Chapitre 2

Systèmes dynamiques non linéaires

3.1 Systèmes autonomes et non autonomes

– On dit que le système différeniel est **autonome**, si sa loi d'évolution ne dépend pas du temps (la loi est alors dite stationnaire) ;

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \tag{3.1}$$

– On dit que le système différeniel est **non autonome** ; sa loi d'évolution dépend alors du temps.

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), t), \tag{3.2}$$

3.2 Systèmes conservatifs et dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Définition 3.1 *Soit* $(\Gamma, F, d\tau)$ *un système dynamique. Pour* $\Omega \subset \Gamma$ *une région de l'espace de phase, on définit* $\phi_{t,0}(\Omega) = \{\phi_{t,0}(x), x \in \Omega\}$ *le flot de cette région.*

– *Le système dynamique est dit conservatif, s'il conserve les volumes d'espace de*

phase :

$$\forall \Omega \subset \Gamma, \forall t > 0, \int\limits_{\phi_{t,0}(\Omega)} d\tau = \int\limits_{\Omega} d\tau$$

– *Le système dynamique est dit dissipatif, s'il contracte les volumes d'espace de phase :*

$$\forall \Omega \subset \Gamma, \forall t > s > 0, \int\limits_{\phi_{t,0}(\Omega)} d\tau < \int\limits_{\phi_{s,0}(\Omega)} d\tau$$

3.3 Etude de la stabilité du point fixe

Soient E un ensemble et $A \subset E$,

- On dit que A est invariant par F si $F(A) \subset A$.
- On dit que A est un attractif (ou attracteur) si A compact fermé et invariant par F ; et s'il existe un voisinage V de A tel que pour $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 est une suite qui converge vers A. Le voisinage V est appelé le **bassin d'attraction** de A et on a:
$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} F^k(V).$$
- On dit que A est **instable** (ou répulsif) s'il existe un voisinage V de A tel que pour tout $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 s'éloigne de A (ou de manière équivalente: si A est un attracteur pour F^{-1}).
- On dit que A est un **attracteur étrange** si l'orbite de x est dense dans A, $\forall x \in A$ et est sensible aux conditions initiales.
- L'attracteur le plus simple est le point fixe, il peut être attractif ou répulsif.

3.3.1 stable au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique à temps continu :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \quad \text{Condition initiales,} \end{cases} \tag{3.3}$$

où F une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et $x \in \mathbb{R}^n$.

Et soit le système dynamique à temps discret :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ x_{k_0} = x_0 \quad \text{Condition initiales,} \end{cases} \tag{3.4}$$

où F une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 3.2 *Le sytème dynamique (3.3) est dit* ***stable au sens de Lyapunov*** *par rapport au point d'équilibre x^* si suffisament proches du point fixe pour la condition initiales $x(t_0)$, et nous écrivons*:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|F(t, t_0, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t > t_0.$$

En dimension un, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ c'est la pente $m = F'(x^*)$ de la tangente au point fixe x^* qui détermine le type de point d'équilibre.

Définition 3.3 *Le sytème dynamique (3.4) est dit* ***stable au sens de Lyapunov*** *par rapport au point fixe x^* si suffisament proches du point fixe pour la condition initiales $x(k_0)$, et nous écrivons*:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(k_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|F(k, k_0, x(k_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall k > k_0.$$

En dimension un, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ c'est la pente $m = F'(x^*)$ de la tangente au point fixe x^* qui détermine le type de point fixe.

3.3.2 Point attractif

Définition 3.4 *Le point d'équilibre x^* du système (3.3) est* ***attractif*** *si*:

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}; \exists \delta_0(t_0), \quad \textit{tel que} \quad \|x(t_0) - x^*\| < \delta_0(t_0) \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} F(t, t_0, x(t_0)) = x^*,$$

lorsque $\delta_0(t_0) = +\infty$; on dit que le point d'équilibre x^* est globalement attractif.

Définition 3.5 *Le point fixe x^* du système (3.4) est* ***attractif*** *si*:

$$\forall k_0 \in \mathbb{N}; \exists \delta_0(k_0), \quad \textit{tel que} \quad \|x(k_0) - x^*\| < \delta_0(k_0) \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} F(k, k_0, x(k_0)) = x^*,$$

lorsque $\delta_0(k_0) = +\infty$; on dit que le point fixe x^* est globalement attractif.

