Chapitre 3

Systèmes dynamiques chaotiques

4.1 Définition mathématique du chaos

Il existe plusieurs définitions possibles du chaos, allant de la théorie ergodique, à l'approche topologique. Nous choisirons cette dernière car elle a le mérite de mettre en exergue trois concepts véritablement clés dans un comportement chaotique : imprédictibilité, irréductibilité et un élément de régularité.

L'évolution de système dynamique est imprédictible en ce sens qu'elle est sensible aux conditions initiales. Il est en particulier clair que la moindre erreur ou simple imprécision sur la condition initiale interdit de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et, en conséquence, de faire une prédiction autre que statistique sur le devenir à long terme du système. Ainsi, bien que l'on traite de systèmes déterministes, il est impossible de prévoir à long terme leurs comportements s'ils sont chaotiques. La seule manière est d'opérer effectivement l'évolution du système. Si cette simulation se fait numériquement, un problème de précision sur les conditions initiales se pose alors de petites erreurs d'arrondis dues à la précision du type de la variable codant ces conditions initiales peuvent exponentiellement s'amplifier de telle sorte que la trajectoire de phases obtenue n'est pas représentative de la réalité.
Exemple

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, est le variable d'état, et f une application à deux variables x et t, et soit $\phi_t(x_0)$ la solution de l'équation (2.1) qui passe par x_0 quand $t = t_0$.

4.1.1 Point limite positif

Définition 4.1 *Un point $y \in \mathbb{R}^n$ et dit appartenant au point limite positif d'un point $x \in \mathbb{R}^n$, si pour tout voisinage U de y on a, $\phi_t(x_0)$, tend vers U quand t tend vers l'infini.*

4.1.2 Ensemble limite positif

Définition 4.2 *L'ensemble $L(x)$ de tous les points limites positifs de x est appelé : l'ensemble limite positif de x.*

Une autre définition de $L(x)$ est donnée par :

$$L(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \exists t \geq t_0, \quad \textit{tel que } |f(x,t) - y| \leq \varepsilon\} \tag{4.2}$$

4.1.3 Ensemble limite attractif

Définition 4.3 *Un ensemble limite L est dit attractif, s'il existe un voisinage ouvert U de L tel que : $L(x) = L$, pour tous $x \in U$.*

4.1.4 Bassin d'attraction

Définition 4.4 *On appelle bassin d'attraction d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble défini par : $B(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / A$ tel que : $L(x) \subset A\}$.*

4.1.5 Ensemble limite positif non-stable

Définition 4.5 *On dit qu'un ensemble limite positif L est non stable, s'il existe au moins une trajectoire qui n'appartient pas à L, qui est attiré par L, et il existe au moins une trajectoire dans le voisinage L de qui n'est pas attirée par L.*

4.1.6 Ensemble invariant

Définition 4.6 *Un ensemble A est invariant dans $\mathbb{R}^n$ sous l'action du flot ϕ_t si et seulement si $\phi_t(x) \in A$: pour tout $x \in A$.*

4.1.7 Ensemble indécomposable

Définition 4.7 *Un ensemble A fermé et invariant de $\mathbb{R}^n$ est indécomposable si : pour tout couple de points $(x, y) \in A^2$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite de points $(x_k)_{k=0,m}$ tel que : $x_0 = x$ et $x_m = y$, et une suite de temps $(t_k)_{k=0,m}$, $\quad t_k \geq 1$ tel que : $|f(x_{k-1}, t_k) - x_k| \leq \varepsilon$.*
Cette série de définition nous permet de donner des définitions assez claires sur le phénomène du chaos.

Définition 4.8 *L'application $F : J \longrightarrow J$ possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour un certain $x \in J$ et un certain voisinage $V \subset J$ de x, il existe $y \in V$ tel que $\parallel f^n(x) - f^n(y) \parallel > \delta$.*
Avant d'entamer la notion d'irréductibilité, il est nécessaire d'introduire la notion d'ensemble dense.

