appelle un point $x^* \in S$ périodique d'une période m s'il satisfait:

$$x^* = f^m(x^*), \text{ mais } x^* \neq f^k(x^*), \text{ pour } 1 < k \leq m, \quad (4.7)$$

si $m = 1$, alors le point x^* est appelé un point fixe de f .

4.3.1 Théorème de Devaney

On dit que l'application $f : S \rightarrow S$ est de comportement chaotique si

i) L'application f est sensible aux conditions initiales, c'est-à-dire $\forall x \in S$ et au voisinage de x dans S , il existe un $\delta > 0$ tel que:

$$|f^m(x) - f^m(y)| > \delta, \quad (4.8)$$

pour $y \in S$ et pour $m \geq 0$.

ii) L'application f est topologiquement transitive, c'est-à-dire pour toute paire de sous-ensembles ouverts $U, V \subset S$, il existe un nombre entier $m > 0$ tel que:

$$f^m(U) \cap V \neq \emptyset. \quad (4.9)$$

iii) Les points périodiques de l'application f sont denses dans S .

4.3.2 Exemples de systèmes chaotiques au sens de Devaney

Notation 1 L'opération mod (modulo) est une relation binaire qui associe à deux valeurs naturels le reste de la division euclidienne du premier par le second, le reste de la division de a par n ($n \neq 0$) est noté $a \text{ mod } n$.

Exemple 4.1 .(Le doublement de l'angle). L'itérations de doublement de l'angle est donnée avec l'opération modulo. Voir [?], comme suivante:

$$f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[\\ x \mapsto 2x(\text{mod } 1).$$

Le comportement de l'application de doublement de l'angle est chaotique au sens de Devaney.

Les Figures de l'application doublement de l'angle, et des exemples d'itérations d'application, sont données dans la Figure 4.1.

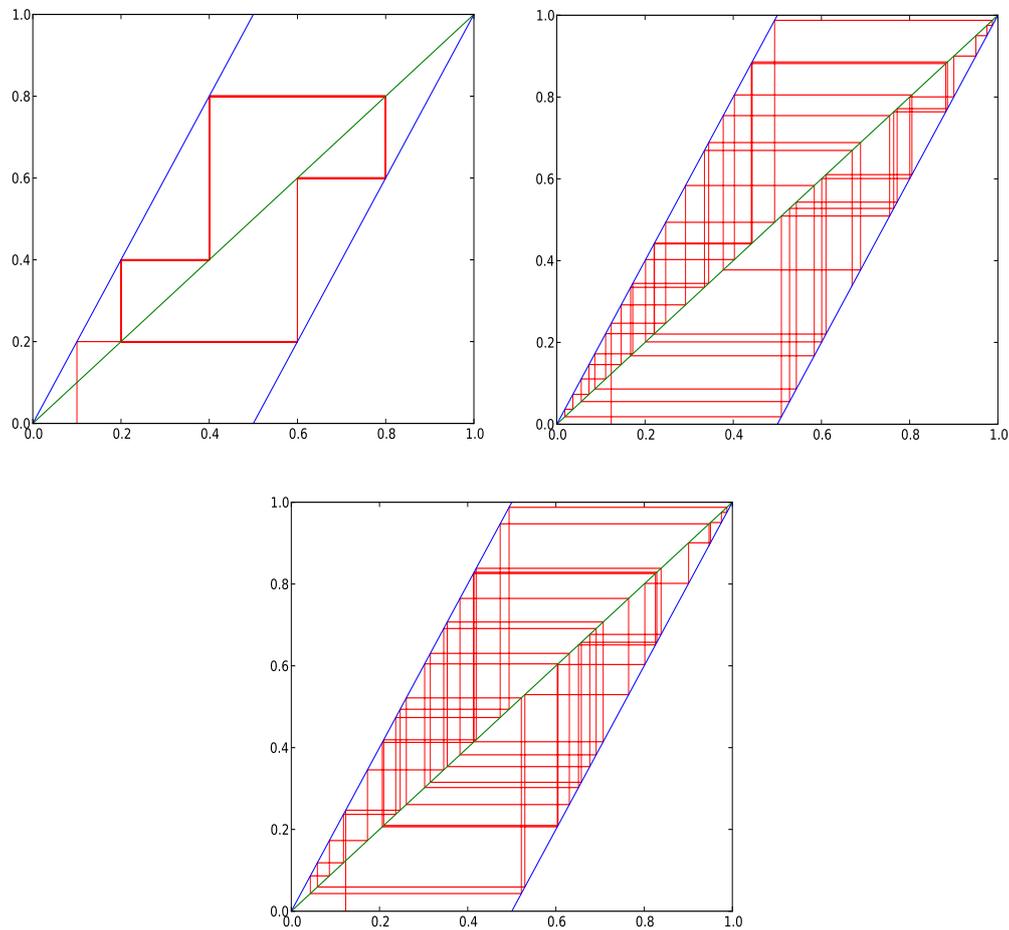


FIGURE 4.1 – La fonction de doublement de l'angle.

Exemple 4.2 .(*Application tente*). L'application tente. Voir [?] est définie sur $[0, 1]$ par:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Le système dynamique de l'application tente est un système chaotique au sens de Devaney.

La courbe de l'application tente, et des exemples d'itérations du système dynamique associé, sont données dans la Figure 4.2.

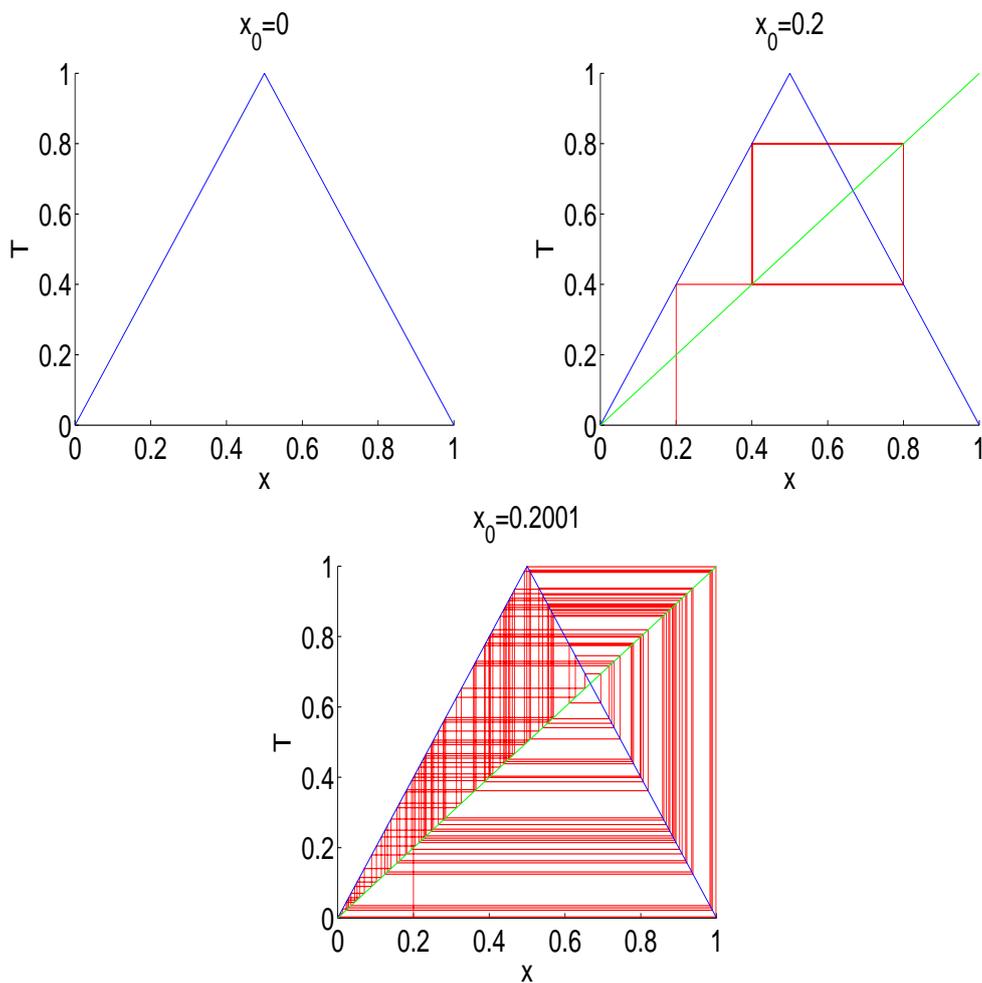


FIGURE 4.2 – La fonction tente.

Exemple 4.3 .(*Le chat d'Arnold (1968)*). L'application de chat d'Arnold (arnold utilisait le mot cat comme abréviation de automorphismes continus du tore)

Voir [?] est définie sur $[0, 1]^2$ par:

$$\begin{cases} x_{k+1} = (x_k + y_k) \pmod{1} \\ y_{k+1} = (x_k + 2y_k) \pmod{1}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Il est possible de montrer que (4.10) est de comportement chaotique au sens de Devaney. Voir la Figure 4.3.

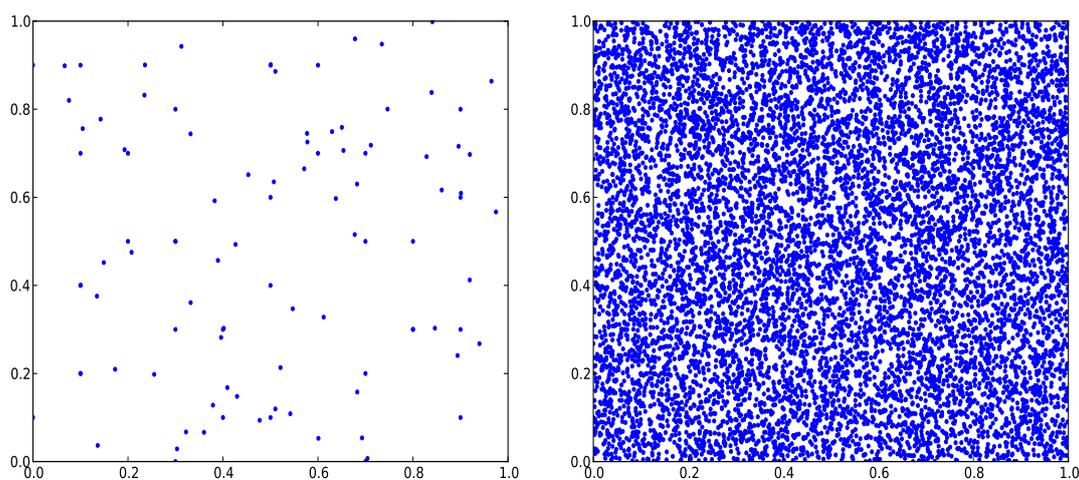


FIGURE 4.3 – Itérations du chat d'Arnold.

4.4 Chaos au sens de Marotto

Considérons le système dynamique discret de dimension égale à n défini par:

$$x_{k+1} = F(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.11)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Soit $B(x, r)$ la boule ouverte de \mathbb{R}^n de centre x et de rayon r et $\overline{B}(x, r)$ est la boule fermée. Ensuite, si F est différentiable en $B(x^*, r)$.

Notation: Nous présentons d'abord la notion de snap-back répulsif. Un snap-back répulsif est un point fixe autour duquel se trouve une région telle que toute trajectoire commençant à l'intérieur (même arbitrairement proche du point fixe),

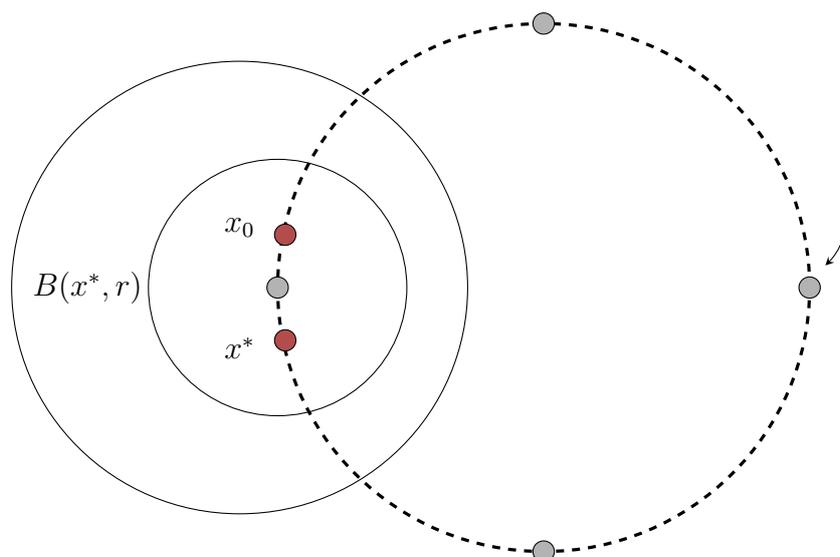


FIGURE 4.4 – Diagramme d'un point snap-back (de retour) répulsif. Le point x^* est un snap-back répulsif.

s'éloigne d'abord du point fixe (c'est-à-dire qu'elle est repoussée par lui), mais après avoir quitté la région saute sur le point fixe.