Définition 3.6 *Le point fixe x^* est dit asymptotiquement (respectivement globalement asymptotiquement) stable lorsqu'il est à la fois stable au sen de Lyapunov et attractif (respectivement globalement asymptotiquement).*

3.3.3 Méthode de linéarisation

Soit le système dynamique non linéaire

$$\begin{array}{c} \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \\ x(t_0) = x(0), \text{ Condition initiales.} \end{array} \tag{3.5}$$

La linéarisation au tour du point d'équilibre x^* revient à poser :

$$x = x^* + \delta x.$$

Alors

$$\dot{x} = \dot{x}^* + \delta\dot{x}.$$

On obtient donc :

$$\dot{x}^* + \delta\dot{x} = F(\dot{x}^* + \delta\dot{x}).$$

Par le développement de Taylor du premier ordre de $F(x)$, on obtient

$$F(\dot{x}^* + \delta\dot{x}) = F(x^*) + F'(x^*)(x - x^*).$$

D'où

$$\delta\dot{x} = DF(x^*)\delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0$$

$DF(x)$ représente la matrice jacobienne de $F(x)$ par rapport à x , tel que

$$DF(.) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta x_1} & \frac{\delta F_1}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta F_1}{\delta x_n} \\ \frac{\delta F_2}{\delta x_1} & \frac{\delta F_2}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta F_2}{\delta x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\delta F_n}{\delta x_1} & \frac{\delta F_1}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta F_{n1}}{\delta x_n} \end{pmatrix}$$

3.3.4 Méthode de Lyapunov

Méthode indirecte de Lyapunov

La méthode indirecte, aussi appelée première méthode de Lyapunov, considre á linéairiser le système dynamique autour d'un point fixe x^* et á tester la stabilité du système.

Théorème 3.1 *Soit le système non lénaire (3.3), et soient λ_i, $i = 0, 1, ..., n$, les valeur propres de la matrice jacobienne de $F(.)$ au point d'équilibre x^* du système (3.3) est*:

1. *Asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne sont de partie réelle strictement négative.*
2. *Instable (ou répulsif) si la matrice jacobienne admet au moins une valeur propre au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive*
3. *On ne peut pas conclure la stabiltê locale du point fixe si certaines valeurs propres de la matrice jacobienne sont nuls*

Théorème 3.2 *Soit le système non lénaire (3.4), et soient λ_i, $i = 0, 1, ..., n$, les valeur propres de la matrice jacobienne de $F(.)$ au point fixe x^* du système (3.4) est*:

1. *Asymptotiquement stable si $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}$, tel que $\|\lambda_i\| < 1$.*
2. *Instable (ou répulsif) si la matrice A admet au moins une valeur propre de module strictement supérieur à l'unité. $\exists i \in \{0, 1, ..., n\}$, tel que $\|\lambda_i\| > 1$.*
3. *On ne peut pas conclure la stabiltê locale du point fixe si certaines valeurs propres de la matrice A sont sur le cercle du rayon de l'unité et les autres à l'intérieur.*

Méthode directe de Lyapunov

Dans la méthode directe de Lyapunov, on cherche une fonction scalaire (de type énergétique), que admet une différence négative. Cette fonction est appelée fonction de Lyapunov.

Définition 3.7 *Soit le système (3.3), la fonction de Lyapunov est une fonction scalaire $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continue en $x(t)$, tel que*:

1. $V(0) = 0$,
2. $V(x(t)) > 0$, $\forall x(t) \neq 0$,
3. $V(x(t)) \to +\infty$ *si* $\|x(t)\| \to +\infty$.

Exemple 3.1 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^2 \\ \dot{y} = xy - y^3 \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité en point d'équilibre $(0,0)$ *avec une fonction de Lyapunov, supposons* $V(x,y) = ax^2 + by^2$ *où* $a > 0, b > 0$,

alors

$$\dot{V}(x,y) = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y}$$

$$\dot{V}(x,y) = 2ax(-x^3 - y^2) + 2byxy - y^3$$

donc

$$\dot{V}(x,y) = -2ax^4 - 2axy^2 + 2bxy^2 - 2by^4.$$

On pose $a = b = 1$ *alors*

$$\dot{V}(x,y) = -2x^4 - 2y^4 = -2(x^4 + y^4)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} V(x,y) = x^2 + y^2 > 0, \forall (x,y) \neq (0,0) \\ V(0,0) = 0 \\ \dot{V}(x,y) = -2(x^4 + y^4) < 0, \forall (x,y) =\neq (0,0) \\ \lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} V(x,y) = +\infty. \end{cases}$$

