Solution 5.7

1) *Nous utilisons la fonction de Lyapunov comme* $V(x,y) = x^2 + y^2$ *alors*

V(0, 0)=0

$V(x,y) > 0$ *tel que* $x \neq 0, y \neq 0$ *et*

$\lim_{\|(x,y)\| \Rightarrow +\infty} V(x,y) = +\infty$

V *et décrossant c-à-d*

$$\dot{V}(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(a - \sqrt{x^2 + y^2})$$

si $a < 0$ *alors* $\dot{V}(x,y) < 0$ *donc* $(0,0)$ *est asymptotiquement stable*

2)

$$x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)(a - \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$r2(a - r) = r\dot{r}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = r(a - r).$$

Solution 5.8

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xy + rx - y \quad \text{où} \;\; \sigma > 0, r > 0, b > 0.(5.16) \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

1) ***Points d'équilibres***

Les points d'équilibres sont donnés par la condition $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0$ *dans (5.16), soit*

$$O = (0,0,0),$$

et

$$C_{\pm} = (\pm x_0, \pm x_0, r - 1).$$

où $x_0 = \sqrt{b(r-1)}$*. Les points* $C_{\pm}$ *n'existent que si* $r \geq 1$*, avec* $C_{\pm} = O$ *si* $r = 1$*.*

2) ***Linéarisation***

la matrice jacobienne

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Linéarisation autour de O. La matrice jacobienne s'écrit

$$J(0,0,0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions du polynôme caractéristique $M(\lambda)$ avec

$$M(\lambda) = \det[J(0,0,0) - \lambda] = 0$$

alors

$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + \sigma(1-r)] = 0$$

donc $\lambda_0 = -b < 0$*,* $\lambda_1 = -\frac{1}{2}[\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-r)}] < 0$
et $\lambda_2 = -\frac{1}{2}[\sigma + 1 - \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-r)}]$.

et donc la nature du point fixe évolue en fonction de r.

3) Soit la fonction de Lyapunov

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}(rx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2)$$

alors

$$\dot{V}(x,y,z) = rx\dot{x} + \sigma y\dot{y} + \sigma z\dot{z}$$

donc

$$\dot{V}(x,y,z) = -\sigma(bz^2 + rx^2 - 2rxy + y^2)$$

On complète le carré pour écrire $\dot{V}$ sous forme quadratique

$$\dot{V}(x,y,z) = -\sigma(bz^2 + rx^2 - 2rxy + y^2) - r^2x^2 + r^2x^2$$

alors

$$\dot{V}(x,y,z) = -\sigma[bz^2 + (y-rx)^2 + r(1-r)x^2]$$

d'où on conclut,

– *Si* $r < 1$ *alors* $\dot{V}(x, y, z) < 0 \ \forall(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, *l'origine est donc asymptotiquement stable. globalement*

– *Si* $r = 1$ *on ne peut pas conclure car* $\dot{V}(x, y, z) = 0$ *sur la droite* $x = 0$ *et* $y = 0$.

Solution 5.9

1) a)

$$f(x) = 1 - x - x\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$$

alors

$$f'(x) = -1 - \int_0^x f(t)dt$$

donc

$$f''(x) = -f(x)$$

alors la solutions est

$$f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$$

où

$$\begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \\ f'(0) = -1 \Rightarrow \beta = -1 \end{cases}$$

alors

$$f(x) = \cos(x) - \sin(x).$$

b) $f(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

2) Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y \\ \dot{y} = x + ay \end{cases} \quad \text{où} \ \ a = f(\frac{\pi}{3}).$$

La matrice Jacobienne est

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions du polynôme caractéristique $M(\lambda)$ *avec*

$$M(\lambda) = \det[J - \lambda I] = 0$$

alors

$$(a-\lambda)^2+1=0$$

donc les valeurs propres sont

$$\lambda_1=a-i;\lambda_2=a+i$$

où $a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}<0$ *alors le point d'équilibre* $(0,0)$ *est foyer stable.*