Marotto a affirmé que dans ce qui les suivantes:

Définition 4.16

- (A) Soit F une application différentiable sur $B(x^*, r)$. Le point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un expansion du point fixe de F sur $B(x^*, r)$, si $F(x^*) = x^*$ et toutes les valeurs propres de $DF(y)$ sont supérieures à 1 en norme $\forall y \in B(x^*, r)$.
- (B) Supposons que x^* est un expansion du point fixe de F sur $B(x^*, r)$ pour un certain $r > 0$. Alors, on dit que x^* est snap-back répulsif de F s'il existe un point $x_0 \in B(x^*, r)$ avec $x_0 \neq x^*$, tel que $F^m(x_0) = x^*$ et le déterminant $|DF^m(x_0)| \neq 0$ pour un entier $m > 0$.

4.4.1 Théorème de Marotto 1978

Théorème 4.1 Si F possède un point snap-back répulsif, alors, le système (4.11) est chaotique. Voir [?]. Autrement dit, il existe

- (i) Un entier positif N , tel que pour chaque entier $p \geq N$, F admet un point périodique de période p .

(ii) Il existe un ensemble brouillé de F , à savoir un ensemble indénombrable S ne contenant aucun point périodique de F , tel que

(a) $F(S) \subset S$.

(b) Pour chaque $x, y \in S$ avec $x \neq y$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|F^k(x) - F^k(y)\| > 0.$$

(c) Pour chaque $x \in S$ et n'importe quel point périodique y de F ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \|F^k(x) - F^k(y)\| > 0.$$

(iii) Il existe un sous-ensemble indénombrable S_0 , de S tel que pour chaque $x, y \in S_0$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \|F^k(x) - F^k(y)\| = 0.$$

Dans le cas unidimensionnel, l'existence d'un snap-back répulsif dans F est équivalente à l'existence d'un point périodique de période 3 de F^n pour un certain entier positif n , comme indiqué dans la Remarque 3.1 de la référence de Marotto [?].

Le théorème de Marotto est le meilleur pour prédire et analyse de chaos discret dans les systèmes dynamiques multidimensionnels à ce jour, il existe une erreur dans un condition du théorème de Marotto original (Marotto 1978) donné dans la référence [?]. comme les exemples suivantes.

Exemple 4.4 Soit $p = (x, y)$ est un vecteur arbitraire sur un espace de dimension égale à 2. Il est sûr de trouver une carte linéaire, par lequel le vecteur p est utilisé pour diminuer dans la norme euclidienne. Voir Figure 4.5.

Dans la Figure 4.5, on peut trouver qu'un vecteur arbitraire est réduit en norme euclidienne par une carte linéaire dont les valeurs propres sont supérieures à 1 avec valeurs absolues. En fait, étant donné un vecteur, nous pourrions construire un cercle de centre O et de rayon $\|p\|$. Et il est facile de trouver deux vecteurs unitaires ζ_1, ζ_2 et l'angle entre eux comme sur la figure 4.5, $p = \|OP_1\|\zeta_1 + \|OP_2\|\zeta_2$, nous pouvons facilement choisir un vecteur q qui est au-dessus de la ligne AP_1 et dans le cercle O . Soient $\lambda_1 = \|OQ_1\|/\|OP_1\|$ et $\lambda_2 = \|OQ_2\|/\|OP_2\|$, ainsi, nous obtenons une carte linéaire $W = (\zeta_1^T, \zeta_2^T) \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\} (\zeta_1^T, \zeta_2^T)^{-1}$. Évidemment, les deux valeurs de W

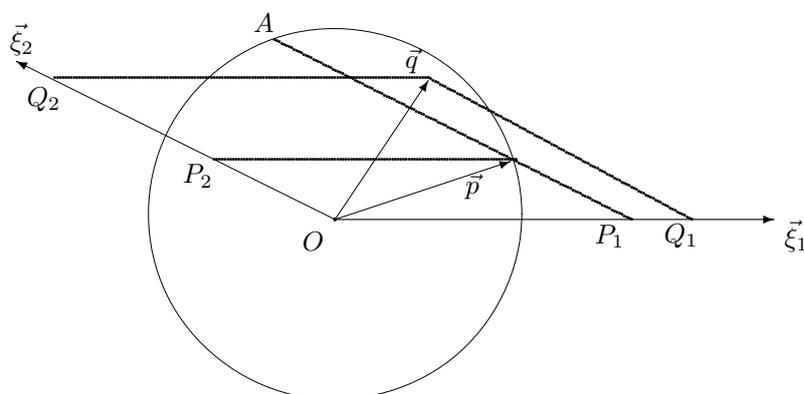


FIGURE 4.5 – Un vecteur arbitraire réduit dans la norme euclidienne par une carte linéaire

sont supérieures à 1, et $\|W.p\| = \|q\| \leq \|p\|$. Cela conduit au fait que toutes les valeurs propres étant supérieures à 1 ne pouvaient pas garantir l'expansibilité d'une carte linéaire au sens de la norme euclidienne.

Remarque 4.1 *Chen et autres . donné une nouvelle norme différente de la norme euclidienne pour garantir l'expansibilité de la carte F au voisinage de son point fixe. Et il a également modifié la définition du point réplisif snap-back [Chen 1998].*

Sur la figure 4.6, S est un voisinage de x^* au sens de la norme euclidienne et $|\lambda(DF(x))| > 1$ pour tout $x \in S$. S_P désigne un voisinage de x^* au sens de P -norme donnée par Chen [1998], et elle dépend absolument du point fixe et de la P -norme. Si existe un point $z \in S_P$ satisfaisant à la définition du point réplisif snap-back, nous pourrions conclure que la carte non linéaire F est chaotique au sens de Marotto.

Alors que, s'il existe un point $\bar{Z} \in S$, est itéré vers le point fixe x^* en temps fini, nous remarquons par erreur \bar{Z} comme un point réplisif snap-back, cependant, ce n'est pas vraiment le cas, parce que $|\lambda(DF(x))| > 1$ (pour tout $x \in S$) n'implique pas que la carte non linéaire F est satisfait la condition (A) de la définition 4.16 au voisinage de S mais c'est dans le voisinage local de chaque point de S . L'exemple

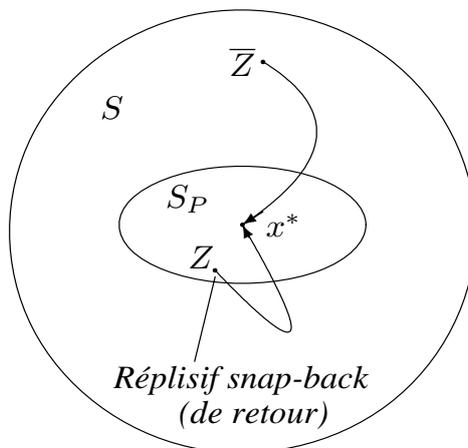


FIGURE 4.6 – Le voisinage local d'un point fixe instable x^* et $|\lambda(DF(x))| > 1$.

suisant montre l'idée de construction d'une telle carte non linéaire dans des espaces à deux dimensions.

Exemple 4.5 Nous considérons de la transformation de deux dimensions suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (4.12)$$

supposons (x^*, y^*) est le point fixe de la transformation, c'est-à-dire $x^* = f(x^*, y^*)$ et $y^* = g(x^*, y^*)$. On note S le voisinage de (x^*, y^*) , et $|\lambda(DF(x))| > 1$ pour tout $x \in S$ où $F(x) = (f, g)^T$. Sur la figure 4.7, notons C_1 la projection de la courbe d'intersection entre l'espace $z = x^*$ et $z = f(x, y)$, et on note C_2 la projection de la courbe d'intersection entre l'espace $z = y^*$ et $z = g(x, y)$. Evidemment, l'intersection de ces deux projections C_1 et C_2 est le point fixe (x^*, y^*) . S'il existe autre point d'intersection \bar{z} sur C_1 et C_2 au voisinage S , alors la transformation de $F(x)$ n'est pas satisfait la condition (A) de la définition 4.16 sur S . En fait, cela pourrait être accompli parce que nous pourrions définir arbitrairement et en continu la matrice jacobienne $DF(x)$ le long des courbes intersécantes.

(

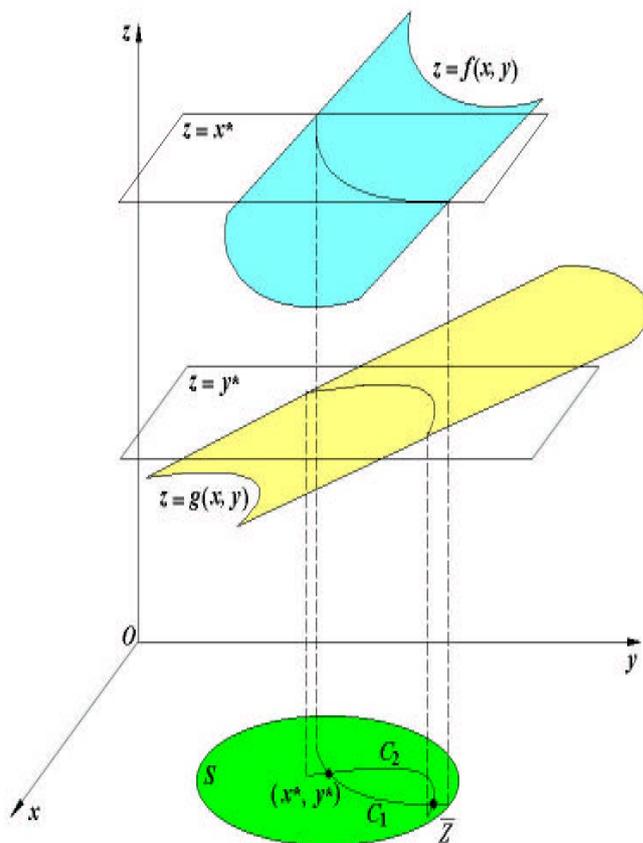


FIGURE 4.7 – Une transformation 2-dimensionnelle non linéaire dans l'espace.

Remarque 4.2 *Lin et al. [?]* a remplacé la condition (A) de Marotto par la condition suivante :

(C) Pour chaque $x \in \overline{B}_r(x_0)$ avec la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$, toutes les valeurs propres de $(DF(x))^T DF(x)$ est supérieur à 1.

Dans la preuve de référence. [?], proposition 1 de la section 2.3, pour montrer que la condition (C) implique (B), c'est-à-dire que F est en expansion dans $\overline{B}_r(x_0)$, ils ont utilisé la formule de valeur moyenne suivante :

$$F(x) - F(y) = DF(y + \theta(x - y))(x - y) \quad \text{pour } x, y \in \overline{B}_r(x_0),$$

où θ est une constante dans $(0, 1)$. Il est bien connu que la formule de valeur moyenne ne satisfait pas en général pour de plusieurs variables. Un exemple simple est donné

par $F(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^3)$, $x = (1, 1)^T$, $y = (0, 0)^T$. Autrement, nous remarquons que la condition (C) n'implique pas la condition (B) en général, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.6 *Considérons l'application non linéaire suivante :*

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (4.13)$$

$$F(x, y) = (e^{2x} \sin(2\pi y) + 2, e^{2x} \cos(2\pi y) - e^4)^T.$$

Il est clair que $(x_0, y_0) = (2, 0)$ est un point fixe de F . Autrement, F est continûment différentiable sur \mathbb{R}^2 et

$$DF(x, y) = 2e^{2x} \begin{pmatrix} \sin(2\pi y) & \pi \cos(2\pi y) \\ \cos(2\pi y) & -\pi \sin(2\pi y) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$(DF(x))^T DF(x) = 4e^{4x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, toutes les valeurs propres de $(DF(x))^T DF(x)$ sont supérieures ou égales à 4 pour tout $(x, y)^T \in \overline{B}_2(x_0, y_0)$ avec la norme $\|\cdot\|_2$. Toutefois, en définissant $(x_1, y_1) = (2, 1)$, il est clair que $(x_1, y_1)^T \in \overline{B}_2(x_0, y_0)$ et $F(x_1, y_1) = (x_0, y_0)^T$, ce qui implique que

$$\|F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0)\|_2 = 0 < 1 = \|(x_1, y_1)^T - (x_0, y_0)^T\|_2.$$

Le théorème de Marotto (1978) est a été corrigée récemment et une version modifiée de ce théorème important est donné par Shi et Chen (2004b). Voir [?], comme suivante:

4.4.2 Une version modifiée du théorème de Marotto

Théorème 4.2 *Voir [?].*

Soit l'application $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $x^* \in \mathbb{R}^n$ un point fixe, on suppose que:

- (i) $F(\cdot)$ est continûment différentiable au voisinage de x^* sur la boule $B(x^*, r)$, avec le rayon $r > 0$, telle que toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $DF(x^*)$ sont strictement supérieures à 1 en valeurs absolues, ce qui implique qu'il existe une constante positive r , telle que F est un expansion sur $B(x^*, r)$ avec la norme $\|\cdot\|$, et

- (ii) x^* est un snap-back répulsif dans F avec $F^m(x_0) = x^*$ pour un certain $x_0 \in \overline{B}(x^*, r)$ où $x_0 \neq x^*$, et un certain entier positif m . De plus, F est continûment différentiable dans certains voisinages de x_0, x_1, \dots, x_{m-1} , respectivement, et le déterminant $|DF(x_j)| \neq 0$ pour $0 \leq j \leq m-1$, où $x_j = F(x_{j-1})$, $0 \leq j \leq m-1$.