Alors $(0,0)$ *est asymptotiquement stable.*

Théorème 3.3 *Le principe de la deuxiéme méthode de Lyapunov consiste à remplacer l'étude de convergence de* $x(t)$ *vers* $x^* = 0$, *c'est-à-dire le point d'équilibre* $x^* = 0$ *est asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapunov* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *telle que*:

$$\dot{V}(x(t)) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0. \tag{3.6}$$

C'est-à-dire la fonction de Lyapunov est strictement décroissante où $\dot{V}(x(t)) = \frac{\delta V}{\delta x}\dot{x}$ *et* $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Remarque 3.1 *Si le point d'équilibre* $x^* \neq 0$, *on s'y ramène par un changement de variable du type* $x'(t) = x(t) - x^*$.

Définition 3.8 *Soit le système (3.4), la fonction de Lyapunov est une fonction scalaire* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *continue en* x_k, *tel que*:

1. $V(0) = 0$,
2. $V(x_k) > 0$, $\forall x_k \neq 0$,
3. $V(x_k) \to +\infty$ *si* $\|x_k\| \to +\infty$.

Théorème 3.4 *Le principe de la deuxiéme méthode de Lyapunov consiste à remplacer l'étude de convergence de x_k vers $x^* = 0$, c'est-à-dire le point fixe $x^* = 0$ est asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, telle que*:

$$\Delta V(x_{k+1}, x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0, \quad \forall x_k \neq 0. \tag{3.7}$$

Remarque 3.2 *Si le point fixe $x^* \neq 0$, on s'y ramène par un changement de variable du type $x'_k = x_k - x^*$.*

Exemple 3.2 *Soit le système différentiel de Lorenz suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(y - x) \\ \dot{y} = -xz + \frac{1}{2}x - y \\ \dot{z} = xy - 3z. \end{cases} \tag{3.8}$$

En étude la stabilité de point d'équilibre $(0, 0, 0)$ de ce système

Posons

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)$$

$$\dot{V}(x, y, z) = \alpha x\dot{x} + \beta y\dot{y} + \gamma z\dot{z}$$

$$\dot{V}(x, y, z) = 2\alpha x(y - x) + \beta y(-xz + \frac{1}{2}x - y) + \gamma z(xy - 3z)$$

alors

$$\dot{V}(x, y, z) = 2\alpha xy - 2\alpha x^2 - \beta xyz + \frac{1}{2}\beta xy - \beta y^2 + \gamma xyz - 3\gamma z^2,$$

on pose $\beta = \gamma$ alors

$$\dot{V}(x, y, z) = 2\alpha xy - 2\alpha x^2 + \frac{1}{2}\beta xy - \beta y^2 - 3\beta z^2,$$

on pose $\beta = \gamma = 2$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ alors

$$\dot{V}(x, y, z) = -x^2 + 2xy - 2y^2 - 6z^2$$

$$\dot{V}(x, y, z) = -(x - y)^2 - y^2 - 6z^2$$

donc

$$\dot{V}(x,y,z) = -[(x-y)^2 + y^2 + 6z^2] < 0 \ \textit{si} \ (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

La fonction de Lyapunov est

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + 2z^2)$$

V est satisfaite les conditions de définition (3.7) alors le point d'équilibre $(0,0,0)$ *est asymptotiquement stable.*

3.3.5 Stabilité des points périodiques

Comme les points périodiques sont des points fixes de F^p, alors:

Théorème 3.5 *Soit x le point périodique d'un cycle d'ordre p: Si les valeurs propres de la matrice $DF^p(x)$ sont des modules strictement inférieurs à l'unité, le cycle est stable ; si la matrice $DF^p(x)$ admet au moins une valeur propre de module strictement supérieur à l'unité, le cycle est instable.*

En dimension un, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est $m_p = F^p(x^*)$ alors:

Théorème 3.6 ***Cas discret*** *:Pour $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le cycle $\{x_0, x_1, ..., x_{p-1}\}$:*

1. *Stable (ou attractif) si: $|m_p| < 1$.*
2. *Instable (ou répulsif) si: $|m_p| > 1$.*
3. *Indiférent si: $|m_p| = 1$.*
4. *Super stable (ou super attractif) si: $|m_p| = 0$.*

m_p s'appelle le multiplicateur de F du cycle $\{x_0, x_1, ..., x_{p-1}\}$ et $m_p = \prod_{i=0}^{i=p-1} F'(x_i)$, oú $F' = \dfrac{dF}{dx}$.