Solution 5.10

Soit l'équation de réccurence

$$x_{n+1}=f(x_n)=ax_n-x_n^3,\quad \text{où}\quad a\in\mathbb{R} \tag{5.17}$$

1) Les points fixes x^* *pour l'équation (5.17) donné comme*

$$x_n=f(x_n)=ax_n-x_n^3$$

alors

$$x_0^*=0,x_1^*=-\sqrt{a-1},x_2^*=\sqrt{a-1},$$

$x_0^*=0$ *existe toujours,* $x_1^*=-\sqrt{a-1},x_2^*=\sqrt{a-1}$ *existe pour* $a\in[1,+\infty[$.

2) Les intervalles avec a *où les points fixes sont stables donnée avec*

$$f'(x_n)=a-3x_n^2,$$

alors

$$f'(x_0^*)=f'(0)=a,$$

donc le point fixe x_0^* *est stable si* $a\in]-1,1[$, *et*

$$f'(x_1^*)=f'(-\sqrt{a-1})=-2a+3,$$

donc le point fixe x_1^* *est stable si* $|-2a+3|<1$, *alors* $a\in]1,2[$,

$$f'(x_2^*)=f'(\sqrt{a-1})=-2a+3,$$

et le point fixe x_2^* *est stable si* $|-2a+3|<1$, *alors* $a\in]1,2[$.

3) Les cycle d'ordre 2 de $f(x_n)$ est donné par $\{\sqrt{1+a}, -\sqrt{1+a}\}$

$$f(\sqrt{1+a}) = a\sqrt{1+a} - \sqrt{1+a}^3 = a\sqrt{1+a} - (1+a)\sqrt{1+a} = -\sqrt{1+a}$$

et

$$f(-\sqrt{1+a}) = -a\sqrt{1+a} + \sqrt{1+a}^3 = -a\sqrt{1+a} + (1+a)\sqrt{1+a} = \sqrt{1+a}.$$

4) La stabilité de ce cycle d'ordre 2 est donnée comme

$$|f'(\sqrt{a+1})| = |f'(-\sqrt{a+1})| = |-2a-3| < 1,$$

Ainsi, le cycle d'ordre est stable si $a \in]-2, -1[$.

Solution 5.11

Soit l'équation de réccurence

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n}{1+x_n^2} - ax_n, \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R} \tag{5.18}$$

1) Les points fixes de l'équation (5.18) sont donné comme suit

$$x_n = f(x_n) = \frac{x_n}{1+x_n^2} - ax_n,$$

alors

$$x_0^* = 0, x_1^* = -\sqrt{\frac{-a}{a+1}}, x_2^* = \sqrt{\frac{-a}{a+1}},$$

Le premier point fixe trivial x_0^* existe toujours, les deux derniers points fixes x_1^*, x_2^* existes dans l'intervalle $a \in]-1, 0[$

2) La stabilité des points fixes x_1^*, x_2^* donnée avec

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - a,$$

alors

$$f'(-\sqrt{\frac{-a}{a+1}}) = f'(\sqrt{\frac{-a}{a+1}}) = 2a^2 + 2a + 1,$$

donc les points fixes x_1^*, x_2^* sont stables si $a \in]-1, 0[$.

3) La valeur $a = a_p$ où le point fixe trivial $x^* = 0$ est donné un doublement de période

$$f'(x_0^*) = f'(0) = 1 - a = -1,$$

alors $a_p = 2$.

4) Supposons que la valeur de x_n *est petite et positive* $x_n \approx \epsilon$, *alors*

$$f(\epsilon) = \frac{\epsilon}{1+\epsilon^2} - 2\epsilon \approx -\epsilon$$

et

$$f(-\epsilon) = -\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2} + 2\epsilon \approx \epsilon,$$

donc existe deux-cycles à $a_p = 2$.

