Exercice 5.6

On considère le système de réccurence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + c \\ y_{n+1} = 2x_n y_n \qquad \text{où} \quad c \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.7)$$

1) Si $y_n = 0$ déterminer la stabilité des points fixes dans l'intervalle de c pour lequel il existe.

2) Calculer les points fixes (x_n^*, y_n^*) du système (5.7) pour lesquels y_n est non nul.

3) Déterminer la matrice jacobienne et trouver les valeurs propres des points fixes trouvés à la question 2).

4) Montrer que le système (5.7) peut s'écrire sous la forme $z_{n+1} = z_n^2 + c$ dans la variable complexe $z_n = x_n + iy_n$.

Exercice 5.7

Soit le système non-linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = -x + ay - y\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.8)$$

1) Etudier la stabilité de point d'équilibre $(0, 0)$ (utiliser une fonction de Lyapunov).

2) Utiliser les coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et montrer que l'on obtient l'équation suivante :

$$\left\{ \dot{r} = (a - r)r \quad \textit{Indication : utiliser} \quad x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}. \right. \quad (5.9)$$

Exercice 5.8

On considère le modèle de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xy + rx - y \quad \text{où} \quad \sigma > 0, r > 0, b > 0. \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} (5.10)$$

1) Calculer les points d'équilibre.

2) Linéariser le système (5.10) autour de ces points d'équilibre.

3) En utilisant $V(x,y,z) = \frac{1}{2}(rx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2)$ *comme fonction de Lyapunov, trouver des conditions suffisantes sur les paramètres pour que l'origine soit un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

Exercice 5.9

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1 - x$$

a) Trouver toutes les fonctions $f(x)$*.*

b) Calculer $f(\frac{\pi}{3})$*.*

2) Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y \\ \dot{y} = x + ay \end{cases} \quad \textit{telle que} \quad a = f(\frac{\pi}{3})$$

Etudier la stabilité de point d'équilibre $(0,0)$*.*

Exercice 5.10

Considérons l'équation de réccurence

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n - x_n^3, \quad \textit{où} \quad a \in \mathbb{R} \tag{5.11}$$

1) Trouver les points fixes x^* *pour l'équation (5.11), et déterminer pour quelles valeurs de a chaque point fixe existe.*

2) Déterminer les intervalles de a où les points fixes sont stables.

3) Vérifier qu'un cycle d'ordre 2 de $f(x_n)$ *est donné par* $\{\sqrt{1+a}, -\sqrt{1+a}\}$*.*

4) Déterminer la stabilité de ce cycle d'ordre 2.

Exercice 5.11

Considérons l'équation de réccurence

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n}{1+x_n^2} - ax_n, \quad \textit{où} \quad a \in \mathbb{R} \tag{5.12}$$

1) Trouver les points fixes x^* *pour l'équation (5.12), et déterminer pour quelles valeurs de a chaque point fixe existe.*

2) Déterminer les intervalles de a où les points fixes non triviaux sont stables.

3) Trouver la valeur $a = a_p$ où le point fixe trivial $x^* = 0$ est donné un doublement de période.

4) Supposons que la valeur de x_n est petite et positive $x_n \approx \epsilon$, puis montrer au premier ordre en ϵ qu'il existe deux cycle à $a = a_p$.

Exercice 5.12

Considérons le système dynamique discret

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n-1)}{1+\beta x^2(n)}, \quad où \;\; \beta > 0. \tag{5.13}$$

1) Déterminer les points fixes de système (5.13).

2) Trouver un changemet de variable pour obtenir le système suivante :

$$\begin{cases} y_1(n+1) = y_2(n) \\ y_2(n+1) = \frac{\alpha y_1(n)}{1+\beta y_2^2(n)}, \end{cases} \quad (5.14)$$

3) Vérifier que $(0,0)$ est un point fixe de système (5.14) et discuter sa stabilité.