Si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites alors l'application F est chaotique.

À partir des Théorèmes 4.1 et 4.2 ci-dessus, nous pouvons facilement conclure que le résultat du Théorème de Marotto (Théorème 4.1) est valable si toutes les hypothèses du Théorème 4.2 sont satisfaites. Il peut être considéré comme une nouvelle version modifiée du théorème de Marotto, qui se résume comme suivante:

Théorème 4.3 (Une version modifiée du théorème de Marotto. Voir [?])

Soit l'application $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec un point fixe $x^* \in \mathbb{R}^n$. Si les hypothèses (i) et (ii) dans le théorème 4.2 sont satisfaites, alors le résultat dans le Théorème 4.1 est valable, c'est-à-dire que le système (4.11) est chaotique dans le sens suivant:

- (i) Un entier positif N , tel que pour chaque entier $p \geq N$, F admet un point périodique de période p .
- (ii) Il existe un ensemble brouillé de F , à savoir un ensemble indénombrable S ne contenant aucun point périodique de F , tel que
- (a) $F(S) \subset S$.
- (b) Pour chaque $x, y \in S$ avec $x \neq y$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|F^k(x) - F^k(y)\| > 0.$$

- (c) Pour chaque $x \in S$ et n'importe quel point périodique y de F ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \|F^k(x) - F^k(y)\| > 0.$$

- (iii) Il existe un sous-ensemble indénombrable S_0 , de S tel que pour chaque $x, y \in S_0$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \|F^k(x) - F^k(y)\| = 0.$$

4.5 Caractérisation du chaos temporel

Ce paragraphe est consacré à quelques outils servant à rendre quantitatives les observations faites sur des systèmes chaotiques. L'extension au cas chaotique des notions d'instabilité et de taux de divergence conduit à la définition du spectre d'exposants de Lyapunov. La description déterministe des systèmes chaotiques perdant une bonne partie de son intérêt du fait de l'absence de prédictibilité à long terme, nous en profiterons pour introduire quelques éléments de description statistique des attracteurs étranges. Ensuite nous traiterons de la caractérisation géométrique des attracteurs, ce qui nécessitera l'introduction de dimensions fractionnaires ou fractales.

4.5.1 Sensibilité aux conditions initiales

La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales ; pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement ; les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables

La sensibilité aux conditions initiales est très pratique : il y a toujours une erreur dans la mesure de l'état du système. A cause de cette erreur le comportement macroscopique du système chaotique est influencé par l'accumulation des erreurs d'arrondis cela entraîne qu'un système chaotique est imprédictible.

Les limites de précision numérique font que une valeur de l'exposant est légèrement sous-estimée. On peut d'ailleurs constater que plus la valeur du temps est élevée, plus la valeur estimée en régime de cycle limite se rapproche de zéro. La transition entre un cycle et un tore fait apparaître une petite discontinuité sur la valeur de l'exposant, même si l'estimation donne toujours une valeur inférieure à zéro. L'accrochage marque encore une petite rupture, et la traversée de l'abscisse marque l'entrée dans un régime chaotique. L'augmentation rapide de la valeur de l'exposant accompagne une complexification progressive de la dynamique.

4.5.2 Exposants de Lyapunov

En régime chaotique, la distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. tant donné une précision sur les mesures, le temps que mettent deux conditions initiales dont la distance à l'origine est de l'ordre de cette précision constitue l'horizon prédictif du système. Les exposants dits de Lyapunov permettent de mesurer ce taux de divergence.

La mesure du plus grand exposant de Lyapunov nécessite d'itérer la dynamique du modèle pour deux conditions initiales très proches, et de mesurer au bout d'un temps fini la distance entre ces deux trajectoires. Pour que ce calcul soit valable, il faut bien sûr que ces deux conditions initiales soient situées à proximité de l'attracteur.

Une erreur $\epsilon_0 > 0$ sur la condition initiale va évoluer exponentiellement et l'erreur, à un instant t , aura l'expression suivante : $|\epsilon(t)| = \epsilon_0 e^{\lambda t}$. On peut calculer la valeur de λ , appelé exposant de Lyapunov, grâce aux méthodes développées par Alexandre Lyapunov.

4.6 Signes des exposants de Lyapunov

4.6.1 Dimension de Kaplan-Yorke (ou de Lyapunov)

La dimension de Lyapunov est au maximum égale au dimension de système, alors que pour les systèmes de dimension infinie la dimension de Lyapunov tend vers de grandes valeurs. Plus la dimension sera grande, plus la complexité du chaos sera élevée.

Supposons $S_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i$, et on classant les exposants de Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Soit S_p la somme des exposants de Lyapunov où $p < n$, alors il est évident que pour un attracteur "étrange", et il existe un entier $p = j$ pour S_j est positive et un

Etat	Attracteur	Dimension	Exposants de Lyapunov
Point fixe	Point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$
Périodique	courbe fermée	1	$\lambda_1 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$
Période d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 < 0$
Période d'ordre K	K -Tore	K	$\lambda_1 = \dots = \lambda_K = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{K+1} < 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i < 0$
Hyper chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i < 0$

TABLEAU 4.1 – Propriétés des attracteurs par le signe des exposants de Lyapunov.

entier $j + 1$ pour S_{j+1} est négative. L'entier j est défini par les conditions:

$$S_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad S_{j+1} = \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0. \quad (4.14)$$

La dimension de Kaplan-Yorke (ou dimension de Lyapunov) D_{KL} est définie par:

$$D_{KL} = j + \frac{S_j}{|\lambda_{j+1}|} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}. \quad (4.15)$$

Remarque 4.3 Si la somme S_j ne devient pas négatif à partir du λ_i , la dynamique est divergente dans l'espace d'état choisi et D_{KL} est égal à la dimension d'espace donné.

4.6.2 Dimension de Kolmogorov (ou de capacité)

Considérons un segment de longueur L Voir [?]. Ce segment peut être "recouvert" par 2 segments de longueur $L/2$ ou par 4 segments de longueur $L/4$ ou plus généralement par :

$$N(\varepsilon) = \frac{L}{\varepsilon}$$

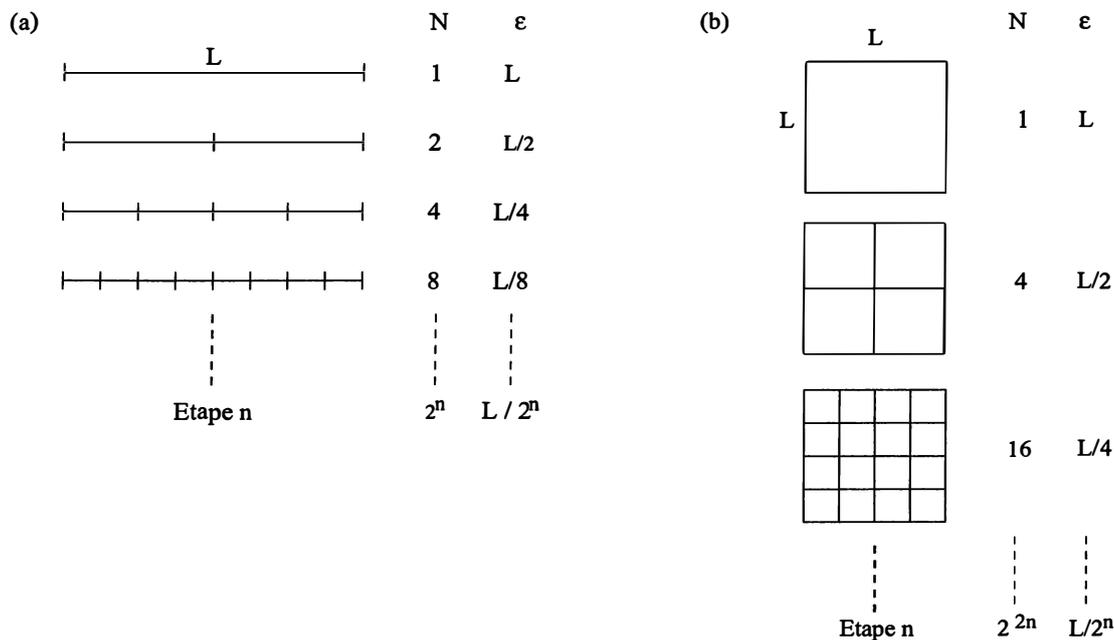


FIGURE 4.8 – Recouvrement d'un segment de longueur L (a) et d'un carré de côté L (b).

petits segments de longueur ϵ . De même, un carré de côté L (Voir. figure 4.8[b]) peut être recouvert par :

$$N(\epsilon) = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^2,$$

petits carrés de côté ϵ .

Dans le cas général on a :

$$N(\epsilon) = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^p,$$

D'où en prenant le logarithme des deux membres, on obtient

$$d_c = \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\frac{L}{\epsilon})}. \tag{4.16}$$

A la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, le terme $\log L$ devient négligeable devant $\log(\frac{1}{\epsilon})$. La dimension de Kolmogorov ou de capacité sera définie par :

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\frac{1}{\epsilon})}. \tag{4.17}$$

4.6.3 Dimension de corrélation

La dimension de corrélation est proposée par Grassberger et Proccacia (1983), version probabiliste (Renyi, 1970) Voir [?] est appliquée aux ensembles de points (attracteurs notamment). Utilisée en théorie du chaos pour estimer la dimension fractale d'attracteurs, en définit l'intégrale de corrélation comme suivante :

$$C_m(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(\epsilon - \|x_i - x_j\|) \quad (4.18)$$

Où $H(\cdot)$ est la fonction de Heaviside est égal à 1 pour des arguments positifs et égal à 0 pour des arguments négatifs. N est le nombre (normalisé) de points de l'espace de phases reconstruit appartenant à une sphère de rayon ϵ . l'algorithme de la dimension de corrélation a l'avantage d'être calculable très efficacement. La dimension de corrélation découle ainsi directement de l'intégrale de corrélation et s'exprime selon la formule :

Définition 4.17 *la dimension de corrélation est alors définie par :*

$$d_{cor} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log[C_m(\epsilon)]}{\log(\epsilon)}. \quad (4.19)$$

4.7 Exemples des systèmes chaotiques à temps continu

4.7.1 Système de Lorenz

Le système de Lorenz est généré par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = x(b - z) - y \\ \dot{z} = xy - cz. \end{cases} \quad (4.20)$$

Cet exemple a été publié en 1963 dans un journal météorologique. Les variables x, y et z représentent les états du système à chaque instant. a, b, c sont les paramètres du système. Le système présente un comportement chaotique pour $a = 10, b = 28, c = 8/3$ et $x_0 = 15, y_0 = 20, z_0 = 30$ est présente un attracteur étrange.

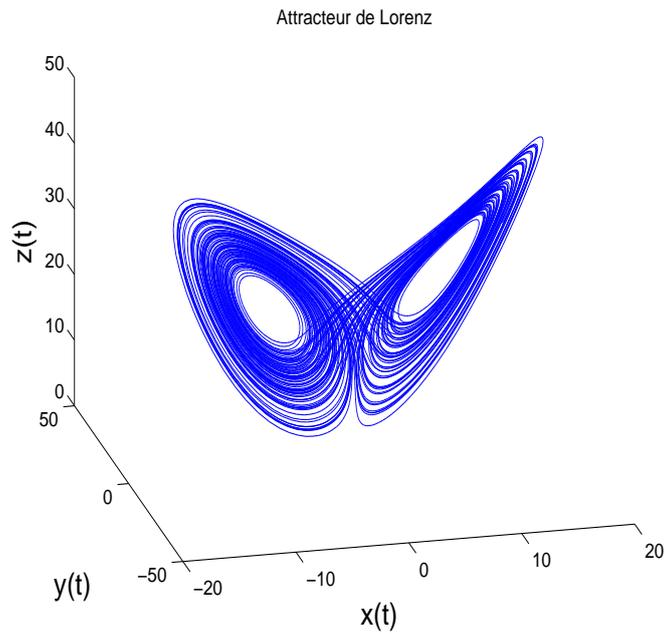


FIGURE 4.9 – Attracteur de Lorenz pour $a = 10, b = 28, c = 8/3$.

4.7.2 Système de Rössler

Le système de Rössler est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - c)z, \end{cases} \quad (4.21)$$

où a, b et c sont paramètres réels, et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Le système présente un comportement chaotique pour $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$ et $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$ est présente un attracteur étrange.

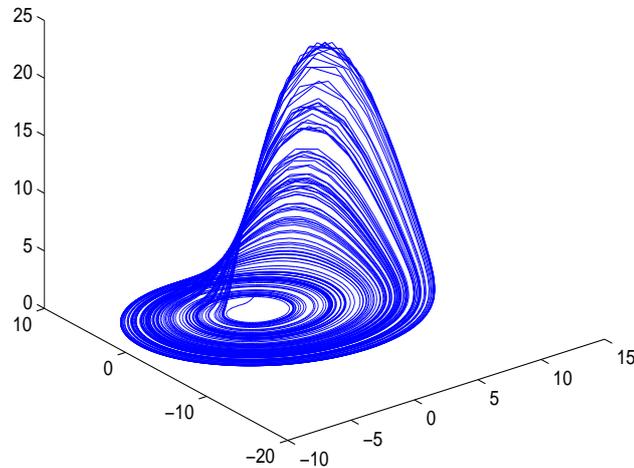


FIGURE 4.10 – Attracteur de Rössler pour $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$.

