# Chapitre 1

# Systèmes dynamiques linéaires

## 2.1 Introduction

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant $t_0$ ;
- de sa loi d'évolution.

## 2.2 Les systèmes dynamique

**Définition 2.1** *Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\begin{array}{l} (1)\, \mu\left(.,x\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ est continue} \\ (2)\, \mu\left(t,.\right) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \text{ est continue} \\ (3)\, \mu\left(0,x\right) = x \\ (4)\, \mu\left(t+s,x\right) = \mu\left(t,\mu\left(x,t\right)\right) \quad \forall t,s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

**Exemple 2.1** *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

*où $A$ est une matrice constante, $x \in \mathbb{R}^n$. la solution du système précédent est $x(t) = e^{At}x_0$.*
*Le système (2.1) engendre un système dynamique $(t,x) \to \mu(t,x) = e^{At}x_0$.*

*(1) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} \|\mu(t,x) - \mu(t,y)\| &= \|e^{At}x_0 - e^{At}y_0\| = \|e^{At}\|.\|x_0 - y_0\| \\ &\leq e^{\|A\||t|}\|x_0 - y_0\| \\ \lim_{x \to y} \|\mu(t,x) - \mu(t,y)\| &\leq \lim_{x \to y} e^{\|A\||t|}\|x_0 - y_0\| \to 0, \end{aligned}$$

*car* $\|e^{At}\| = \|\frac{(At)^n}{n!}\| \leq \frac{(\|At\|)^n}{n!} = e^{\|A\||t|}$, *alors* $\lim_{x \to y} \|\mu(t,x) - \mu(t,y)\| = 0$ *donc $\mu(.,x)$ est continue.*

*(2) Soit $t, s \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \|\mu(t+s,x) - \mu(t,x)\| &= \|e^{A(t+s)}x_0 - e^{At}x_0\| \\ &\leq \|e^{At}\|.\|e^{A(s)}x_0 - x_0\| \\ &\leq e^{\|A\||t|}\|x_0\|.\|e^{A(s)} - I\|, \end{aligned}$$

*alors* $\lim_{s \to 0} \|\mu(t+s,x) - \mu(t,x)\| = 0$ *donc $\mu(t,.)$ est continue.*

*(3)*

$$\mu(0,x) = e^{0.A}x = I.x = x.$$

*(4)*

$$\mu(t+s,x) = e^{(t+s)A}x = e^{tA+sA}x = e^{tA}e^{sA}x,$$

*alors*

$$\mu(t+s,x) = e^{tA}\mu(s,x) = \mu(t,\mu(s,x)).$$

### 2.2.1 Système dynamique à temps continu et discret

Un système peut être :

– **à temps continu** : représentée par une équation différentielle ordinaire.

On définit un système dynamique à temps continu avec le système suivant:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \quad (2.2)$$

où $F$ une application de $D$ dans $D$, et $D \subset \mathbb{R}^n$

– **à temps discret** : l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues. Elle est représentée par le modèle général des équations aux différences finie.

  On définit un système dynamique à temps discret avec la relation de réccurence donnée comme suivante:

$$x(k+1) = F(x(k)), \tag{2.3}$$

  où $F$ une application de $D \times \mathbb{N}$ dans $D$, $(x_k, k) \in (D, \mathbb{N})$ et $D \subset \mathbb{R}^n$ satisfaite:

$$F^0(x) = x,\ F^1(x) = F(x),\ F^2(x) = F(F(x)), ...,\ F^k(x) = F(F^{k-1}(x)),$$

  et

$$x_0,\ x_1 = F(x_0),\ x_2 = F^2(x_0), ...,\ x_k = F^k(x_0).$$

il peut être aussi

Un système dynamique est une structure qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

– **Causale**, où son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent

– **Déterministe**, c'est-à-dire qu'à partir d'une condition initiale donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible.

