Exercices corrigés

Exercice 5.1

Soit le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = -x^3 - xy^2 - y \\ \dot{y} = -y^3 - yx^2 + x, \end{array}\right. \quad (5.1)$$

1) Linéairiser le système (5.1) en point d'équilibre $(0,0)$.

2) Etudier la stabilité en $(0,0)$.

Exercice 5.2

a) Soit l'équation différentielle

$$\ddot{x}(t) + 5x^2(t)\dot{x}(t) + x(t) = 0 \quad (5.2)$$

1) Transfomer l'équation (5.2) en système d'équation différentielle d'ordre 1.

2) Etudier la stabilité de point d'équilibre $(0,0)$ *de ce système (utiliser une fonction de Lyapunov).*

b) Soit le système le système dynamique non linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = 2x(t) + y^2(t) \\ \dot{y}(t) = -3y(t) \end{array}\right. \quad \textit{tel que} \quad \begin{pmatrix} x(0) = C_1 \\ y(0) = C_2 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

où C_1, C_2 *deux constants réels.*

1) Déterminer le flot Φ_t *du système (5.3).*

2) Montrer que l'ensemble :

$$S = \left\{ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, C_1 = -\frac{C_2^2}{8} \right\}$$

est invariant par le flot Φ_t.

Exercice 5.3

Soit le système dynamique continu non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y) = f(x, y) \\ \dot{y} = y(3 - 2x - y) = g(x, y) \end{cases} \quad (5.4)$$

1) Déterminer sur quelles régions les abscisses $x(t)$ *sont croissantes et décroissantes, et de même pour les ordonnées* $y(t)$*. Représenter par figure ces régions ci-dessous, pour* $(x, y) \in [-1, 5]^2$.

2) Déterminer les points d'équilibre du système (5.4).

3) Calculer la matrice jacobienne $J(x, y)$ *du système (5.4) au point* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4) Etudier la stabilité des points d'équilibre et la nature de ces points.

5) Tracer en figure le comportement des trajectoires du système (5.4) autour les points d'équilibre du système (5.4).

Exercice 5.4

Soit le système dynamique discret suivant :

$$x_{n+1} = f(x_n) = r x_n (1 - x_n^2), \quad n = 0, 1, 2, ... \qquad (5.5)$$

où $x_n \in \mathbb{R}$ *et* r *est un paramètre réel.*

1) Déterminer les points fixes du système (5.5).

2) Etudier la stabilité des points fixe.

Exercice 5.5

On considère le système dynamique de Rössler suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - c)z, \end{cases} \quad (5.6)$$

où a, b *et* c *sont paramètres réels, et* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1) Calculer les points d'équilibre en fonction des valeurs des paramètres.

2) Effectuer le calcul de stabilité pour le point d'équilibre correspondant au cas $a = -3$ *et* $b = c = 0$.