4.8 Exemples des systèmes chaotiques à temps discret

4.8.1 Récurrence logistique

Une récurrence logistique est un exemple simple de suite dont la récurrence n'est pas linéaire, utilisée par le biologiste Robert May en 1976, décrit l'évolution de population d'une espèce. Souvent citée comme exemple de la complexité qui peut résulter d'une simple relation non-linéaire.

La récurrence logistique donnée comme suivante:

$$x_{k+1} = f_{\mu}(x_k) = \mu x_k(1 - x_k), \quad (4.22)$$

où $x \in]0, 1[$ représente la population à l'année k et μ est une constante de l'intervalle $[0, 4]$ représente un facteur de croissance de la population.

Des exemples d'évolution de ce système sont données aux Figures 4.11.

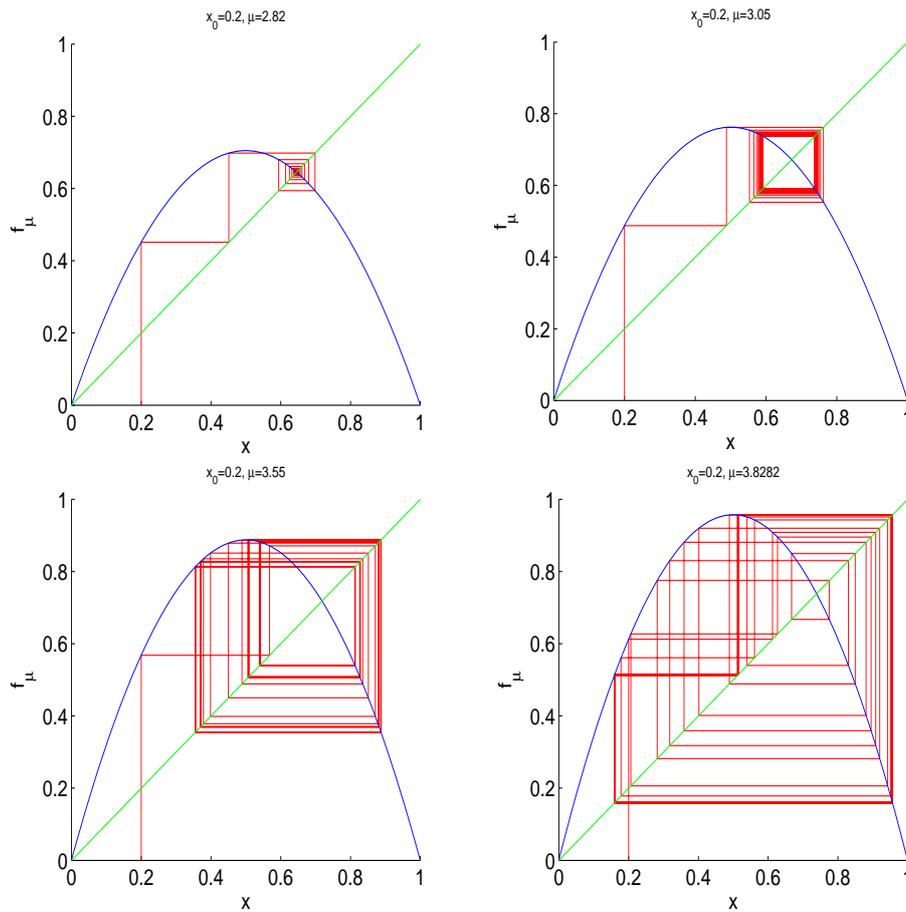


FIGURE 4.11 – Itérations de la fonction logistique.

4.8.2 Récurrence de Hénon

La récurrence de Hénon est un système dynamique discret de dimension 2 dont la représentation d'état est la suivante:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases} \quad (4.23)$$

pour les valeurs $a = 1.4$ et $b = 0.3$ et son bassin d'attraction.

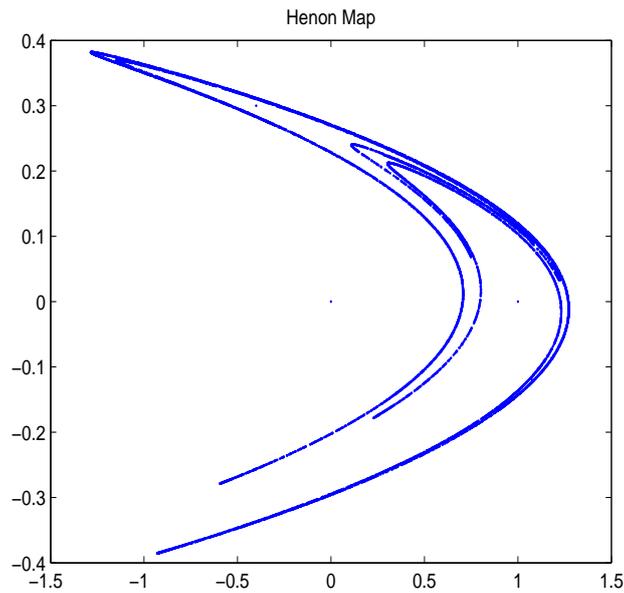


FIGURE 4.12 – Attracteur de Hénon pour les valeurs $a = 1.4$, $b = 0.3$ et $x_0 = y_0 = 0$.

4.8.3 Récurrence de Lozi

Dans le but de simplifier l'attracteur de Hénon, René Lozi, propose le système suivant:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - a|x_k| + y_k \\ y_{k+1} = bx_k. \end{cases} \quad (4.24)$$

L'attracteur de Lozi présentée pour $a = 0.7$, $b = 0.5$ et $x_0 = y_0 = 0$.

4.8.4 Récurrence d'Ikeda

L'attracteur d'Ikeda est un système dynamique à temps discret, caractérisé par la relation de récurrence:

$$z_{k+1} = A + Be^{iP/(|z_k|^2+1)+C} \quad (4.25)$$

Il a été proposé en 1979 par le physicien japonais Kensuke Ikeda pour décrire la propagation de la lumière à travers une cavité optique non linéaire.

La relation de récurrence est souvent utilisée sous la forme suivante:

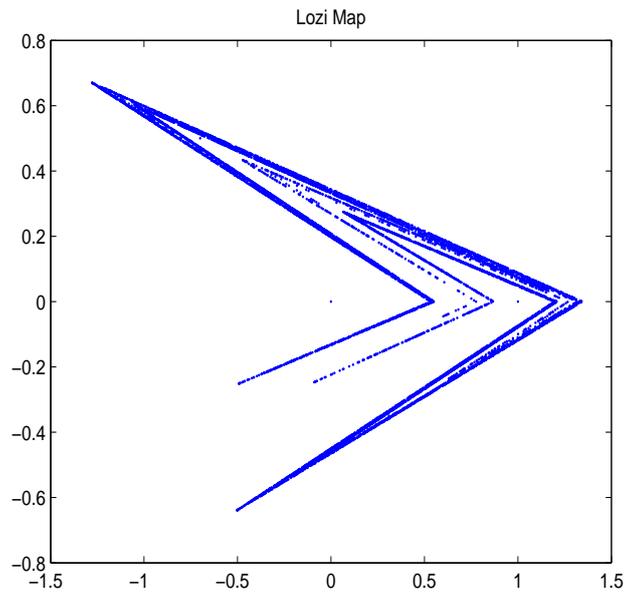
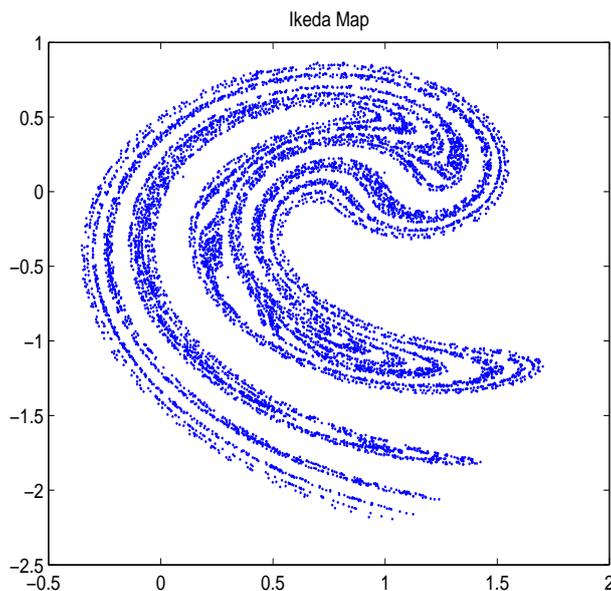


FIGURE 4.13 – Attracteur de Lozi pour $a = 0.7, b = 0.5$ et $x_0 = y_0 = 0$.

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + \mu(x_k \cos(\theta_k) - y_k \sin(\theta_k)) \\ y_{k+1} = \mu(x_k \sin(\theta_k) + y_k \cos(\theta_k)) \end{cases} \quad (4.26)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre et $\theta_k = 0.4 - \frac{6}{1+x_k^2+y_k^2}$.

Lorsque $\mu \geq 0.6$, le système a un comportement chaotique.

FIGURE 4.14 – Attracteur d'Ikeda pour $\mu = 0.9$ et $x_0 = y_0 = 0.1$.

4.9 Bifurcations

Considérons une famille de systèmes dynamiques dépendant d'un ou plusieurs paramètres. Même si pour presque toutes les valeurs des paramètres, le système a un comportement transverse (par exemple structurellement stable), il peut y avoir des valeurs particulières de ceux-ci où se produit une transition entre deux différents types d'orbites. De tels changements sont appelés *bifurcations*. Leur étude — qui est une branche à part entière de la théorie des systèmes dynamiques — est fondamentale pour comprendre les propriétés d'un système typique car les bifurcations montrent comment différents comportements transverses peuvent apparaître.

Nous ne parlons ici que de quelques cas simples de bifurcations, en petite dimension. Il en existe bien sûr beaucoup d'autres types. Nous nous limitons de plus à des bifurcations *locales*, c'est-à-dire pouvant être définies seulement au voisinage d'un point, par opposition aux bifurcations *globales*. Nous considérons plus particulièrement le cas des bifurcations structurellement stables, définies de la manière suivante dans le cas de systèmes discrets.

Définition 4.18 (Bifurcation structurellement stable) Une famille $\{f_\tau\}$ de C^∞ difféomorphismes définis localement a une bifurcation structurellement stable à $\tau = \tau_0$ si f_{τ_0} n'est pas localement structurellement stable et si pour toute famille $\{g_\tau\}$ de C^∞ difféomorphismes définis localement suffisamment C^2 -proche de $\{f_\tau\}$, il existe une reparamétrisation $\phi(\tau)$ de $\{g_\tau\}$ et une famille continue $\{h_\tau\}$ d'homéomorphismes définis localement telle que

$$g_{\phi(\tau)} = h_\tau^{-1} \circ f_\tau \circ h_\tau$$

partout où cela est défini.

4.9.1 Diagramme de bifurcations

Il existe un moyen simple de visualiser une bifurcation, appelé diagramme de bifurcation. On trace l'ensemble ω -limite $L^+(f_\epsilon)$ pour les différentes valeurs du paramètre ϵ , que l'on porte sur l'axe des abscisses. Un tel diagramme peut aisément être tracé numériquement, en prenant pour ensemble ω -limite les valeurs de $f_\epsilon^n(x)$ pour n «grand» et pour un ou plusieurs x choisis aléatoirement.

Il y a cependant une différence entre un diagramme obtenu par simulations et un diagramme théorique : les objets instables, ou de «petit» bassin d'attraction, n'apparaissent que dans le second cas. Il n'est ainsi pas forcément simple de déterminer la nature d'une bifurcation en comparant son diagramme empirique avec les diagrammes théoriques des bifurcations classiques.

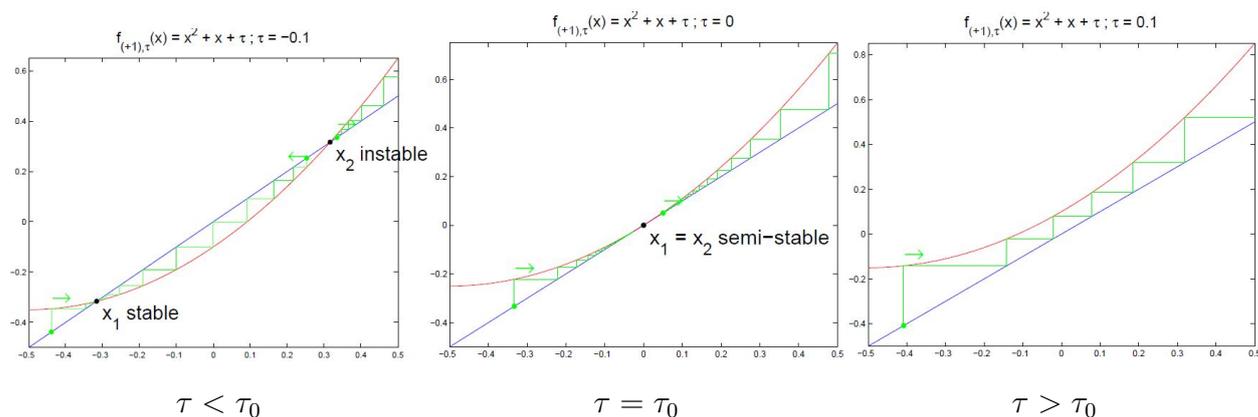
4.9.2 Cas discret, dimension 1

En dimension 1, on peut classifier les bifurcations structurellement stables autour d'un point d'équilibre p . En effet, dans ce cas, la dérivée de f_{τ_0} en p doit valoir $\lambda = \pm 1$.