4.1.8 Ensemble dense

Définition 4.9 *Supposons que X est un ensemble et Y un sous-ensemble de X. Y est dense dans X si, pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x, c'est-à-dire si la fermeture de Y est égale à X : $\bar{Y} = X$. Ce qui revient à dire que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une séquence $\{y_n\} \in Y$ de points $\{y_n\} \in Y$ qui convergent vers x. Pour exemple, l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres irrationnels sont denses dans l'ensemble des nombres réels.*

• *L'irréductibilité empêche le système chaotique d'être décomposé en sous-systèmes (sous-ensembles ouverts invariants) qui n'interagissent pas sous l'application. Cette propriété s'appelle la transitivité topologique. Autrement dit, une application transitive topologiquement possède des points qui évoluent d'un petit voisinage arbitraire vers n'importe quel autre.*

• *Notons qu'une application possédant une orbite dense est transitive topologiquement et que l'inverse est également vrai.*

Définition 4.10 *L'application $f : J \longrightarrow J$ est dite transitive topologiquement si pour toute paire d'ensembles ouverts $U, V \subset J$, il existe $k > 0$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

• *Contrairement aux comportements purement aléatoires, les systèmes chaotiques possèdent une certaine régularité qui se traduit par le fait que les points périodiques sont denses. La densité des points périodiques exprime l'infinité des comportements dynamiques que prodigue le chaos. Nous sommes maintenant prés pour donner une définition, ou plutôt une caractérisation du chaos :*

Définition 4.11 *Soit un ensemble V, l'application $f : J \longrightarrow J$ est dite chaotique sur V si*
1. *f possède une sensibilité aux conditions initiales,*
2. *f est topologiquement transitive,*
3. *les points périodiques sont denses dans V.*

• *Cette définition est certainement la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables. De plus, elle s'applique à un très grand nombre de systèmes dynamiques chaotiques et dans certains cas elle est même facilement vérifiable.*

En générale il n'y a pas de définition rigoureuse du chaos, car ce phénomène est plus une notion philosophique qu'une notion scientifique. On peut observer le phénomène *du chaos dans plusieurs domaines, mais comment le formaliser ?. La réponse est négative car jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas une théorie générale qui donne une explication ou une caractérisation finale de ce phénomène. Tout ce qu'il est possible de dire est qu'il existe plusieurs critères physiques qui permettent de confirmer qu'un système est chaotique. Notons qu'il existe quelques définitions du chaos, mais*

elles restent restrictives, la plus efficace du point de vue pratique est celle donnée dans 66 : Le chaos se produit quand le comportement du système, n'est pas un point d'équilibre, n'est pas périodique, n'est pas quasi-périodique.

4.1.9 Chaos

La notion de «chaos» en systèmes dynamiques, contrairement à sa signification usuelle de désordre total, se réfère à une situation où les orbites ne convergent pas vers une orbite périodique ou quasi-périodique, et où l'évolution des orbites est imprévisible à un certain point, ou leur comportement est sensible aux conditions initiales. Les premiers exemples étudiés furent — entre autres — l'attracteur de Lorenz, l'application logistique et l'application de Hénon.

Définition 4.12 (Orbite chaotique) *L'orbite de x, $\{f^n(x)/n \geq 0\}$, est* sensible *(ou* chaotique*) s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} \forall q \in \omega(x),\ \forall \epsilon > 0,\ \exists n_1, n_2, n > 0/\ d(f^{n_1}(x), q) < \epsilon, \\ d(f^{n_2}(x), q) < \epsilon \text{ et } d(f^{n_1+n}(x), f^{n_2+n}(x)) > C. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Une orbite asymptotique à une orbite périodique ou quasi-périodique n'est pas chaotique au sens où si $f^{n_1}(x)$ et $f^{n_2}(x)$ sont proches, alors $f^{n_1+n}(x)$ et $f^{n_2+n}(x)$ restent proches pour tout $n \geq 0$.