## 2.3 Systèmes linèaires

**Définition 2.2** *Le système différentiel (1) est linéaire s'il écrit sous la forme :*

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + a, \tag{2.4}$$

*où $A$ une matrce et $b$ un vecteur.*

*Si $b = 0$ alors le système correspandant est dit linéaire homogène.*

## 2.4 Trajectoires et orbites

**Définition 2.3** *Soit $\dot{x} = F(t, x)$ un système déterministe défini sur un ouvert $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Chaque solution $x(t, t_0, x_0)$ de cette équation, défini pour $t \in I$, où $I$ est intervalle contenant $t_0$, est représentée par une courbe de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$, contenue dans $\Delta$, dont chaque point $(t, x(t))$ donne l'état du système à l'instant $t$.*
*L'ensemble de ces points est appelé une trajectoire (ou courbe intégrale).*
*On peut considérer les $n$ fonctions $x_i(t)$, coordonnées de $x(t)$, comme la représentation paramétrique d'une courbe dans l'espace $\mathbb{R}^n$ appelé espace des phases du système.*

**Définition 2.4** *L'orbite (positive) d'une solution $x(t, t_0, x_0)$ de l'équation $\dot{x} = F(t, x)$ est est l'ensemble $\{f^n(x) tel\ que n \geq 0\}$. pour $t \in I$, dans l'espace des phases .*
*Si $f$ est bijective, l'*orbite de $x$ *est $\{f^n(x) tel\ que n \in \mathbb{Z}\}$.*
*Chaque orbite est orientée dans le sens du déplacement de $x(t)$ pour $t$ croissant.*
*On appelle portrait de phase du système différentiel l'ensemble des orbites des solution de ce système.*

La théorie des systèmes dynamiques s'intéresse particulièrement au comportement des orbites. Il est souvent utile de considérer aussi des «pseudo-orbites» au sens de la définition suivante.

**Définition 2.5 (**

**Définition 2.6 (Conjugaison topologique)** *Soit $r \geq 0$. Deux applications $C^r$ $f : X \to X$ et $g : Y \to Y$ sont* topologiquement conjuguées *lorsqu'il existe un homéomorphisme $h : X \to Y$ tel que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.*

Lorsque $h$ est un $C^m$ difféomorphisme $(m \leq r)$, on parle de *conjugaison lisse*. Parfois, on peut seulement trouver $h : X \to Y$ continue surjective telle que $h \circ f = g \circ h$. On parle alors de *semi-conjugaison*.

Nous pouvons désormais définir la stabilité structurelle d'un système dynamique.

**Définition 2.7 (Stabilité structurelle)** *Une application $f$ de $C^r$ est $C^m$* structurellement stable *$(1 \leq m \leq r \leq \infty)$ s'il existe un voisinage $U$ de $f$ pour la $C^m$ topologie telle que toute application $g \in U$ est topologiquement conjuguée à $f$.*

*Si de plus on peut choisir $h = h_g$ dans la conjugaison de $f$ et $g$ tel que $h_g$ et $h_g^{-1}$ convergent uniformément vers l'identité lorsque $g$ converge vers $f$ pour la topologie $C^m$, alors on dit que $f$ est $C^m$* fortement structurellement stable.

## 2.5 Point d'équilibre

**Définition 2.8** ***Cas continu*** *: On appelle point d'équilibre, point critique ou point singulier du système différentiel non linéaire $\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$, le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x_0) = 0$.*

**Définition 2.9** ***Cas discret*** *: On dit que $x^* \in D$ est un* ***point fixe*** *de $F$ si:*

$$F(x^*) = x^*.$$

**Définition 2.10** *On dit que $x^*$ est un* ***point périodique*** *si $n \geq 1$, tel que $F^n(x^*) = x^*$. La période d'un point périodique $x^*$ est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que:*

$$F^n(x^*) = x^*,$$

*l'ensemble $\{x_0, x_1, ..., x_{p-1}\}$ forme une* ***orbite périodique d'ordre*** *$p$ ou un cycle d'ordre $p$, si:*

$$F(x_i) = x_{i+1} \quad pour \quad i = 0, 1, 2, ..., p-2 \quad et \quad F(x_{p-1}) = x_0.$$