Commençons par le cas $\lambda = 1$. La famille $(f_{(+1),\tau})_{\tau \in \mathbb{R}}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{(+1),\tau}(x) = x + x^2 + \tau \tag{4.27}$$

a une bifurcation structurellement stable en $\tau_0 = 0$, avec dérivée 1, et est caractéristique de cette situation.

FIGURE 4.15 – Bifurcation de la famille $f_{(+1),\tau}(x)$.

Proposition 4.1 *La bifurcation de la famille (4.27) en $\tau_0 = 0$ est structurellement stable, et toute bifurcation locale structurellement stable en dimension 1 ayant lieu en un point fixe avec dérivée 1 est (topologiquement) équivalente (après reparamétrisation) à cette bifurcation.*

Ainsi, pour $\tau < \tau_0$, $f_{(+1),\tau}$ possède un point fixe stable $-\sqrt{-\tau}$ et un point fixe instable $\sqrt{-\tau}$; pour $\tau = \tau_0$, ces deux points fixes sont confondus, et l'équilibre qui en résulte est semi-stable; enfin, dès que $\tau > \tau_0$, $f_{(+1),\tau}$ n'a plus de point fixe (figure 4.15). Le diagramme de bifurcation correspondant est représenté à la figure 4.16.

Dans le cas où $\lambda = -1$, le point fixe p est transverse et donc persistant. La valeur de la dérivée en p est supérieure à -1 pour $\tau < \tau_0$ et inférieure à -1 pour $\tau > \tau_0$, le point fixe restant isolé. Cela s'accompagne de la création d'une orbite stable de période 2, tandis que le point fixe devient instable. On parle de bifurcation par *doublement de période*, dont l'exemple typique est le suivant :

$$f_{(-1),\tau}(x) = -\tau x + x^2 \quad (4.28)$$

au voisinage de $x_0 = 0$, $\tau_0 = 1$. On montre alors une proposition similaire à la proposition 4.1, ce qui achève la classification dans le cas de la dimension 1. Pour visualiser cette bifurcation, on peut tracer $f_{(-1),\tau}$ (figure 4.17), mais aussi $f_{(-1),\tau}^2$ (figure 4.18) pour mieux comprendre les orbites de période 2. Le diagramme de cette bifurcation est représenté figure 4.19.

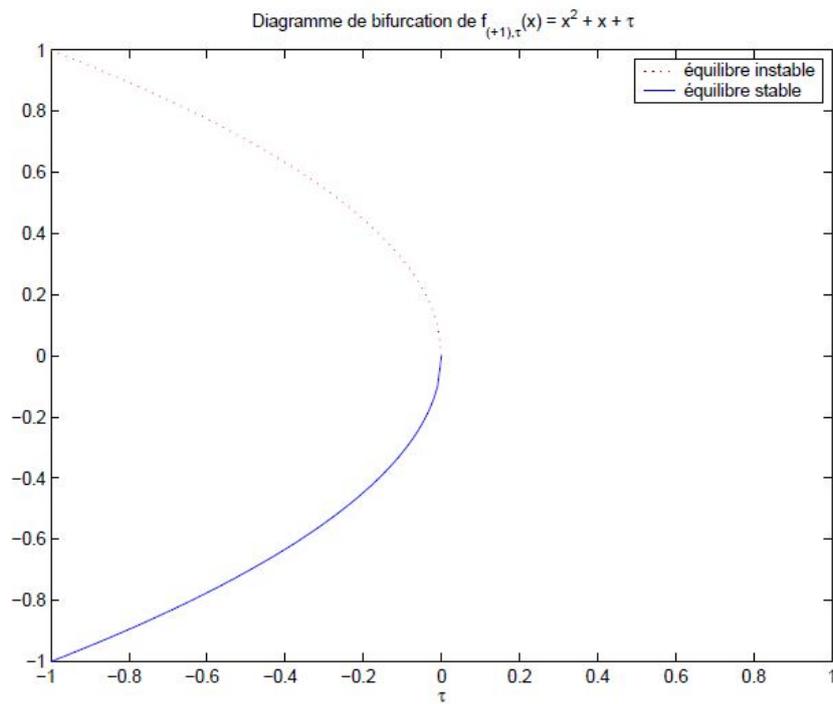


FIGURE 4.16 – Diagramme de bifurcation de la famille $f_{(+1),\tau}(x)$, autour de $\tau_0 = 0$.

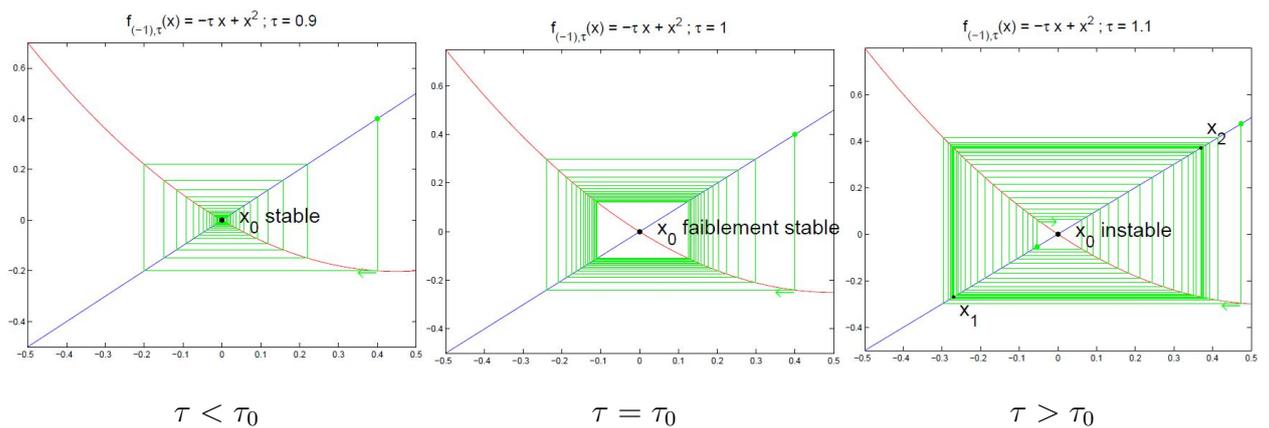


FIGURE 4.17 – Bifurcation subie par $f_{(-1),\tau}(x)$.

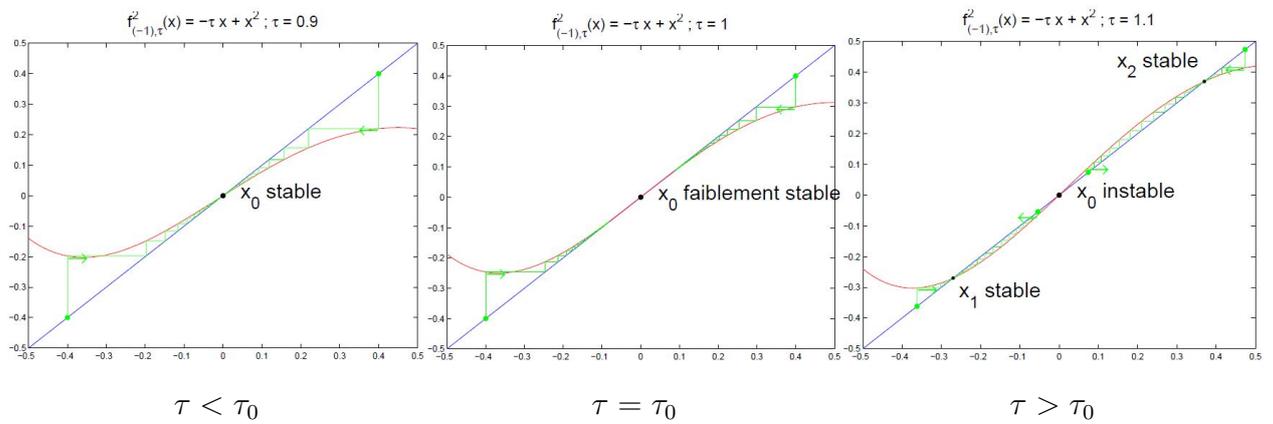


FIGURE 4.18 – Bifurcation subie par $f_{(-1),\tau}^2(x)$.

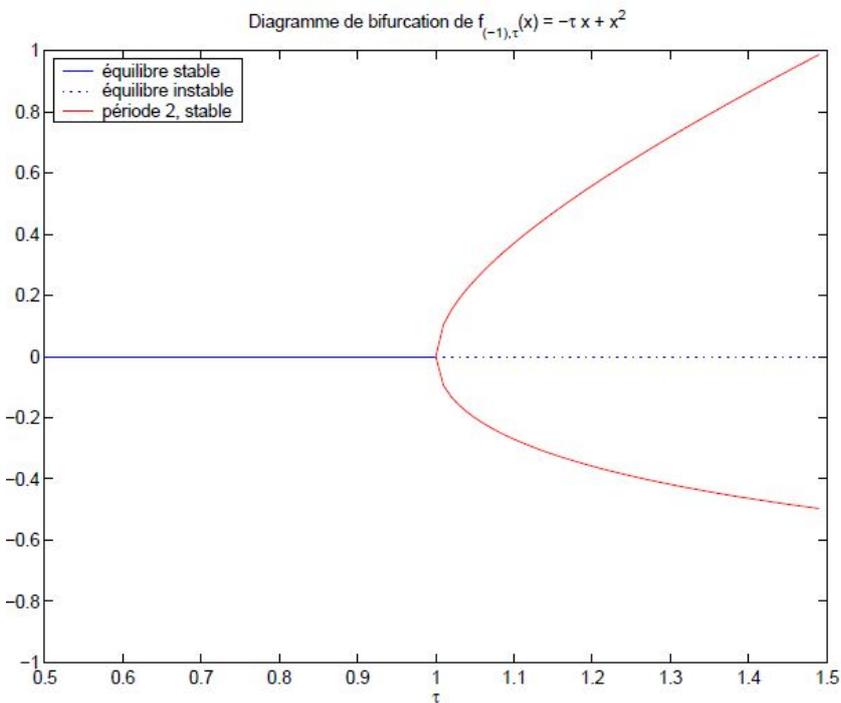


FIGURE 4.19 – Diagramme de bifurcation de la famille $f_{(-1),\tau}(x)$, autour de $\tau_0 = 1$.

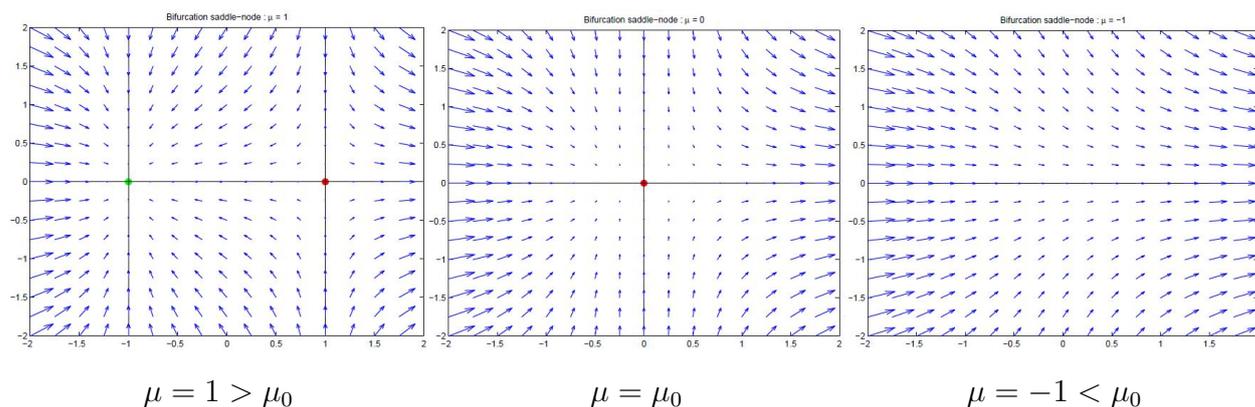


FIGURE 4.20 – Bifurcation selle-noeud : espace des phases de part et d'autre de $\mu_0 = 0$.

4.9.3 Bifurcation selle-nœud ou col

En dimension supérieure, les bifurcations structurellement stables se produisent lorsqu'une valeur propre vaut ± 1 et les autres sont en-dehors du cercle unité.