Une orbite sensible est également imprévisible dans la mesure où savoir qu'un point y de l'orbite est extrêmement proche de $q \in \omega(x)$ n'est pas suffisant pour prédire le futur de y à une distance C près.

Définition 4.13 (Expansivité) *Un homéomorphisme $f : X \to X$ est* expansif *s'il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta_0$.*

Dans l'ensemble stable d'un attracteur hyperbolique non-trivial, de même que l'on a une forte sensibilité aux conditions initiales [1], on peut montrer que l'ensemble des points ayant une orbite chaotique a une mesure de Lebesgue totale.

Définition 4.14 (Dynamique chaotique) *Un système dynamique* (X, f) *est* sensible *(ou a une* dynamique chaotique*) lorsque l'ensemble des points ayant une orbite chaotique a une mesure de Lebesgue non-nulle* [2].

Cependant, le chaos ainsi défini ne doit pas être interprété comme une totale imprédictibilité. En effet, on observe numériquement, pour certains systèmes chaotiques, que pour toute condition initiale prise dans un certain ouvert, on obtient le même ensemble ω-limite. Ceci conduit à la notion d'attracteur étrange.

Définition 4.15 (Attracteur étrange) *Une partie compacte A de X est un* attracteur étrange *s'il existe un ouvert U et $N \subset U$ de mesure de Lebesgue nulle tel que $\forall x \in U \backslash N$, $\omega(x) = A$ et l'orbite de x est chaotique.*

Un exemple d'attracteur étrange est l'*attracteur de Hénon*. On appelle parfois également attracteur étrange un attracteur A tel que f a une dépendance sensible aux conditions initiales avec probabilité totale sur $B(A) \times B(A)$ (où $B(A)$ est le bassin d'attraction de A.

Une dernière notion importante est celle de *dynamique chaotique persistante*, qui traduit que de petites perturbations de f ont, avec une probabilité positive, une dynamique chaotique. Cette définition a un sens lorsque par exemple $f = f_\alpha$ est paramétrée par $\alpha \in \mathbb{R}^n$, car alors on dispose de la mesure de Lebesgue sur l'espace des paramètre α. De façon plus restrictive, on peut demander la persistance d'une dynamique chaotique dans un voisinage ouvert de f.

Chaos et simulations numériques Il est problématique de vouloir observer ou même caractériser un comportement chaotique lors d'une simulation numérique. Comment en effet mettre en évidence un tel phénomène malgré la précision finie d'un ordinateur ? Celle-ci a plusieurs conséquences majeures.

1. Comme l'indique la propriété d'expansivité **??**
2. Cette définition n'a de sens que lorsque X est une variété, pour que les ensembles de mesure de Lebesgue nulle soient définis.

Tout d'abord, les erreurs d'arrondi font que l'on n'observe que des pseudo-orbites. Si le système étudié possède une propriéte de pistage, comme c'est le cas avec les systèmes uniformément hyperboliques, on a de quoi être partiellement rassuré. Il reste cependant des cas (par exemple le doublement de l'angle) où les orbites qu'un ordinateur peut pister ne sont pas des orbites typiques du système. De même, lorsque les orbites calculées sont bornées, toutes les pseudo-orbites observées sont périodiques (même si la période est très longue), en raison du nombre fini de décimales que l'on peut calculer. Il faut donc fixer (arbitrairement) un seuil pour séparer orbites périodiques et non-périodiques.

Un deuxième effet est que l'on ne peut observer que le comportement en temps fini. Comment alors être sûrs qu'il s'agit bien du comportement stationnaire, et non d'un régime transitoire très long ? Il nous faut en effet fixer un seuil à partir duquel on observe la dynamique «à l'infini». Le choix de ce seuil est crucial pour éviter des erreurs, tout en limitant la durée des calculs.