3.4 Nature des points fixes et cycles

Pour caractériser la nature des points fixes et les cycles nous supposons que:

a) Si la dimension de système (3.2) est égal à un, le multiplicateur d'un point fixe x^* est $m = F'(x^*)$ oú $F' = \dfrac{dF}{dx}$ et le multiplicateur d'un cycle d'ordre p, $\{x_0, x_1, ..., x_{p-1}\}$ est $m_p = \prod_{i=0}^{i=p-1} F'(x_i)$.

Un point fixe ou un cycle est dit stable (ou attractif) si $|m| < 1$ ($|m_p| < 1$ respectivement), et instable (ou répulsif) si $|m| > 1$ ($|m_p| > 1$ respectivement).

b) Si la dimension de système (3.2) supérieur un, les multiplicateurs d'un point fixe x^* ou d'un cycle d'ordre p sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne de $F(x^*)$ ou de $F^p(x_i)$.

Lorsque la dimension de système (2) est égal à deux, il existe deux valeurs propres λ_1 et λ_2 alors la nature de point fixe ou cycle donnée comme suivante:

Cas continu

1) Col: Si λ_1 et λ_2 sont réels: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

Un col est un point instable:

2) Noeud: Si λ_1 et λ_2 sont réels

a- stable si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$,

b- instable si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

3) Foyer: Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $\lambda_{i,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$,

a- stable si $\alpha < 0$,

b- instable si $\alpha > 0$,

c- centre si $\alpha = 0$.

Cas discret

1) Col: Si λ_1 et λ_2 sont réels: $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$.

Un col est un point instable:

a- de type 1 si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$,

b- de type 2 si $\lambda_1\lambda_2 < 0$,

c- de type 3 si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

2) Noeud: Si λ_1 et λ_2 sont réels

a- stable si $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$,

b- instable si $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, 2$.

3) Foyer: Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $r = |\lambda_i|$, $i = 1, 2$,

a- stable si $r < 1$,

b- instable si $r > 1$.

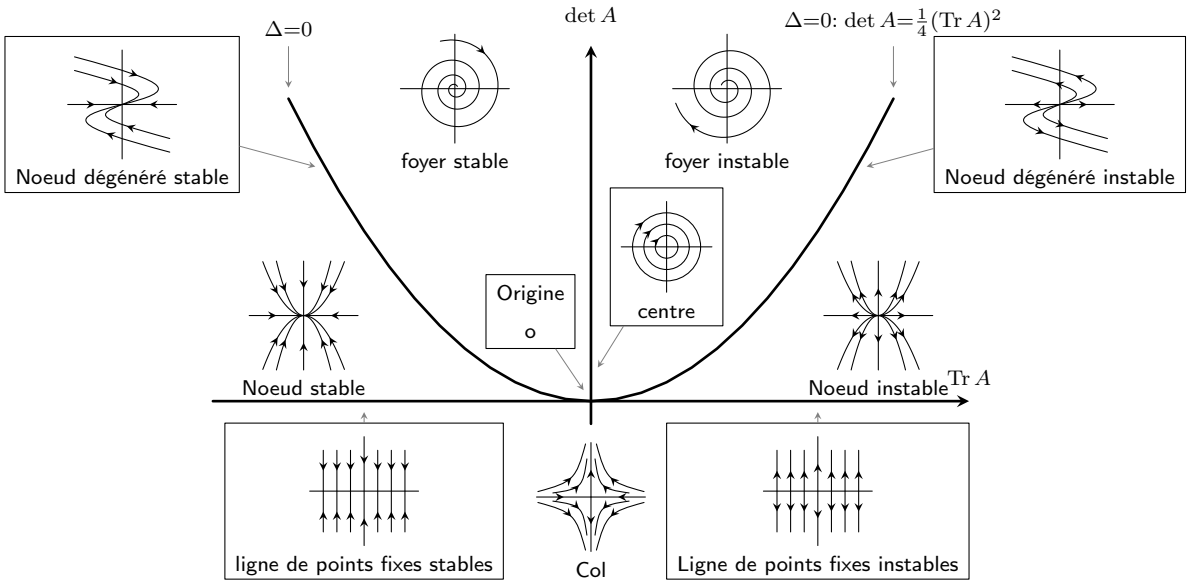

FIGURE 3.1 – Classification des portraits de phases dans le plan $(\det A, \operatorname{Tr} A)$.