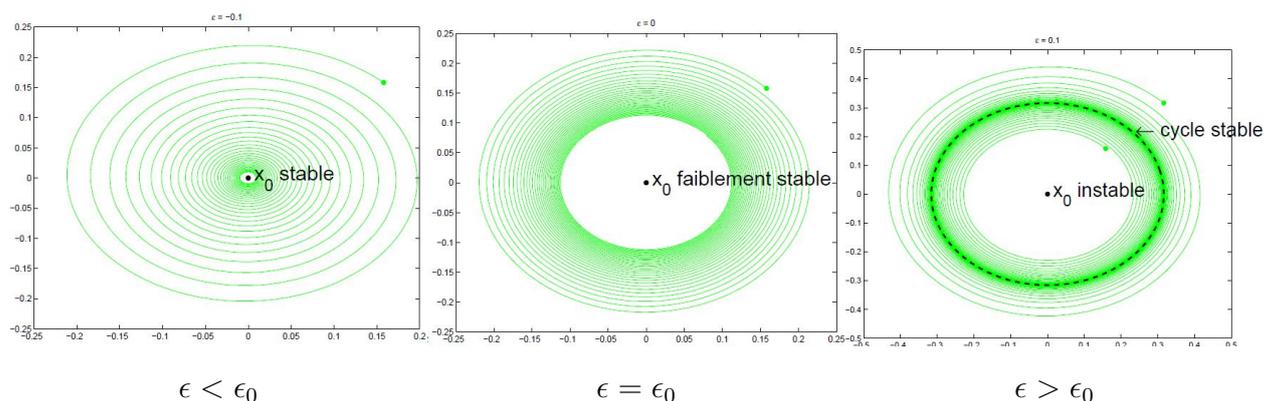
Un exemple classique, en dimension deux ou plus, est le suivant : deux point fixes, un noeud (point fixe attractif) et une selle (attractif dans une direction, répulsif dans une autre) se rencontrent. Après bifurcation, il n'y a plus aucun point fixe (localement). Une telle bifurcation est appelée *selle-nœud*³.

Le système différentiel suivant donne un exemple de bifurcation selle-nœud :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - \mu \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases} \quad (4.29)$$

Il ne s'agit en fait que d'une légère modification par rapport à la bifurcation 4.27, qui se produit sur la première coordonnée de ce système. La deuxième coordonnée est là pour que le point fixe instable devienne une selle (il ne peut pas y avoir de selle en dimension 1). Le diagramme de bifurcation est donc exactement le même que celui de la figure 4.16. L'espace des phases de part et d'autre de la bifurcation ($\mu = 0$) est représenté figure 4.20.

3. saddle-node en anglais

FIGURE 4.21 – Bifurcation de Hopf : orbites de part et d'autre de $\epsilon_0 = 0$.

4.9.4 Bifurcation de Hopf

Étude d'un exemple dans \mathbb{R}^2 Considérons l'exemple de la famille de systèmes dynamiques continus suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda y + \epsilon x - ax(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = \lambda x + \epsilon y - ay(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (4.30)$$

où λ et a sont des constantes strictement positives. Pour tout ϵ , $(0, 0)$ est un équilibre du système, les valeurs propres de la dérivée en 0 sont $\mu_\epsilon = i\lambda + \epsilon$ et $\bar{\mu}_\epsilon$. L'équilibre est donc stable si $\epsilon < 0$ et instable si $\epsilon > 0$.

En coordonnées «polaires» (un peu modifiées), $R = x^2 + y^2$ et $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, (4.30) devient :

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = 2R(\epsilon - aR) \\ \frac{d\theta}{dt} = \lambda \end{cases} \quad (4.31)$$

Ce système se résout explicitement (voir des exemples d'orbites figure 4.21, dans le cas $a = 1$, $\lambda = 2\pi$), d'où

- si $\epsilon < 0$, toutes les solutions convergent vers l'équilibre.
- si $\epsilon > 0$, toutes les solutions (sauf la solution constante nulle) convergent vers l'orbite périodique

$$\begin{cases} R = \frac{\epsilon}{a} \\ \dot{\theta} = \lambda \end{cases}$$

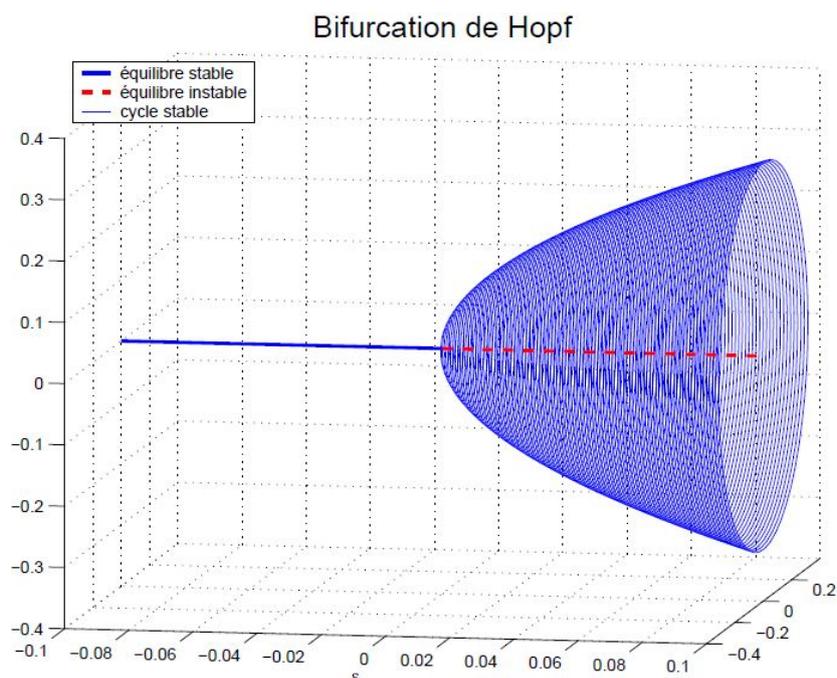


FIGURE 4.22 – Diagramme d’une bifurcation de Hopf.

La figure 4.22 représente le diagramme de bifurcations de cette famille de systèmes dynamiques en $\epsilon_0 = 0$.

Description du phénomène général La bifurcation décrite au paragraphe précédent est une *bifurcation de Hopf*. Plus généralement, considérons la famille à un paramètre d’équations différentielles dans \mathbb{R}^N

$$\frac{dx}{dt} = F_\epsilon(x). \quad (4.32)$$

Nous faisons l’hypothèse (\mathbf{H}_0) : $F_0(0) = 0$ et $D_0(F_0)$ n’a que des valeurs propres de partie réelle strictement négative, sauf deux qui sont imaginaires pures et non-nulles : $\mu_0 = i\lambda$ et $\bar{\mu}_0 = -i\lambda$, avec $\lambda > 0$. Dans un voisinage de l’origine, le système peut se réécrire (après changement de variable), à des termes négligeables près :

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = -\lambda x_1 - ax_0(x_0^2 + x_1^2) \\ \frac{dx_1}{dt} = \lambda x_0 - ax_1(x_0^2 + x_1^2) \\ \frac{dx'}{dt} = Ax' \end{cases} \quad (4.33)$$

Nous supposons désormais (\mathbf{H}_1) : $a > 0$.

Nous avons enfin besoin d'une dernière hypothèse relative à la dépendance en ϵ . Dans un voisinage de 0, on peut suivre l'équilibre et les valeurs propres $\mu_\epsilon, \overline{\mu}_\epsilon$ proches de l'axe imaginaire. On suppose (\mathbf{H}_2) : $\frac{\partial}{\partial \epsilon} \operatorname{Re} \mu_\epsilon > 0$ en $\epsilon = 0$.

Sous les hypothèses (\mathbf{H}_0) , (\mathbf{H}_1) et (\mathbf{H}_2) , la dynamique de l'équation (4.32) présente une *bifurcation de Hopf* au voisinage de l'origine en $\epsilon = 0$:

- pour $\epsilon < 0$ petit, il y a un équilibre stable.
- pour $\epsilon = 0$, l'équilibre reste stable mais plus faiblement.
- pour $\epsilon > 0$ petit, l'équilibre est instable, mais une orbite périodique quasi-circulaire de rayon $\simeq \sqrt{\epsilon/a}$ est stable.

Cas des difféomorphismes Un phénomène semblable peut se produire pour des systèmes dynamiques discrets $x \mapsto f_\epsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. On fait les hypothèses suivantes :

1. $f_0(0) = 0$, et les valeurs propres de $D_0 f_0$ ont toutes un module strictement inférieur à 1 sauf deux, μ_0 et $\overline{\mu}_0$ pour lesquelles $\mu_0 = 1$.
2. Pour $k = 1, 2, 3, 4$, $\mu_0^k \neq 1$, i.e. $\mu_0 \notin \{\pm 1, \pm i, \pm j\}$.
3. (\mathbf{H}'_1) et (\mathbf{H}'_2) comme dans le paragraphe précédent.

La dynamique pour ϵ proche de 0 est alors la même que dans le cas précédent. Un exemple de tel difféomorphisme est donné par

$$f_\epsilon(z) = \lambda(1 + \epsilon)z - az|z|^2, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.34)$$

avec $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq \pm 1$, $a > 0$. L'équilibre 0 est stable pour $\epsilon < 0$, faiblement stable pour $\epsilon = \epsilon_0 = 0$, instable pour $\epsilon > 0$ et alors le cercle $|z| = \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{1/2}$ est invariant et attire toutes les orbites proches de 0 sauf l'équilibre lui-même.

Remarquons également que si la dynamique sur la courbe invariante est proche d'une rotation, elle ne se comporte pas toujours comme une rotation. C'est le cas pour presque tous les paramètres, mais pas nécessairement pour tous.

Cas des orbites périodiques On se ramène en fait aux difféomorphismes via l'*application de retour de Poincaré*. En effet, soit l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = F_0(x)$ dans \mathbb{R}^N possédant une solution périodique x_0 . Considérons une section Σ transverse à l'orbite x_0 en $x_0(t_0)$. Une condition initiale suffisamment proche de $x_0(t_0)$ retourne

sur Σ en un temps fini, ce qui définit (dans un voisinage de $x_0(t_0)$) un difféomorphisme f_0 de Σ . La même opération pouvant être faite pour une petite perturbation F_ϵ de F_0 , cela définit une famille f_ϵ de difféomorphismes, comme dans le paragraphe précédent.

4.9.5 Autres bifurcations

Nous n'avons bien sûr pas abordé ici toutes les bifurcations possibles, même en nous limitant a priori à un cadre restreint. Un exemple particulièrement intéressant est celui de la *bifurcation homocline*, reliée à celle d'intersection homocline : deux intersections transverses homoclines se rencontrent, forment une tangence à cet instant, puis disparaissent.

4.9.6 Dynamique des polynômes quadratiques

On considère la famille d'applications⁴ $P_c : z \mapsto z^2 + c$ pour $z \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$.

Cette famille de systèmes dynamiques est l'une des plus simples qui, en dimension 1, peut générer un comportement chaotique. Son étude est de plus particulièrement intéressante car on y observe des phénomènes que l'on retrouve dans de nombreux autres cas.

4. Tout polynôme complexe de degré deux est conjugué par une application affine à une application de cette forme. C'est en particulier le cas de la famille logistique $x \mapsto rx(1-x)$, bien connue en dynamique des populations.

Chapitre 5

Exercices corrigés

Exercice 5.1

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - xy^2 - y \\ \dot{y} = -y^3 - yx^2 + x, \end{cases} \quad (5.1)$$

- 1) Linéariser le système (5.1) en point d'équilibre $(0, 0)$.
- 2) Etudier la stabilité en $(0, 0)$.

Exercice 5.2

a) Soit l'équation différentielle

$$\ddot{x}(t) + 5x^2(t)\dot{x}(t) + x(t) = 0 \quad (5.2)$$

- 1) Transformer l'équation (5.2) en système d'équation différentielle d'ordre 1.
- 2) Etudier la stabilité de point d'équilibre $(0, 0)$ de ce système (utiliser une fonction de Lyapunov).

b) Soit le système le système dynamique non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + y^2(t) \\ \dot{y}(t) = -3y(t) \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \begin{pmatrix} x(0) = C_1 \\ y(0) = C_2 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

où C_1, C_2 deux constants réels.

- 1) Déterminer le flot Φ_t du système (5.3).
- 2) Montrer que l'ensemble :

$$S = \left\{ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, C_1 = -\frac{C_2^2}{8} \right\}$$

est invariant par le flot Φ_t .

Exercice 5.3

Soit le système dynamique continu non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y) = f(x, y) \\ \dot{y} = y(3 - 2x - y) = g(x, y) \end{cases} \quad (5.4)$$

- 1) Déterminer sur quelles régions les abscisses $x(t)$ sont croissantes et décroissantes, et de même pour les ordonnées $y(t)$. Représenter par figure ces régions ci-dessous, pour $(x, y) \in [-1, 5]^2$.
- 2) Déterminer les points d'équilibre du système (5.4).
- 3) Calculer la matrice jacobienne $J(x, y)$ du système (5.4) au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- 4) Etudier la stabilité des points d'équilibre et la nature de ces points.
- 5) Tracer en figure le comportement des trajectoires du système (5.4) autour les points d'équilibre du système (5.4).

Exercice 5.4

Soit le système dynamique discret suivant :

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

où $x_n \in \mathbb{R}$ et r est un paramètre réel.

- 1) Déterminer les points fixes du système (5.5).
- 2) Etudier la stabilité des points fixe.

