

4.7 Exemples des systèmes chaotiques à temps continu

4.7.1 Système de Lorenz

Le système de Lorenz est généré par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = x(b - z) - y \\ \dot{z} = xy - cz. \end{cases} \quad (4.20)$$

Cet exemple a été publié en 1963 dans un journal météorologique. Les variables x, y et z représentent les états du système à chaque instant. a, b, c sont les paramètres du système. Le système présente un comportement chaotique pour $a = 10, b = 28, c = 8/3$ et $x_0 = 15, y_0 = 20, z_0 = 30$ est présente un attracteur étrange.

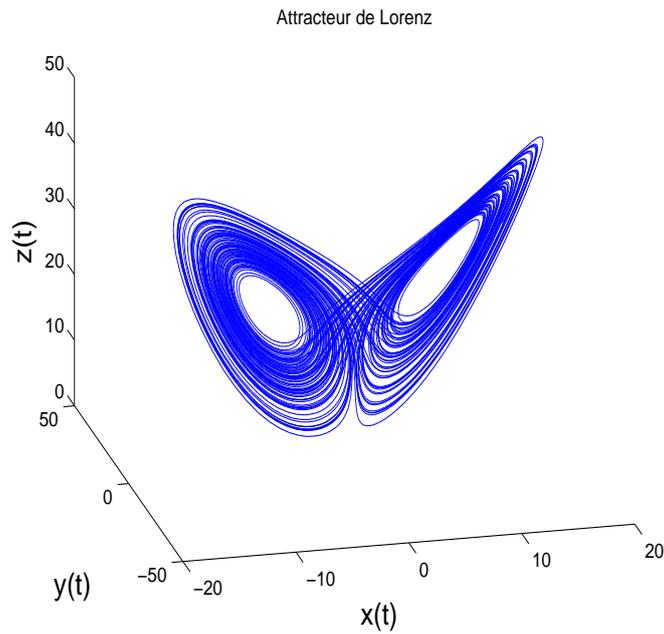


FIGURE 4.9 – Attracteur de Lorenz pour $a = 10, b = 28, c = 8/3$.

4.7.2 Système de Rössler

Le système de Rössler est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - c)z, \end{cases} \quad (4.21)$$

où a, b et c sont paramètres réels, et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Le système présente un comportement chaotique pour $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$ et $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$ est présente un attracteur étrange.

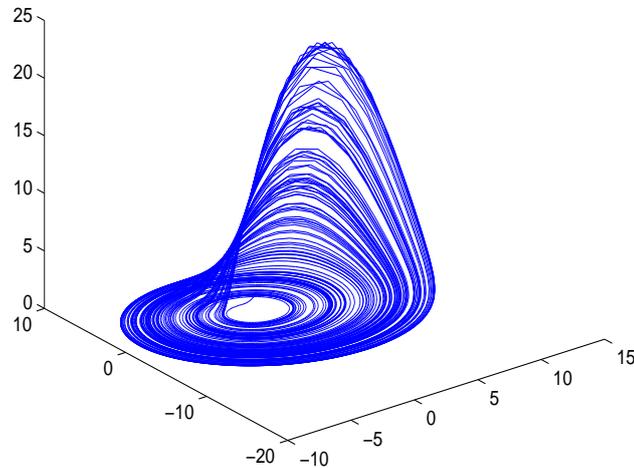


FIGURE 4.10 – Attracteur de Rössler pour $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$.

4.8 Exemples des systèmes chaotiques à temps discret

4.8.1 Récurrence logistique

Une récurrence logistique est un exemple simple de suite dont la récurrence n'est pas linéaire, utilisée par le biologiste Robert May en 1976, décrit l'évolution de population d'une espèce. Souvent citée comme exemple de la complexité qui peut résulter d'une simple relation non-linéaire.

La récurrence logistique donnée comme suivante:

$$x_{k+1} = f_{\mu}(x_k) = \mu x_k(1 - x_k), \quad (4.22)$$

où $x \in]0, 1[$ représente la population à l'année k et μ est une constante de l'intervalle $[0, 4]$ représente un facteur de croissance de la population.

Des exemples d'évolution de ce système sont données aux Figures 4.11.