3.5 Exposants de Lyapunov

En régime chaotique, la distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. tant donné une précision sur les mesures, le temps que mettent deux conditions initiales dont la distance à l'origine est de l'ordre de cette précision constitue l'horizon prédictif du système. Les exposants dits de Lyapunov permettent de mesurer ce taux de divergence.

La mesure du plus grand exposant de Lyapunov nécessite d'itérer la dynamique du modèle pour deux conditions initiales très proches, et de mesurer au bout d'un temps fini la distance entre ces deux trajectoires. Pour que ce calcul soit valable, il faut

bien sûr que ces deux conditions initiales soient situées à proximité de l'attracteur.

Une erreur $\epsilon_0 > 0$ sur la condition initiale va évoluer exponentiellement et l'erreur, à un instant t, aura l'expression suivante : $|\epsilon(t)| = \epsilon_0 e^{\lambda t}$. On peut calculer la valeur de λ, appelé exposant de Lyapunov, grâce aux méthodes développees par Alexandre Lyapunov.

3.5.1 Exposant de Lyapunov pour un système de dimension égale a un

Soit un système dynamique de dimension égal un. donné par une application discrète $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$x_{k+1} = f(x_k), k = 0, 1, 2, ... \tag{3.9}$$

Soit x_0 une condition initiale x_0, un accroissement δx_0, (avec $\delta x_0 \to 0$) afin d'obtenir une seconde initiale proche x'_0 telle que:

$$x'_0 = x_0 + \delta x_0.$$

On utilise les deux premiers termes d'un développement en séries de Taylor on a ;

$$f(x'_0) = f(x_0 + \delta x_0) = f(x_0) + f'(x_0).\delta x_0. \tag{3.10}$$

En remplaçant dans (3.10) on obtient

$$\delta x_1 = f'(x_0).\delta x_0 \text{ tel que } \delta x_1 = x'_1 - x_1, \tag{3.11}$$

où $x_1 = f(x_0)$ et $x'_1 = f(x'_0)$. Nous prenons à nouveau l'image par f des deux membres de (3.11) on obtient

$$f(x'_1) = f[f(x_0 + \delta x_0)] = f[f(x_0)] + f'[f(x_0)].\delta x_0, \tag{3.12}$$

donc

$$f(x'_1) = f^2(x_0) + f'[f(x_0)].\delta x_0, \tag{3.13}$$

donc le premier itéré de f sur x'_1, il vient

$$f(x'_1) = f(x_1) + f'(x_1).\delta x_1. \tag{3.14}$$

En introduisant (3.10) dans (3.14), nous obtenons l'équation suivante:

$$f(x_1') = f(x_1) + f'(x_1).f'(x_0).\delta x_0. \tag{3.15}$$

On suppose ainsi

$$\delta x_2 = f'(x_1).f'(x_0).\delta x_0, \tag{3.16}$$

alors l'équation (3.15) est équivalent l'équation suivante

$$f(x_1') = f(x_1) + \delta x_2. \tag{3.17}$$

Nous généralisons l'équation (3.16) à une étape d'itération quelconque k en écrivant

$$\delta x_k = \left(\prod_{m=0}^{m=k-1} f'(x_m) \right) .\delta x_0. \tag{3.18}$$

En supposant $|\delta x_k| \approx (\gamma)^k |\delta x_0|$, l'évolution est obtenue par un taux effectif γ par pas d'itération, qui est donné par l'équation (3.18) avec l'équation (3.19).

$$\lim_{k \to +\infty} \left(|\frac{\delta x_k}{\delta x_0}| \right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to +\infty} \left(\prod_{m=0}^{m=k-1} |f'(x_m)| \right)^{\frac{1}{k}}. \tag{3.19}$$

Après logarithme de l'équation (3.19), nous obtenons l'exposant de de Lyapunov,

$$\lambda = \log(\gamma) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{m=k-1} \log(|f'(x_i)|), \tag{3.20}$$

$$\lambda = \log(\gamma) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{m=k-1} \log(|f'(x_i)|). \tag{3.21}$$

Pour $\lambda \leq 0$ la trajectoire de l'évolution du système peut tendre vers un point fixe, avoir un comportement périodique (ou quasi-périodique).

Pour $\lambda > 0$ le système est chaotique.

Pour $\lambda \to \infty$ le système devient aléatoire.