Exercice 5.5

On considère le système dynamique de Rössler suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - c)z, \end{cases} \quad (5.6)$$

où a, b et c sont paramètres réels, et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- 1) Calculer les points d'équilibre en fonction des valeurs des paramètres.
- 2) Effectuer le calcul de stabilité pour le point d'équilibre correspondant au cas $a = -3$ et $b = c = 0$.

Exercice 5.6

On considère le système de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + c \\ y_{n+1} = 2x_n y_n \end{cases} \quad \text{où } c \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

- 1) Si $y_n = 0$ déterminer la stabilité des points fixes dans l'intervalle de c pour lequel il existe.
- 2) Calculer les points fixes (x_n^*, y_n^*) du système (5.7) pour lesquels y_n est non nul.
- 3) Déterminer la matrice jacobienne et trouver les valeurs propres des points fixes trouvés à la question 2).
- 4) Montrer que le système (5.7) peut s'écrire sous la forme $z_{n+1} = z_n^2 + c$ dans la variable complexe $z_n = x_n + iy_n$.

Exercice 5.7

Soit le système non-linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = -x + ay - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

- 1) Etudier la stabilité de point d'équilibre $(0, 0)$ (utiliser une fonction de Lyapunov).
- 2) Utiliser les coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et montrer que l'on obtient l'équation suivante :

$$\dot{r} = (a - r)r \quad \text{Indication : utiliser } x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}. \quad (5.9)$$

Exercice 5.8

On considère le modèle de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xy + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad \text{où } \sigma > 0, r > 0, b > 0. \quad (5.10)$$

- 1) Calculer les points d'équilibre.
- 2) Linéariser le système (5.10) autour de ces points d'équilibre.

3) En utilisant $V(x, y, z) = \frac{1}{2}(rx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2)$ comme fonction de Lyapunov, trouver des conditions suffisantes sur les paramètres pour que l'origine soit un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Exercice 5.9

1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1 - x$$

a) Trouver toutes les fonctions $f(x)$.

b) Calculer $f(\frac{\pi}{3})$.

2) Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y \\ \dot{y} = x + ay \end{cases} \quad \text{telle que } a = f(\frac{\pi}{3})$$

Etudier la stabilité de point d'équilibre $(0, 0)$.

Exercice 5.10

Considérons l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n - x_n^3, \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \quad (5.11)$$

1) Trouver les points fixes x^* pour l'équation (5.11), et déterminer pour quelles valeurs de a chaque point fixe existe.

2) Déterminer les intervalles de a où les points fixes sont stables.

3) Vérifier qu'un cycle d'ordre 2 de $f(x_n)$ est donné par $\{\sqrt{1+a}, -\sqrt{1+a}\}$.

4) Déterminer la stabilité de ce cycle d'ordre 2.

Exercice 5.11

Considérons l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n}{1+x_n^2} - ax_n, \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \quad (5.12)$$

1) Trouver les points fixes x^* pour l'équation (5.12), et déterminer pour quelles valeurs de a chaque point fixe existe.

- 2) Déterminer les intervalles de a où les points fixes non triviaux sont stables.
- 3) Trouver la valeur $a = a_p$ où le point fixe trivial $x^* = 0$ est donné un doublement de période.
- 4) Supposons que la valeur de x_n est petite et positive $x_n \approx \epsilon$, puis montrer au premier ordre en ϵ qu'il existe deux cycle à $a = a_p$.

Exercice 5.12

Considérons le système dynamique discret

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n-1)}{1 + \beta x^2(n)}, \quad \text{où } \beta > 0. \quad (5.13)$$

- 1) Déterminer les points fixes de système (5.13).
- 2) Trouver un changement de variable pour obtenir le système suivante :

$$\begin{cases} y_1(n+1) = y_2(n) \\ y_2(n+1) = \frac{\alpha y_1(n)}{1 + \beta y_2^2(n)}, \end{cases} \quad (5.14)$$

- 3) Vérifier que $(0, 0)$ est un point fixe de système (5.14) et discuter sa stabilité.

5.1 Solutions

Solution 5.1

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - xy^2 - y \\ \dot{y} = -y^3 - yx^2 + x, \end{cases} \quad (5.15)$$

1) La matrice Jacobienne en point d'équilibre $(0, 0)$ est donnée comme suivante

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 - y^2 & -2xy - 1 \\ -2xy + 1 & -3y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

alors

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions du polynôme caractéristique $M(\lambda)$ avec

$$\det[J(0, 0)] - \lambda.I = 0,$$

alors

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

donc les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i.$$

le partie réel des valeurs propres λ_1, λ_2 est nul donc on ne peut pas savoir la stabilité du système en l'origine.

2) En étudier la stabilité en l'origine avec fonction de Lyapunov, soit $V(x, y) = x^2 + y^2$ alors

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ &= 2x(-x^3 - xy^2 - y) + 2y(-y^3 - yx^2 + x) \\ &= -2x^4 - x^2y^2 - xy - 2y^4 - y^2x^2 + xy \\ &= -2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \\ &= -2(x^2 + y^2)^2 \end{aligned}$$

alors la fonction de Lyapunov $V(x, y) = x^2 + y^2$ est vérifiée

$$\implies \begin{cases} V(x, y) = x^2 + y^2 > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ V(0, 0) = 0 \\ \dot{V}(x, y) = -2(x^2 + y^2)^2 < 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} V(x, y) = +\infty. \end{cases}$$

Alors $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

Solution 5.2

1) On pose

$$\begin{cases} x = x_1 \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1^2 x_2 - x_1 \end{cases}$$

2). Soit la fonction de Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ alors

$$V(x_1, x_2) > 0 \quad \text{si} \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad V(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x_1, x_2) = +\infty.$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -10x_1^2 x_2^2 < 0$$

alors le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

b). 1)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 \\ \dot{y} = -3y \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x_0 = c_1 \\ y_0 = c_2 \end{cases}$$

donc $\dot{y} = -3y \Rightarrow y(t) = \alpha_2 e^{-3t} \Rightarrow y(t) = c_2 e^{-3t}$ car $y_0 = c_2$

et $\dot{x} = 2x + y^2$ on obtien la solution homogène x_h alors

$\dot{x} = 2x \Rightarrow x_h = \alpha_1 e^{2t}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, on cherche la solution générale,

la solution particulière est $x_p = -\frac{c_2^2}{8} e^{-6t}$.

Donc la solution générale est $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$x(t) = \left(c_1 + \frac{c_2^2}{8}\right) e^{2t} - \frac{c_2^2}{8} e^{-6t}.$$

Alors le flot Φ du système (5.3) est

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(c_1 + \frac{c_2^2}{8}\right) e^{2t} - \frac{c_2^2}{8} e^{-6t} \\ c_2 e^{-3t} \end{pmatrix}$$

2) S est un ensemble invariant

$$c_1 = -\frac{c_2^2}{8} \Rightarrow x(t) = -\frac{c_2^2}{8}e^{-6t} \Rightarrow x(t) = -\frac{y^2(t)}{8},$$

donc $\Phi_t(S) \subset S$ alors S un ensemble invariant par Φ .

Solution 5.3

1) $x(t)$ est croissant alors

$$\dot{x}(t) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \text{et } 3 - x - 2y \geq 0 \\ & \text{ou} \\ x \leq 0 & \text{et } 3 - x - 2y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \text{et } y \leq \frac{3-x}{2} \\ & \text{ou} \\ x \leq 0 & \text{et } y \geq \frac{3-x}{2} \end{cases}$$

$$x(t) \text{ est décroissant } \dot{x}(t) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \text{et } y \geq \frac{3-x}{2} \\ & \text{ou} \\ x \leq 0 & \text{et } y \leq \frac{3-x}{2} \end{cases}$$

$$y(t) \text{ est croissant } \dot{y}(t) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 & \text{et } y \leq 3 - 2x \\ & \text{ou} \\ y \leq 0 & \text{et } y \geq 3 - 2x \end{cases}$$

$$y(t) \text{ est décroissant } \dot{y}(t) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 & \text{et } y \leq 3 - 2x \\ & \text{ou} \\ y \leq 0 & \text{et } y \leq 3 - 2x \end{cases}$$

2) Points d'équilibres du système (5.3) sont

$$(0, 0), (0, 3), (3, 0), (1, 1),$$

3) Matrice jacobienne

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -2y & 3 - 2x - 2y \end{pmatrix}$$

3)

La nature du points d'équilibre

$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ alors les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 3$, donc $(0, 0)$ est point noeud instable.

$J(0, 3) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ alors les valeurs propres sont $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -3$, donc $(0, 3)$ est point noeud stable.

$J(3, 0) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ alors les valeurs propres sont $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -3$, donc $(3, 0)$ est point noeud stable.

$J(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ alors les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -3$, donc $(1, 1)$ est point col.

Solution 5.4

1) Points fixes du système (5.5) sont $0, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{r}}$.

$f'(0) = r$ alors 0 est stable si $r \in [-1, 1]$ et instable si $r \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

$f'(\pm\sqrt{1 - \frac{1}{r}}) = -2r + 3$ alors $\pm\sqrt{1 - \frac{1}{r}}$ sont stables si $r \in]1, 2[$ et instable si $r \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Le point fixe n'existe pas pour $r \in [0, 1]$.

Solution 5.5

1) Points d'équilibres du système (5.6) on pose $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ et $\dot{z} = 0$ alors

$$(x - c)x + ba = 0, y = -\frac{1}{a}x, z = -y, \quad \text{et} \quad \Delta = c^2 - 4ba.$$

- Si $\Delta > 0$ alors existe deux points fixes tel que $a \neq 0$.

$$\left(\frac{c + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{c + \sqrt{\Delta}}{2a} \right), \left(\frac{c - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{c - \sqrt{\Delta}}{2a} \right).$$

- Si $\Delta < 0$ pas de point fixe.

- Si $\Delta = 0$ alors existe un point fixe tel que $a \neq 0$, est $(\frac{c}{2}, \frac{-c}{2a}, \frac{c}{2a})$.

- Si $a = 0$ et $c \neq 0$ alors existe un point fixe est $(0, \frac{b}{c}, -\frac{b}{c})$,

- Si $a = 0, b = 0$ et $c = 0$ alors existe un point fixe est $(0, 0, 0)$,

- Si $a = 0, b = 0$ et $c \neq 0$ pas de point fixe.

2) $a = -3$ et $b = c = 0$ alors existe un point fixe du système (5.6) est $(0, 0, 0)$,

$$\text{Matrice jacobienne } J(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$\det(J(0,0,0) - \lambda I) = 0$ donc $-\lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 1) = 0$.

Alors existe trois valeurs propres réels

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} < 0, \lambda_3 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < 0.$$

Ne pas déduire la stabilité.

Solution 5.6

1) Points fixes du système (5.7) si $y_n = 0$, $x^2 - x + c = 0$ et $\Delta = 1 - 4c$,

- Si $\Delta > 0$ donc $c < \frac{1}{4}$ implique existe deux points fixes

$$x_1^* = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}, x_2^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

- Si $\Delta = 0$ donc $c = \frac{1}{4}$ implique existe un point fixe est $x^* = \frac{1}{2}$

- Si $\Delta < 0$ donc $c > \frac{1}{4}$ implique pas de point fixe.

La stabilité on pose $f(x) = x^2 + c$

- Si $c < \frac{1}{4}$ $f'(x_1^*) = 2x_2^* = 1 - \sqrt{1 - 4c}$ alors x_1^* instable

- Si $c < \frac{1}{4}$ $f'(x_2^*) = 2x_1^* = 1 + \sqrt{1 - 4c}$ alors

x_2^* stable si $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$,

x_2^* instable si $c < -\frac{3}{4}$.

2) $y_n \neq 0$ il existe deux points fixes du système (5.7) sont

$$\left(\frac{1}{2}, \sqrt{c - \frac{1}{4}}\right), \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{c - \frac{1}{4}}\right)$$

- Si $c < \frac{1}{4}$ implique pas de point fixe.

- Si $c = \frac{1}{4}$ implique existe un point fixe est $(\frac{1}{2}, 0)$

$$\mathfrak{3) } J(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} 2x_n & -2y_n \\ 2y_n & 2x_n \end{pmatrix}$$

$$J\left(\frac{1}{2}, \sqrt{c - \frac{1}{4}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{c - \frac{1}{4}} \\ 2\sqrt{c - \frac{1}{4}} & 1 \end{pmatrix} \text{ et les valeurs propres sont } \lambda_1 = 1 +$$

$$\sqrt{1 - 4c}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{1 - 4c}.$$

$$J\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{c - \frac{1}{4}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{c - \frac{1}{4}} \\ -2\sqrt{c - \frac{1}{4}} & 1 \end{pmatrix} \text{ et les valeurs propres sont } \lambda_1 = 1 +$$

$$\sqrt{1 - 4c}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{1 - 4c}$$

$$J\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et les valeurs propres sont } \lambda_{1,2} = 1.$$

$$4) z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + c + ix_n y_n \text{ alors}$$

$$z_{n+1} = (x_n + iy_n)(x_n + iy_n) + c.$$

Solution 5.7

1) Nous utilisons la fonction de Lyapunov comme $V(x, y) = x^2 + y^2$ alors

$$V(0, 0) = 0$$

$V(x, y) > 0$ tel que $x \neq 0, y \neq 0$ et

$$\lim_{\|(x,y)\| \Rightarrow +\infty} V(x, y) = +\infty$$

V et décroissant c-à-d

$$\dot{V}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(a - \sqrt{x^2 + y^2})$$

si $a < 0$ alors $\dot{V}(x, y) < 0$ donc $(0, 0)$ est asymptotiquement stable

2)

$$x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)(a - \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$r^2(a - r) = r\dot{r}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = r(a - r).$$

Solution 5.8

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xy + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad \text{où } \sigma > 0, r > 0, b > 0. \quad (5.16)$$

1) Points d'équilibres

Les points d'équilibres sont donnés par la condition $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0$ dans (5.16), soit

$$O = (0, 0, 0),$$

et

$$C_{\pm} = (\pm x_0, \pm x_0, r - 1).$$

où $x_0 = \sqrt{b(r - 1)}$. Les points C_{\pm} n'existent que si $r \geq 1$, avec $C_{\pm} = O$ si $r = 1$.