*Autrement dit, chaque point d'une orbite périodique d'ordre $p$ est un point fixe pour $F^p$: $F^p(x_i) = x_i$ pour $i = 0, 1, 2, ..., p-1$ et n'est pas un point fixe pour $F^k$ si $k < p$.*

## 2.6 Fonction définie positive ou négative

**Définition 2.11** *Soit* $V : B_\rho \to \mathbb{R}$ *une fonction continue où* $B_\rho$ *la boule unité ouverte de rayon* $\rho$ *de* $\mathbb{R}^n$.
*V est dite défnie positive si :*
*1)* $V(0) = 0$ *et*
*2)* $V(x) > 0$ *pour tout* $x \neq 0$ *de* $B_\rho$.

**Définition 2.12** $V$ *est dite défnie négative si* $-V$ *est défnie positive.*

### 2.6.1 Fonction semi-définie positive ou semi-définie négative

**Définition 2.13** $V$ *est dite semi-défnie positive si :*
*1)* $V(0) = 0$ *et*
*2)* $V(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in B_\rho$ *pour un* $\rho > 0$.

**Définition 2.14** $V$ *est dite semi-défnie négative si* $-V$ *est semi-défnie positive.*

## 2.7 Flot d'une équation différentielle

**Définition 2.15** *Soit système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x)$$

*et le problème à valeurs initiales*

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$$

*avec* $x \in \mathbb{R}^n, E$ *un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in C^1(E)$. *Pour* $x_0 \in E$ *et* $\phi(t, x_0)$ *la solution de problème à valeurs initiales, l'ensemble des applications* $\phi_t$ *défini par*

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

*est appelé le flot du système différentiel.*

## 2.8 Espace des phases

L'espace des phases (ou espace d'états) est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié.

**Théorème 2.1 (Brouwer)** *Soit $F$ une application continue de $\overline{B^n}$ dans lui-même où*
$\overline{B^n} = \{x \in \mathbb{R}^n \diagup \|x\| \leq 1\}$, *alors l'équation $F(x) = x$ admet une solution dans $\overline{B^n}$ c'est-à-dire $F$ admet un point fixe.*

**Théorème 2.2 (Contraction de Banach)** *Soit $F$ une application continue de $\overline{B^2}$ dans lui-même, on suppose que*:

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| < \lambda \|x_1 - x_2\|,$$

*pour tout vecteur $x_{i,j} \in \overline{B^2}$ et un certain $\lambda \in (0,1)$. Alors il existe un point fixe unique $x^* \in \overline{B^2}$. De plus on a*:

$$\lim_{n \to \infty} F^n(x) = x, \quad \forall x \in \overline{B^2}.$$

## 2.9 Section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret. Cette transformation s'opère via une réduction d'une unité de l'ordre du système. Soit un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension $n$ et une surface de dimension $(n-1)$ définie dans cet espace. L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface.
L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface représente la section de Poincaré. Dans un espace euclidien, le plan de la section doit être choisi de manière à garantir l'existence d'intersections avec la trajectoire $\varphi$ et de telle sorte que celle-ci le traverse alternativement dans un sens puis dans l'autre.