Enfin, lorsque l'on étudie un système dépendant de paramètres réels, il faut garder à l'esprit que l'on ne peut observer celui-ci que sur un ensemble de mesure nul, l'ensemble des rationnels. C'est tout l'intérêt de considérer la persistance de la dynamique dans un voisinage ouvert, $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$. Ce problème peut cependant se ramener à celui du lien entre pseudo-orbites et vraies orbites si la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ dépend continûment de α pour la topologie de la convergence uniforme sur X, car alors une orbite sous $f_{\alpha+\epsilon}$ est une pseudo-orbite sous f_α si ϵ est assez petit.

4.2 Chaos au sens de Li et Yorke

La première définition mathématique du chaos est donnée en 1975 par les mathématiciens Li et Yorke. Voir [?] est donnée avec une application définie à temps discret de dimension un comme suit:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{4.4}$$

où f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

4.2.1 Théorème de Li et Yorke

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to I$, une application continue. On suppose qu'il existe un point $a \in I$ tel que:

$$b = f(a), c = f^2(a), d = f^3(a),$$

$$d \leq a < b < c,$$

ou

$$d \geq a > b > c.$$

Alors

1) Pour chaque $k = 1, 2, ...$, il y à un point périodique de période k,

2) L'ensemble $S \subset I$ ne contient pas de points périodiques qui satisfassent les conditions suivantes:

i) Pour chaque $p, q \in S$ avec $p \neq q$,

$$\limsup_{k\to\infty} |f^k(p) - f^k(q)| > 0,$$

et

$$\liminf_{k\to\infty} |f^k(p) - f^k(q)| = 0.$$

ii) Pour chaque $p \in S$ et un point périodique $q \in I$ avec $p \neq q$,

$$\limsup_{k\to\infty} |f^k(p) - f^k(q)| > 0.$$

Le cas de la dimension égale à un, le système dynamique (4.4) qui satisfait les conditions ci-dessus est dit chaotique au sens de Li et Yorke.

Le théorème peut être généralisé par supposition que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et que $f(I) \subset I$. De plus, la fonction f doit satisfaire:

$$f(I) \cap I \neq \emptyset, \tag{4.5}$$

afin qu'il contienne les points a, b, c et d.

4.3 Chaos au sens de Devaney

Soit f^m une fonction définie dans S vers S où $S \subset X$, (X espace topologique) satisfaite:

$$f^m = f(f^{m-1}), m = 1, 2, ..., \tag{4.6}$$

et

$$f^0 = \text{Identité}.$$

On appelé un point $x^* \in S$ périodique d'une période m s'il satisfait:

$$x^* = f^m(x^*), \quad \text{mais} \quad x^* \neq f^k(x^*), \quad \text{pour} \quad 1 < k \leq m, \tag{4.7}$$

si $m = 1$, alors le point x^* est appelé un point fixe de f.

4.3.1 Théorème de Devaney

On dit que l'application $f : S \to S$ est de comportement chaotique si

i) L'application f est sensible aux conditions initiales, c'est-à-dire $\forall x \in S$ et au voisinage de x dans S, il existe un $\delta > 0$ tel que:

$$|f^m(x) - f^m(y)| > \delta, \tag{4.8}$$

pour $y \in S$ et pour $m \geq 0$.

ii) L'application f est topologiquement transitive, c'est-à-dire pour toute paire de sous-ensembles ouverts $U, V \subset S$, il existe un nombre entier $m > 0$ tel que:

$$f^m(U) \cap V \neq \emptyset. \tag{4.9}$$

iii) Les points périodiques de l'application f sont denses dans S.

4.5 Caractérisation du chaos temporel

Ce paragraphe est consacré à quelques outils servant à rendre quantitatives les observations faites sur des systèmes chaotiques. L'extension au cas chaotique des notions d'instabilité et de taux de divergence conduit à la définition du spectre d'exposants de Lyapunov. La description déterministe des systèmes chaotiques perdant une bonne partie de son intérêt du fait de l'absence de prédictibilité à long terme, nous en profiterons pour introduire quelques éléments de description statistique des attracteurs étranges. Ensuite nous traiterons de la caractérisation géométrique des attracteurs, ce qui nécessitera l'introduction de dimensions fractionnaires ou fractales.