2) **Linéarisation**

la matrice jacobienne

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Linéarisation autour de O . La matrice jacobienne s'écrit

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions du polynôme caractéristique $M(\lambda)$ avec

$$M(\lambda) = \det[J(0, 0, 0) - \lambda] = 0$$

alors

$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0$$

donc $\lambda_0 = -b < 0$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}[\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}] < 0$

et $\lambda_2 = -\frac{1}{2}[\sigma + 1 - \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}]$.

et donc la nature du point fixe évolue en fonction de r .

3) Soit la fonction de Lyapunov

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(rx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2)$$

alors

$$\dot{V}(x, y, z) = rx\dot{x} + \sigma y\dot{y} + \sigma z\dot{z}$$

donc

$$\dot{V}(x, y, z) = -\sigma(bz^2 + rx^2 - 2rxy + y^2)$$

On complète le carré pour écrire \dot{V} sous forme quadratique

$$\dot{V}(x, y, z) = -\sigma(bz^2 + rx^2 - 2rxy + y^2) - r^2x^2 + r^2x^2$$

alors

$$\dot{V}(x, y, z) = -\sigma[bz^2 + (y - rx)^2 + r(1 - r)x^2]$$

d'où on conclut,

- Si $r < 1$ alors $\dot{V}(x, y, z) < 0 \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, l'origine est donc asymptotiquement stable. globalement
- Si $r = 1$ on ne peut pas conclure car $\dot{V}(x, y, z) = 0$ sur la droite $x = 0$ et $y = 0$.

Solution 5.9

1) a)

$$f(x) = 1 - x - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt$$

alors

$$f'(x) = -1 - \int_0^x f(t) dt$$

donc

$$f''(x) = -f(x)$$

alors la solutions est

$$f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$$

où

$$\begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \\ f'(0) = -1 \Rightarrow \beta = -1 \end{cases}$$

alors

$$f(x) = \cos(x) - \sin(x).$$

$$b) f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

2) Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y \\ \dot{y} = x + ay \end{cases} \quad \text{où } a = f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

La matrice Jacobienne est

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions du polynôme caractéristique $M(\lambda)$ avec

$$M(\lambda) = \det[J - \lambda I] = 0$$

alors

$$(a - \lambda)^2 + 1 = 0$$

donc les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = a - i; \lambda_2 = a + i$$

où $a = \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0$ alors le point d'équilibre $(0, 0)$ est foyer stable.

Solution 5.10

Soit l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n - x_n^3, \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \quad (5.17)$$

1) Les points fixes x^* pour l'équation (5.17) donné comme

$$x_n = f(x_n) = ax_n - x_n^3$$

alors

$$x_0^* = 0, x_1^* = -\sqrt{a-1}, x_2^* = \sqrt{a-1},$$

$x_0^* = 0$ existe toujours, $x_1^* = -\sqrt{a-1}, x_2^* = \sqrt{a-1}$ existe pour $a \in [1, +\infty[$.

2) Les intervalles avec a où les points fixes sont stables donnée avec

$$f'(x_n) = a - 3x_n^2,$$

alors

$$f'(x_0^*) = f'(0) = a,$$

donc le point fixe x_0^* est stable si $a \in]-1, 1[$, et

$$f'(x_1^*) = f'(-\sqrt{a-1}) = -2a + 3,$$

donc le point fixe x_1^* est stable si $|-2a + 3| < 1$, alors $a \in]1, 2[$,

$$f'(x_2^*) = f'(\sqrt{a-1}) = -2a + 3,$$

et le point fixe x_2^* est stable si $|-2a + 3| < 1$, alors $a \in]1, 2[$.

3) Les cycle d'ordre 2 de $f(x_n)$ est donné par $\{\sqrt{1+a}, -\sqrt{1+a}\}$

$$f(\sqrt{1+a}) = a\sqrt{1+a} - \sqrt{1+a}^3 = a\sqrt{1+a} - (1+a)\sqrt{1+a} = -\sqrt{1+a}$$

et

$$f(-\sqrt{1+a}) = -a\sqrt{1+a} + \sqrt{1+a}^3 = -a\sqrt{1+a} + (1+a)\sqrt{1+a} = \sqrt{1+a}.$$

4) La stabilité de ce cycle d'ordre 2 est donnée comme

$$|f'(\sqrt{1+a})| = |f'(-\sqrt{1+a})| = |-2a-3| < 1,$$

Ainsi, le cycle d'ordre est stable si $a \in]-2, -1[$.

Solution 5.11

Soit l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n}{1+x_n^2} - ax_n, \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \quad (5.18)$$

1) Les points fixes de l'équation (5.18) sont donné comme suit

$$x_n = f(x_n) = \frac{x_n}{1+x_n^2} - ax_n,$$

alors

$$x_0^* = 0, x_1^* = -\sqrt{\frac{-a}{a+1}}, x_2^* = \sqrt{\frac{-a}{a+1}},$$

Le premier point fixe trivial x_0^* existe toujours, les deux derniers points fixes x_1^*, x_2^* existes dans l'intervalle $a \in]-1, 0[$

2) La stabilité des points fixes x_1^*, x_2^* donnée avec

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - a,$$

alors

$$f'(-\sqrt{\frac{-a}{a+1}}) = f'(\sqrt{\frac{-a}{a+1}}) = 2a^2 + 2a + 1,$$

donc les points fixes x_1^*, x_2^* sont stables si $a \in]-1, 0[$.

3) La valeur $a = a_p$ où le point fixe trivial $x^* = 0$ est donné un doublement de période

$$f'(x_0^*) = f'(0) = 1 - a = -1,$$

alors $a_p = 2$.

4) Supposons que la valeur de x_n est petite et positive $x_n \approx \epsilon$, alors

$$f(\epsilon) = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon^2} - 2\epsilon \approx -\epsilon$$

et

$$f(-\epsilon) = -\frac{\epsilon}{1 + \epsilon^2} + 2\epsilon \approx \epsilon,$$

donc existe deux-cycles à $a_p = 2$.

Solution 5.12

Soit le système dynamique discret

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n-1)}{1 + \beta x^2(n)}, \quad \text{où } \beta > 0. \quad (5.19)$$

1) Les points fixes de système (5.19).

On pose $f(x) = \frac{\alpha x}{1 + \beta x^2}$ tel que $\beta > 0$.

x^* point fixe c'est une solution de l'équation

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{\alpha x}{1 + \beta x^2} = x$$

c'est-à-dire

$$x(\alpha - 1 - \beta x^2) = 0$$

alors

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha - 1 - \beta x^2 = 0$$

donc si $\alpha > 1$ les points fixes sont

$$\left\{0, -\sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta}}, \sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta}}\right\}$$

et si $\alpha \leq 1$ existe un seul point fixe est $x^* = 0$.

2) faisons le changement de variable pour obtenir le système (5.20),

on pose

$$y_1(n) = x(n-1) \Rightarrow y_1(n+1) = x(n),$$

et

$$y_2(n) = y_1(n+1) = x(n),$$

donc

$$y_2(n+1) = x(n+1) = \frac{\alpha y_1(n)}{1 + \beta y_2^2(n)},$$

alors

$$\begin{cases} y_1(n+1) = y_2(n) = f(y_1, y_2) \\ y_2(n+1) = \frac{\alpha y_1(n)}{1 + \beta y_2^2(n)} = g(y_1, y_2), \end{cases} \quad (5.20)$$

d'où le résultat.

3) vérifions que l'origine est un point fixe alors

$$\begin{cases} f(y_1, y_2) = y_1 \\ g(y_1, y_2) = y_2, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \text{ vérifie} \\ g(0, 0) = 0 \text{ vérifie,} \end{cases}$$

alors $(0, 0)$ est un point fixe du système (5.20).

Discutons sa stabilité.

On utilise la méthode de linéarisation au voisinage de $(0, 0)$,

la matrice Jacobienne

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta y_1} & \frac{\delta f}{\delta y_2} \\ \frac{\delta g}{\delta y_1} & \frac{\delta g}{\delta y_2} \end{pmatrix}$$

alors

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha}{1 + \beta y_2^2} & \frac{-2\alpha\beta y_1 y_2}{(1 + \beta y_2^2)^2} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

alors le polynôme caractéristique d'une matrice $J(0, 0)$ est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha.$$

D'après question 1) si $\alpha > 1$ les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -\sqrt{\alpha}, \lambda_2 = \sqrt{\alpha},$$

donc

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha} > 1,$$

d'où le point $(0, 0)$ est un noeud instable pour le système (5.20).

Si $\alpha < 1$ on distingue deux cas :

Cas 1 : $(0 \leq \alpha < 1)$

donc $\lambda_1 = -\sqrt{\alpha}$, $\lambda_2 = \sqrt{\alpha}$, implique

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha} < 1,$$

d'où le point $(0, 0)$ est un noeud stable pour le système (5.20).

Cas 2 : $(\alpha < 0)$

les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -i\sqrt{-\alpha}, \lambda_2 = i\sqrt{-\alpha},$$

alors

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha} = \rho,$$

- si $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow \rho < 1$ implique $(0, 0)$ est un foyer stable,
- si $\alpha = -1 \Rightarrow \rho = 1$ implique $(0, 0)$ est un centre,
- si $\alpha < -1 \Rightarrow \rho > 1$ implique $(0, 0)$ est un foyer instable.

et puisqu'on a : $|\lambda_1| \neq 1, |\lambda_2| \neq 1$ alors $(0, 0)$ est un point hyperbolique d'où d'après le théorème de linéarisation au voisinage de $(0, 0)$ les trajectoires du système non linéaire et celles du système linéarisé son topologiquement équivalent.

Chapitre 6

Bibliographie

Bibliographie

- [1] A. Wolf, et al, Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D : nonlinear phenomena*, 16(3) (1985), 285 – 317.
- [2] O.Bonnefy. *Systèmes Dynamiques et instabilités hydrodynamiques*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, (2021).
- [3] k. djeddi, Dynamics in a Discrete -Time Three Dimensional Cancer System, *International Journal of Applied Mathematics*, 49(4) (2019), 1 – 7.
- [4] k. djeddi, *Estimation d'attracteurs étranges*, Editions Universitaires Européennes 1 (2014).
- [5] k. djeddi, Tareq Saeed, Juan L. G. Guirao, Hamed H. Alsulam, Mohammed Sh. Alhodaly. A Discrete Dynamics Approach to a Tumor System, *MDPI Mathematics*, 10(10), 1774; (2022).
- [6] k. djeddi, *Systèmes dynamiques à temps discrets et applications en biologie : Etudes statistiques et résultats numériques. Thèse doctorat en science université de constantine 1* , (2021)
- [7] k. djeddi, ANALYTICAL STUDY OF SYSTEM HYPER CHAOTIC AT DISCRETE TIMES AND APPLICATION OF LU SYSTEM'S. 1st International Conference on Innovative Academic Studies. Konya/Turkey (2022).
- [8] Eric Goncalves Da Silva. *Introduction aux systèmes dynamiques et chaos*. Ecole d'ingénieur. Institut Polytechnique de Grenoble, 2004, pp.23.
- [9] L. Kocarev, et al, Discrete chaos-i : Theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 53(6) (2006), 1300 – 1309.
- [10] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems Texts in applied mathematics*, Springer, New York. 2006.

- [11] J. D. Murray, *Mathematical Biology I : An Introduction*, 3rd ed., Interdiscip. Appl. Math. 17, Springer, New York, 2002.
- [12] Robert Roussarie et Jean Roux, *des équation différentielle aux systèmes dynamiques Tome 1*, 91944 Les Ulis Cedex A (2011)
- [13] W. Song and J. Liang, *Difference equation of Lorenz system*, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 83(1) (2013), 101 – 110.
- [14] W. G. Kelley et A. C. Peterson, *The theory of differential equations Classical and qualitaive*, Springer, New York. 2010.
- [15] Y. Shi and G. Chen, *Discrete chaos in Banach spaces*. *Science in China Series A : Mathematics*, 48(2) (2005), 222 – 238.
- [16] Y. Shi and G. Chen, *Introduction to anti-control of discrete chaos : theory and applications*. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 364(1846) (2006), 2433 – 2447.