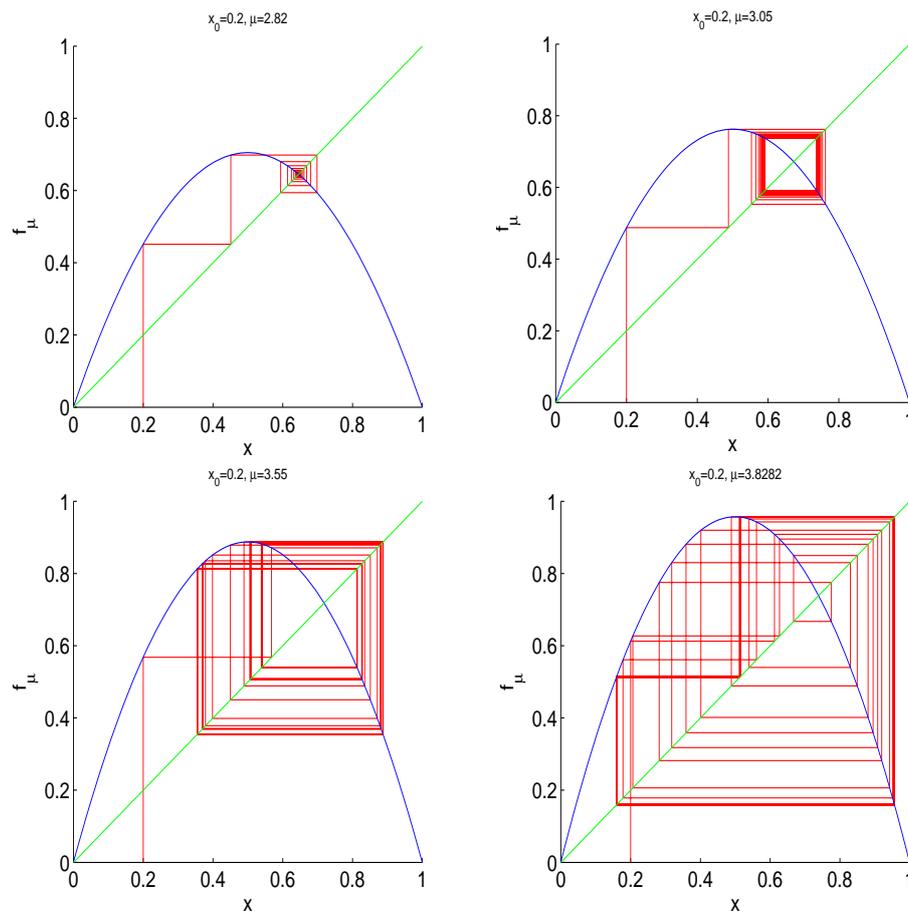


FIGURE 4.11 – Itérations de la fonction logistique.

4.8.2 Récurrence de Hénon

La récurrence de Hénon est un système dynamique discret de dimension 2 dont la représentation d'état est la suivante:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases} \quad (4.23)$$

pour les valeurs $a = 1.4$ et $b = 0.3$ et son bassin d'attraction.

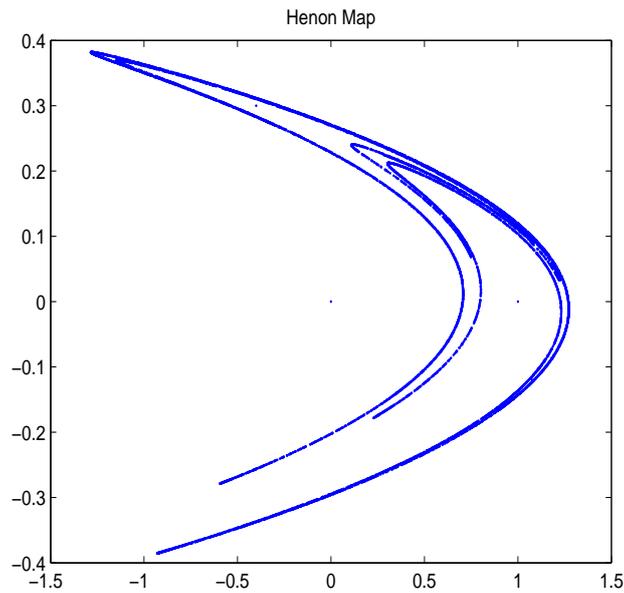


FIGURE 4.12 – Attracteur de Hénon pour les valeurs $a = 1.4$, $b = 0.3$ et $x_0 = y_0 = 0$.