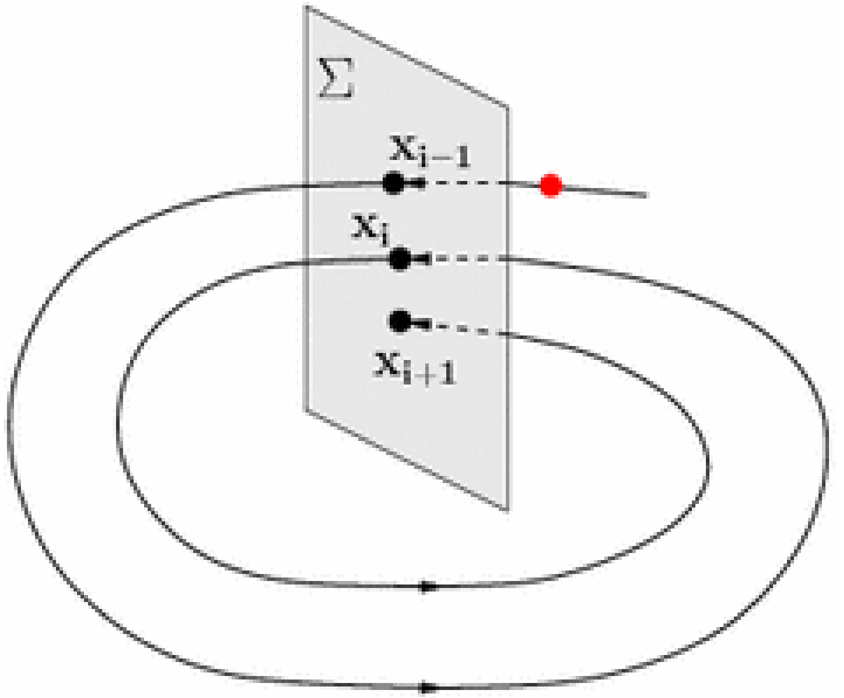


FIGURE 2.1 – La section de Poincaré.

### 2.9.1 Stabilité des systèmes linéaires

★ **Cas continu**

Le cas linéaire se définit par la situation particulière où $F$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ d'où

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \tag{2.5}$$

où $A$ est une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}^{n\times n}$.

L'origine est toujours un point d'équilibre de (2.5) (mais il peut y en avoir d'autres : tout élément de $\ker A$ est un point d'équilibre).

– L'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (2.5) si et seulement si toutes les valeurs propres de $A$ sont de partie réelle strictement négative.

– Si $A$ a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas un point d'équilibre stable de (2.5).

★ **Cas discret** Soit le système linéaire

$$X_{n+1} = AX_n \tag{2.6}$$

où $A$ est une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}^{n\times n}$.

- L'origine est un point fixe asymptotiquement stable de (2.6) si et seulement si toutes les valeurs propres de $A$ sont inférieur strictement 1 avec valeur absolue $|\lambda_i| < 1$.
- Si $A$ a au moins une valeur propre de partie superieur strictement 1 avec valeur absolue, alors l'origine n'est pas un point fixe stable de (2.6) $|\lambda_1| > 1$.

### 2.9.2 Point limite

**Définition 2.16** *Pour tout point $x$, on note $\omega(x)$ (*ensemble $\omega$-limite de *$x$) l'ensemble des points d'accumulation de $(f^n(x))_{n\geq 0}$ et $\alpha(x)$ (*ensemble $\alpha$-limite de *$x$)l'ensemble des points d'accumulation de $(f^n(x))_{n\leq 0}$. On définit alors l'*ensemble $\omega$-limite *$L^+(f) = \overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}$, l'*ensemble $\alpha$-limite *$L^-(f) = \overline{\bigcup_{x\in X}\alpha(x)}$ et l'*ensemble limite *$L(f) = L^+(f)\cup L^-(f)$.*

Un point de $\omega(x)$ est un point dont l'orbite issue de $x$ visite le voisinage une infinité de fois. On a les propriétés suivantes :

$$R^+(f) \subset L^+(f) \text{ et } R^-(f) \subset L^-(f)$$
$$f(L^+(f)) = L^+(f) \text{ et } f(L^-(f)) = L^-(f)$$

### 2.9.3 Attracteur et Bassin d'attraction

Les définitions suivantes précisent les notions intuitives d'attracteur et de bassin d'attraction.

**Définition 2.17 (Attracteur)** *Une partie compacte $A \subset X$ est un* attracteur *pour $f$ s'il existe un voisinage $V$ de $A$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $f^N(V) \subset V$ et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(V)$.*

**Définition 2.18 (Bassin d'attraction)** *Soit $A$ un attracteur. Le* bassin d'attraction *de $A$, noté $B(A)$, est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\omega(x) \subset A$.*