4.5.1 Sensibilité aux conditions initiales

La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales ; pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement ; les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables

La sensibilité aux conditions initiales est très pratique : il y a toujours une erreur dans la mesure de l'état du système. A cause de cette erreur le comportement macroscopique du système chaotique est influencé par l'accumulation des erreurs d'arrondis cela entraîne qu'un système chaotique est imprédictible.

Les limites de précision numérique font que une valeur de l'exposant est légèrement sous-estimée. On peut d'ailleurs constater que plus la valeur du temps est élevée, plus la valeur estimée en régime de cycle limite se rapproche de zéro. La transition entre un cycle et un tore fait apparaître une petite discontinuité sur la valeur de l'exposant, même si l'estimation donne toujours une valeur inférieure à zéro. L'accrochage marque encore une petite rupture, et la traversée de l'abscisse marque l'entrée dans un régime chaotique. L'augmentation rapide de la valeur de l'exposant accompagne une complexification progressive de la dynamique.

4.5.2 Exposants de Lyapunov

En régime chaotique, la distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. tant donné une précision sur les mesures, le temps que mettent deux conditions initiales dont la distance à l'origine est de l'ordre de cette précision constitue l'horizon prédictif du système. Les exposants dits de Lyapunov permettent de mesurer ce taux de divergence.

La mesure du plus grand exposant de Lyapunov nécessite d'itérer la dynamique du modèle pour deux conditions initiales très proches, et de mesurer au bout d'un temps fini la distance entre ces deux trajectoires. Pour que ce calcul soit valable, il faut bien sûr que ces deux conditions initiales soient situées à proximité de l'attracteur.

Une erreur $\epsilon_0 > 0$ sur la condition initiale va évoluer exponentiellement et l'erreur, à un instant t, aura l'expression suivante : $|\epsilon(t)| = \epsilon_0 e^{\lambda t}$. On peut calculer la valeur de λ, appelé exposant de Lyapunov, grâce aux méthodes développees par Alexandre Lyapunov.

4.6 Signes des exposants de Lyapunov

4.6.1 Dimension de Kaplan-Yorke (ou de Lyapunov)

La dimension de Lyapunov est au maximum égale au dimension de système, alors que pour les systèmes de dimension infinie la dimension de Lyapunov tend vers de grandes valeurs. Plus la dimension sera grande, plus la complexité du chaos sera élevée.

Supposons $S_j = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i$, et on classant les exposants de Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$.

Soit S_p la somme des exposants de Lyapunov où $p < n$, alors il est évident que pour un attracteur "étrange", et il existe un entier $p = j$ pour S_j est positive et un

Etat	Attracteur	Dimension	Exposants de Lyapunov
Point fixe	Point	0	$\lambda_n \leq ... \leq \lambda_1 < 0$
Périodique	courbe fermée	1	$\lambda_1 = 0, \lambda_n \leq ... \leq \lambda_2 < 0$
Période d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_n \leq ... \leq \lambda_3 < 0$
Période d'ordre K	K-Tore	K	$\lambda_1 = ... = \lambda_K = 0$ $\lambda_n \leq ... \leq \lambda_{K+1} < 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i < 0$
Hyper chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i < 0$

TABLEAU 4.1 – Propriétés des attracteurs par le signe des exposants de Lyapunov.

.

entier $j+1$ pour S_{j+1} est négative. L'entier j est défini par les conditions:

$$S_j = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad S_{j+1} = \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0. \tag{4.14}$$

La dimension de Kaplan-Yorke (ou dimension de Lyapunov) D_{KL} est définie par:

$$D_{KL} = j + \frac{S_j}{|\lambda_{j+1}|} = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}. \tag{4.15}$$

Remarque 4.3 *Si la somme S_j ne devient pas négatif à partir du λ_i, la dynamique est divergente dans l'espace d'état choisi et D_{KL} est égal à la dimension d'espace donné.*