4.8.3 Récurrence de Lozi

Dans le but de simplifier l'attracteur de Hénon, René Lozi, propose le système suivant:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - a|x_k| + y_k \\ y_{k+1} = bx_k. \end{cases} \quad (4.24)$$

L'attracteur de Lozi présentée pour $a = 0.7$, $b = 0.5$ et $x_0 = y_0 = 0$.

4.8.4 Récurrence d'Ikeda

L'attracteur d'Ikeda est un système dynamique à temps discret, caractérisé par la relation de récurrence:

$$z_{k+1} = A + Be^{iP/(|z_k|^2+1)+C} \quad (4.25)$$

Il a été proposé en 1979 par le physicien japonais Kensuke Ikeda pour décrire la propagation de la lumière à travers une cavité optique non linéaire.

La relation de récurrence est souvent utilisée sous la forme suivante:

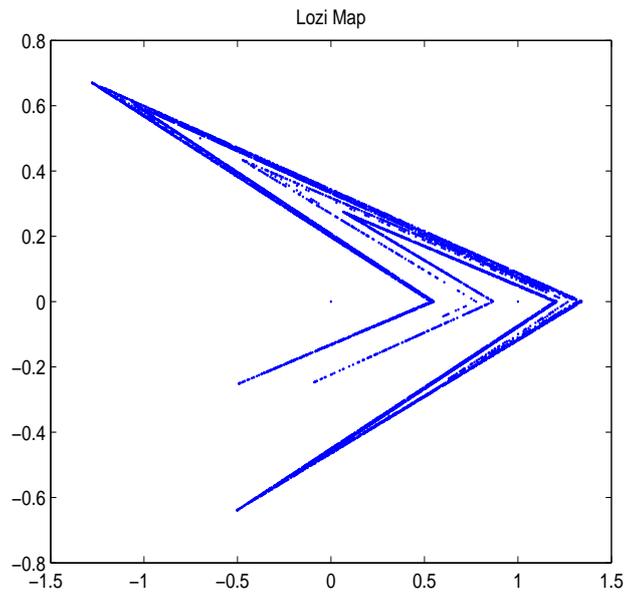


FIGURE 4.13 – Attracteur de Lozi pour $a = 0.7, b = 0.5$ et $x_0 = y_0 = 0$.

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + \mu(x_k \cos(\theta_k) - y_k \sin(\theta_k)) \\ y_{k+1} = \mu(x_k \sin(\theta_k) + y_k \cos(\theta_k)) \end{cases} \quad (4.26)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre et $\theta_k = 0.4 - \frac{6}{1+x_k^2+y_k^2}$.

Lorsque $\mu \geq 0.6$, le système a un comportement chaotique.

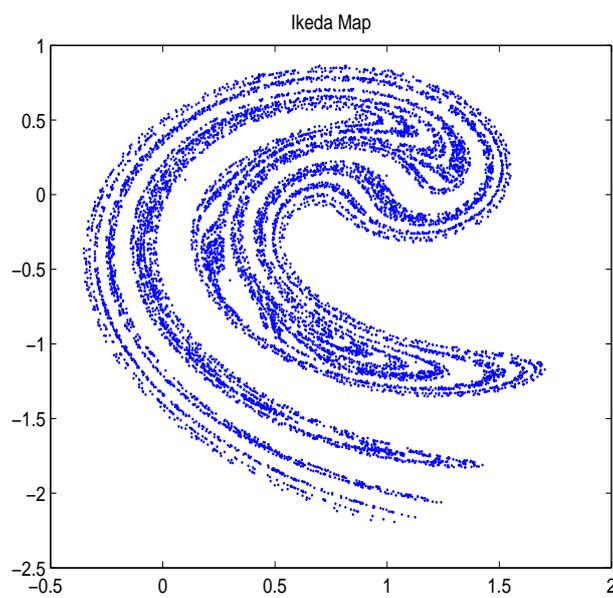


FIGURE 4.14 – Attracteur d'Ikeda pour $\mu = 0.9$ et $x_0 = y_0 = 0.1$.