Solution 5.12

Soit le système dynamique discret

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n-1)}{1+\beta x^2(n)}, \quad où \;\; \beta > 0. \tag{5.19}$$

1) Les points fixes de système (5.19).

On pose $f(x) = \frac{\alpha x}{1+\beta x^2}$ *tel que* $\beta > 0$.

x^* *point fixe c'est une solution de l'équation*

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{\alpha x}{1+\beta x^2} = x$$

c'est-à-dire

$$x(\alpha - 1 - \beta x^2) = 0$$

alors

$$x = 0 \quad ou \quad \alpha - 1 - \beta x^2 = 0$$

donc si $\alpha > 1$ *les points fixes sont*

$$\{0, -\sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta}}, \sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta}}\}$$

et si $\alpha \leq 1$ *existe un seul point fixe est* $x^* = 0$.

2) faisont le changement de variable pour obtenir le système (5.20), on pose

$$y_1(n) = x(n-1) \Rightarrow y_1(n+1) = x(n),$$

et

$$y_2(n) = y_1(n+1) = x(n),$$

donc

$$y_2(n+1) = x(n+1) = \frac{\alpha y_1(n)}{1+\beta y_2^2(n)},$$

alors

$$\begin{cases} y_1(n+1) = y_2(n) = f(y_1, y_2) \\ y_2(n+1) = \frac{\alpha y_1(n)}{1+\beta y_2^2(n)} = g(y_1, y_2), \end{cases} \tag{5.20}$$

d'où le résulta.

3) vérifions que l'origine est un point fixe alors

$$\begin{cases} f(y_1, y_2) = y_1 \\ g(y_1, y_2) = y_2, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \quad \textit{vérifie} \\ g(0,0) = 0 \quad \textit{vérifie}, \end{cases}$$

alors $(0,0)$ *est un point fixe du système (5.20).*

Discutons sa stabilité.

On utilise la méthode de linéairisation au voisinage de $(0,0)$,

la matrice Jacobienne

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta y_1} & \frac{\delta f}{\delta y_2} \\ \frac{\delta g}{\delta y_1} & \frac{\delta g}{\delta y_2} \end{pmatrix}$$

alors

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha}{1+\beta y_2^2} & \frac{-2\alpha\beta y_1 y_2}{(1+\beta y_2^2)^2} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

alors le polynome caractéristique d'une matrice $J(0,0)$ *est*

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha.$$

D'après question 1) si $\alpha > 1$ *les valeurs propres sont*

$$\lambda_1 = -\sqrt{\alpha}, \lambda_2 = \sqrt{\alpha},$$

donc

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha} > 1,$$

d'où le point $(0,0)$ *est un noeud instable pour le système (5.20).*

Si $\alpha < 1$ *on distigne deux cas :*

Cas 1 : $(0 \leq \alpha < 1)$

donc $\lambda_1 = -\sqrt{\alpha}, \lambda_2 = \sqrt{\alpha}$, *implique*

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha} < 1,$$

d'où le point $(0,0)$ *est un noeud stable pour le système (5.20).*

Cas 2 : $(\alpha < 0)$

les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -i\sqrt{-\alpha}, \lambda_2 = i\sqrt{-\alpha},$$

alors

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha} = \rho,$$

- *si* $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow \rho < 1$ *implique* $(0,0)$ *est un foyer stable,*
- *si* $\alpha = -1 \Rightarrow \rho = 1$ *implique* $(0,0)$ *est un centre,*
- *si* $\alpha < -1 \Rightarrow \rho > 1$ *implique* $(0,0)$ *est un foyer instable.*

et puisqu'on a : $|\lambda_1| \neq 1, |\lambda_2| \neq 1$ *alors* $(0,0)$ *est un point hyperbolique d'où d'après le théorème de liéairisation au voisinage de* $(0,0)$ *les trajetoires du système non linéaire et celles du système linéarisé son topoligiquement équivalant.*