3.5.2 Exposants de Lyapunov pour un système de dimension supérieure strictement à un

Soit le système dynamique de dimension n défini par:

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ... \\ x_0 \ \text{ est la condition initiale,} \end{cases} \tag{3.22}$$

où F une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour le calcul des exposants de Lyapunov, la méthode est la suivante. On remarque la trajectoire du point initial x_0 et celui de un point très proche, $x_0 + \varepsilon_0$ (x_0 et $x_0 + \varepsilon_0$ sont des vecteurs d'espace d'état). L'évolution du système est décrite par l'application F. D'abord, la distance entre les deux points est déterminée par la norme de ε_0. Après itération, la distance entre les deux points de trajectoires est donnée comme suivante:

$$\|\varepsilon_1\| = \|F(x_0 + \varepsilon_0) - F(x_0)\| = \|J(x_0)\varepsilon_0\|, \tag{3.23}$$

où $J(x_0)$ est la matrice jacobienne de F évaluée en x_0.

Aprés généraliser l'équation (3.23) une étape d'itération quelconque k, nous écrivons

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_k\| &\approx \|J(x_{k-1})J(x_{k-2})...J(x_0)\varepsilon_0\| \\ &\approx \| \prod_{i=0}^{i=k-1} J(x_i)\|.\|\varepsilon_0\|, \end{aligned} \tag{3.24}$$

où $\prod_{i=0}^{i=k-1} J(x_i) = J(x_{k-1})J(x_{k-2})...J(x_0)$.

On définit alors les n exposants de Lyapunov avec la limite suivante:

$$\lambda = \lim_{k\to+\infty} \lim_{\varepsilon_0\to 0} \frac{1}{k} \log\left(\frac{\|\varepsilon_k\|}{\|\varepsilon_0\|}\right) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{\varepsilon_0\to 0} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{k} \log\left(\frac{\|\varepsilon_i\|}{\|\varepsilon_{i-1}\|}\right). \tag{3.25}$$

Puisque l'application F n'est pas connue, la procédure de calculer les exposants de Lyapunov sera composé à estimer les matrices jacobiennes à partir des données. Ce n'est pas possible pour des problèmes d'instabilité numérique et une autre procédure doit être appliquée. Wolf et al. [1985] ainsi que Eckmann et Ruelle [1985] ont présentés des algorithmes performants pour les séries temporelles.

3.5.3 Méthode de Wolf

Soit un système dynamique discret de dimension n défini par (3.22).

On définit la suite de vecteurs:

$$v_i(k+1) = J(k)v_i(k), \quad k = 0, 1, 2, ..., n. \tag{3.26}$$

où $J(k)$ est la Jacobienne de F au point x_k.

Alors après n itération le système (3.26) devient:

$$v_i(k+1) = J(k)J(k-1)...J(0)v_i(0), \quad k = 0, 1, 2, ..., n \tag{3.27}$$

dans le système (3.26), la longueur du premier axe principal augmente comme $e(\lambda_1 k)$, la zone définie par les deux premiers axes principaux augmente comme $e((\lambda_1+\lambda_2)k)$, le volume défini par les trois premiers axes principaux augmente comme $e((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)k)$... ect, et immédiatement:

$$\lambda_i \approx \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log \left(\frac{\|v_1\|}{\|v_0\|}.\frac{\|v_2\|}{\|v_1\|}...\frac{\|v_N\|}{\|v_{N-1}\|} \right). \tag{3.28}$$

Pour $k = 0$, les vecteurs v_i, $i = 1, 2, ..., n$ sont définis par:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0, ..., 0) \\ v_2 &= (0, 1, 0, 0, ..., 0) \\ &\vdots \\ v_n &= (0, 0, 1, 0, ..., 0). \end{aligned}$$

Pour éviter la divergence, à chaque itération les vecteurs $v_i(k), v_2(k), ..., v_n(k)$ seront orthonormés par le procédé de Gram-Schmidt.

Alors, le i-ème approximation de l'exposant de Lyapunov est défini en application du taux de croissance du i-ème axe principal v_i par la formule:

$$\lambda_i \approx \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log \frac{\|v_N\|}{\|v_0\|}, \quad \text{où} \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.29}$$

En conséquence, ils peuvent, en temps fini, être supèrieurs en valeur absolue à leur valeur en temps infini qui est utilisée habituellement et qui est obtenu avec la méthode de alan Wolf.

Remarque 3.3 *Pour un système non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange possèdera toujours au moins trois exposants de Lyapunov, existe au moins un exposant positif.*